Freiburger Sommerschule für Theoretische Physik:
Einblicke in die moderne Forschung

24. – 28. September 2001

# Eine moderne Methode der Quantisierung: Die Deformationsquantisierung

**Stefan Waldmann**[*]

Fakultät für Physik
Hermann-Herder-Str. 3
D-79104 Freiburg
Germany

[*]email: Stefan.Waldmann@physik.uni-freiburg.de web: http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Einleitung und Motivation

Die Quantentheorie feierte ihren 100-jährigen Geburtstag, und trotzdem soll man sich noch mit dem Problem der Quantisierung beschäftigen? Tatsächlich gibt es dafür nach wie vor gute Gründe und ungeklärt Fragen ebenso wie neue Techniken und Resultate, auf die ich in diesem Beitrag zur ersten Freiburger Sommerschule für Theoretische Physik aufmerksam machen will.

Zwar ist die nicht-relativistische Quantentheorie endlich vieler Punktteilchen, die sich im Euklidischen Raum bewegen, gut verstanden, die physikalische Realität erfordert aber ein weitergehendes und tieferes Verständnis für kompliziertere Situationen.

Die Einbeziehung der Relativitätstheorie führt auf Quantenfeldtheorien, deren Formulierung bislang nach wie vor nur störungstheoretisch um eine freie (also nicht-wechselwirkende) Theorie möglich ist, wenn man von bestimmten Modellen in niedrigeren Raumdimensionen absieht. Neben der unendlichen Zahl physikalischer Freiheitsgrade ist eine Schwierigkeit, die hier auftritt, die Anwesenheit von *Eichfreiheitsgraden*: zur klassischen Beschreibung verwendet man zusätzlich Freiheitsgrade, die keine unmittelbare physikalische Relevanz besitzen. Als Beispiel sei die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus genannt: die Potentiale $(\phi, \vec{A})$ dienen der Vereinfachung des Problems, sind selbst allerdings physikalisch nicht beobachtbar. Der beobachtbare Gehalt der Theorie sind die Felder $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Will man nun die tatsächlichen, physikalischen Freiheitsgrade beschreiben, muß man zu Eichäquivalenzklassen der Potentiale übergehen. Im obigen Beispiel sind $(\phi, \vec{A})$ und $(\phi', \vec{A}')$ als physikalisch äquivalent zu betrachten, wenn sie die selben Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ liefern. Der Übergang zu den entsprechenden Äquivalenzklassen wird auf klassischer Seite auch *Phasenraumreduktion* genannt, da sich typischerweise die Dimension des Phasenraumes verringert. Dadurch wird aber im allgemeinen die *Geometrie* des klassischen reduzierten Phasenraums erheblich komplizierter. In der Regel erhält man „Schlaufen und Henkel", der reduzierte Phasenraum ist gekrümmt und es gibt keine „globalen Koordinaten" wie die üblichen $(q, p)$ mehr, siehe Abbildung 1. Aus diesem Grunde wird eine naive „kanonische" Quantisierung unmöglich.

Als *Modelle* für diese Situation in Feldtheorien mit Eichfreiheitsgraden betrachtet man daher *endlich-dimensionale* Phasenräume mit komplizierter Geometrie, um die auftretenden Phänomene,

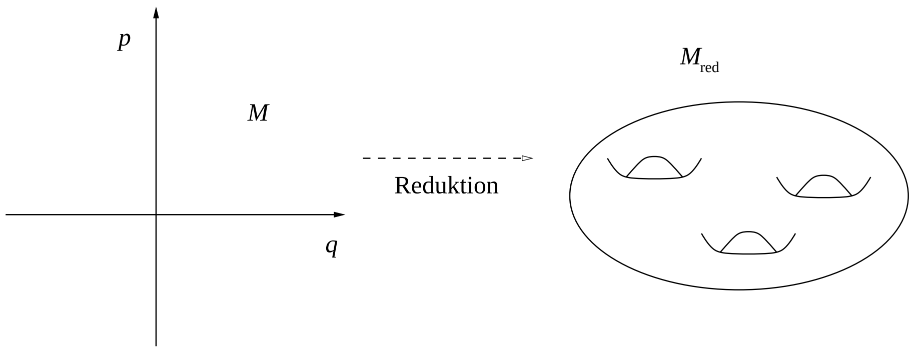


Abbildung 1: Phasenraumreduktion liefert komplizierte Geometrie.

die für unendlich viele Freiheitsgrade sicherlich nicht gerade einfacher werden, an diesen „toy-models" zu studieren.

Neben diesem angestrebten besseren Verständnis des Themenkomplex Eichfreiheitsgrade $\leftrightarrow$ Phasenraumreduktion $\leftrightarrow$ Quantisierung gibt es weitere Gründe, sich mit der Quantisierung endlichdimensionaler Phasenräume mit komplizierterer Geometrie als $\mathbb{R}^{2n}$ zu beschäftigen.

Hier sei zum einen der Fall eines Teilchens in einem gekrümmten Hintergrund genannt, also eine Situation, die man nach Einbeziehung allgemein-relativistischer Effekte erwarten muß.

Weiter zeigt sich, daß das Verständnis der Quantentheorie zu komplizierten Phasenräumen vom technischen Aspekt her eng mit der Frage nach einer „Quantisierung von Geometrie" schlechthin verknüpft ist. Trotz vieler ungeklärter Fragen erhofft man sich Anwendungen dieser „nichtkommutativen Geometrie" beispielsweise in einer Quantentheorie der Gravitation.

Im folgenden werde ich diese spekulativen Aspekte zwar als eine Motivation gelten lassen, ansonsten aber einen eher konservativen Standpunkt einnehmen: Es soll die (nicht-relativistische) Quantentheorie von endlich vielen klassischen Freiheitsgraden untersucht werden, deren klassischer Phasenraum eine kompliziertere Geometrie als $\mathbb{R}^{2n}$ besitzen darf. Dabei sei ein konzeptuell klares wie auch mathematisch „sauberes" Vorgehen angestrebt.

Um die Problemstellung der Quantisierung klar formulieren zu können, möchte ich daher zunächst an die wesentlichen Strukturen in klassischer Mechanik und Quantenmechanik erinnern und eine Formulierung bereitstellen, welche der Problemstellung möglichst angepaßt ist. Dabei gilt es insbesondere, die Begriffe „Zustand", „Observable", „Zeitentwicklung" etc. zu klären. Anschließend wird die kanonische Quantisierung, wie sie in den üblichen Lehrbüchern zu findet ist, die Motivation für den Begriff des Sternprodukts sein. Diesen zentralen Begriff der Deformationsquantisierung gilt es dann ausführlich zu diskutieren und das Erreichte mit den angestrebten Zielen kritische zu vergleichen. Als weiterführende Literatur verweise ich hier auf [19, 30].

# 2 Klassische Mechanik und Quantenmechanik

## 2.1 Erinnerung an die übliche Formulierung

Hier sei kurz an die übliche Formulierung der Hamiltonschen klassischen Mechanik und der Quantenmechanik erinnert. Genaueres findet man beispielsweise in [1, 18, 21, 28, 29].

### 2.1.1 Hamiltonsche klassische Mechanik: Version I

Die Arena der klassischen Mechanik bildet der *Phasenraum* $M$, im einfachsten Fall $M = \mathbb{R}^{2n}$, wobei $n$ die Zahl der Freiheitsgrade bezeichnet.

- Die *reinen Zustände* sind dann gerade die *Punkte* im Phasenraum $x \in M$, üblicherweise durch Orte und kanonisch konjugierte Impulse gekennzeichnet $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$. Auf die Frage, wie sich *gemischte Zustände* beschreiben lassen, werde ich später näher eingehen.

- Die *Observablen* sind die reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ auf dem Phasenraum, typischerweise mit zusätzlichen analytischen Eigenschaften: stetige Funktionen $C(M)$, glatte (also unendlich oft differenzierbare) Funktionen $C^\infty(M)$, analytische Funktionen $C^\omega(M)$ oder polynomiale Funktionen $\mathrm{Pol}(M)$.

  **Nota bene:** Es ist klar zu unterscheiden zwischen einem *Punkt* (= Zustand) $(q^i, p_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ und den *Koordinatenfunktionen* (= Observable) $q^i, p_i : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Leider wird dies in vielen Lehrbüchern weder in der Notation noch konzeptuell deutlich unterschieden. Es sollte aber klar sein, daß dieser fundamentale Unterschied von Bedeutung ist.

- Der *Erwartungswert* $E_x(f)$ einer Observablen $f$ im Zustand $x$ ist gerade der Funktionswert $f(x)$.

- Die *möglichen Meßwerte* einer Observablen $f$ sind die Werte, die die Funktion annimmt, also die Menge $f(M) \subseteq \mathbb{R}$.

- Das *Schwankungsquadrat* $\Delta_x(f)$ bei wiederholter Messung einer Observablen $f$ in einem reinen Zustand $x \in M$ ist

$$(\Delta_x(f))^2 = E_x(f^2) - E_x(f)^2 = (f(x))^2 - (f(x))^2 = 0. \tag{2.1}$$

- Die *Zeitentwicklung* wird durch eine spezielle Observable, die *Hamilton-Funktion* $H : M \to \mathbb{R}$ bestimmt. Die Zeitentwicklung eines Zustandes $x \in M$ ist eine Kurve $t \mapsto x(t) = (q(t), p(t))$ in $M$ durch $x(0) = x$, welche den *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* genügt:

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \quad \text{und} \quad \dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t)) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

### 2.1.2 Quantenmechanik: Version I

Was der Phasenraum $M$ für die klassische Mechanik ist, ist der *Hilbert-Raum* $\mathfrak{H}$ für die Quantenmechanik. Für realistische Quantensysteme besitzt $\mathfrak{H}$ eine abzählbar unendliche Hilbert-Basis, für vereinfachte Systeme und Modelle sind aber auch endlich-dimensionale Hilbert-Räume von Interesse.

- Die *reinen Zustände* sind dann komplexe Strahlen im Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$, also Äquivalenzklassen von Vektoren $\psi \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$, wobei $\psi \sim \psi'$, wenn $\psi = z\psi'$ mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Die *Observablen* werden durch Operatoren auf $\mathfrak{H}$ beschrieben. Hier sind zum einen die beschränkten (= stetigen) Operatoren $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ von Interesse aber auch unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren, die entsprechend nur einen dichten Definitionsbereich in $\mathfrak{H}$ haben.

- Der *Erwartungswert* $E_\psi(A)$ einer Observablen $A$ in einem Zustand $\psi$ ist durch

$$E_\psi(A) = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \tag{2.3}$$

gegeben. Offenbar hängt $E_\psi(A)$ nur von dem Zustand ab, der durch $\psi \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$ beschrieben wird.

- Die *möglichen Meßwerte* einer Observablen $A$ sind die *Spektralwerte* $\mathrm{spec}(A)$. Um einen vernünftige Definition von $\mathrm{spec}(A)$ zu erhalten, muß $A$ selbstadjungiert sein. Dann kann $\mathrm{spec}(A)$ aus Eigenwerten von $A$ bestehen, wie beispielsweise beim harmonischen Oszillator. Andererseits kann es aber auch Spektralwerte geben, die keine Eigenwerte sind, wie beim Ortsoperator.

- Bei wiederholter Messung einer Observablen $A$ im Zustand $\psi$ ist das *Schwankungsquadrat*

$$(\Delta_\psi(A))^2 = E_\psi(A^2) - (E_\psi(A))^2 \neq 0 \tag{2.4}$$

im allgemeinen von Null *verschieden*: Für jeden Zustand $\psi$ gibt es eine Observable $A$, so daß $(\Delta_\psi(A))^2 \neq 0$. Grund hierfür ist die Nichtkommutativität der Observablen. Physikalisch überprüfbare Grenzen für die Schwankungsquadrate $(\Delta_\psi(A))^2$ ergeben sich aus den *Heisenbergschen Unschärferelationen*. Da diese ein physikalisches Phänomen darstellen, ist die Nichtkommutativität der quantenmechanischen Observablen zwingend erforderlich.

Da die Heisenbergschen Unschärferelationen eine „Unschärfe" von der typischen Größenordnung des *Planckschen Wirkungsquantums* $\hbar$ vorhersagen, beispielsweise in der kanonischen Vertauschungsrelation $[Q, P] = \mathrm{i}\hbar$, kann man erwarten, daß die Nichtkommutativität der Observablen von der Ordnung $\hbar$ ist. Wie man dieser Vorstellung einen vernünftigen physikalischen (und auch mathematischen) Sinn geben kann, gilt es noch eingehend zu diskutieren.

- Die *Zeitentwicklung* eines Zustandes $\psi$ wird wieder durch eine spezielle Observable, den *Hamilton-Operator* $H$, als Lösungskurve $t \mapsto \psi(t)$ der *Schrödinger-Gleichung*

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = H\,\psi(t) \tag{2.5}$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi \in \mathfrak{H}$ bestimmt.

## 2.2 Verallgemeinerungen

Im folgenden sollen Verallgemeinerungen der bekannten Formulierungen von klassischer Mechanik und Quantenmechanik diskutiert werden. Dabei sollen *algebraische* Aspekte mit dem Ziel im Vordergrund stehen, einen direkten Vergleich von klassischer und quantenmechanischer Theorie zu ermöglichen. Insbesondere nehmen die folgenden Charakterisierungen nicht mehr explizit Bezug auf die Anzahl der Freiheitsgrade, so daß viele der Aussagen auch für Feldtheorien und Systeme im thermodynamischen Limes richtig bleiben.

Auf quantenmechanischer Seite sollen funktional-analytische Fragen wie nach Vollständigkeit, Selbstadjungiertheit etc. zugunsten einer algebraischeren Sichtweise in den Hintergrund treten und erst in einem zweiten Schritt berücksichtigt werden.

Auf klassischer Seite werden die geometrischen Fragen durch algebraische ersetzt. Dies ist dadurch motiviert, daß ein Phasenraum $M$ die Funktionen $C^\infty(M)$ auf $M$ bestimmt und andererseits, bei genügend detailierter Kenntnis der Funktionen $C^\infty(M)$, aus diesen rekonstruiert werden kann.

Dadurch vermeidet man, über die komplizierte Differentialgeometrie von $M$ zu sprechen, und kann sich vielmehr den einfacheren algebraischen Eigenschaften von $C^\infty(M)$ zuwenden. Daß man bei diesem Vorgehen auch alle geometrischen Eigenschaften von $M$ in $C^\infty(M)$ in algebraischer Form wiederfindet, bedarf prinzipiell einer eingehenden Rechtfertigung, auf die hier aber verzichtet werden soll.

### 2.2.1 Quantenmechanik: Version II

In dieser zweiten Version einer Formulierung der Quantenmechanik sollen, ausgehend von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die Eigenschaften einer Observablenalgebra, ihrer Zustände und Zeitentwicklung axiomatisiert werden, um von der speziellen Realisierung auf einem Hilbert-Raum zu abstrahieren.

- Als zentrales Objekt eines quantenmechanischen Systems sollen die Observablen angesehen werden. Wie im „Beispiel" $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ fordert man, daß die Observablen die algebraische Struktur einer *assoziativen Algebra* $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ über den komplexen Zahlen besitzen. Wie bereits dargelegt, ist aufgrund der Unschärferelationen zu erwarten, daß $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ *nichtkommutativ* ist. Um wie in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *Hermitesche* Elemente, die den im eigentlichen Sinne observablen Größen entsprechen sollen, auszeichnen zu können, benötigt man eine *$^*$-Involution*. Dies ist eine antilineare Abbildung $A \mapsto A^*$, welche die Eigenschaften

  $$(AB)^* = B^*A^* \quad \text{und} \quad (A^*)^* = A \tag{2.6}$$

  erfüllt. Im Falle von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist $A^*$ gerade der zu $A$ adjungierte Operator. Eine derartige $^*$-Involution erlaubt es, die üblichen Begriffe aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ auf den abstrakteren Fall $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ zu übertragen: ein Algebraelement heißt *Hermitesch*, wenn $A = A^*$, *isometrisch*, wenn $U^*U = \mathbb{1}$, *unitär*, wenn $U^* = U^{-1}$, und *Projektor*, wenn $P^* = P = P^2$.

  Damit ist $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ also eine *nichtkommutative $^*$-Algebra*. Weitere topologische Eigenschaften, wie beispielsweise das Vorhandensein einer $C^*$-Norm wie in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, sollen zunächst außer acht gelassen werden, womit man auch $^*$-Algebren von unbeschränkten Operatoren betrachten kann.

- Die *Zustände* werden nun mit den *Erwartungswertfunktionalen* von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ identifiziert. Hierbei ist ein Erwartungswertfunktional einer $^*$-Algebra ein *normiertes, positives lineares Funktional* $\omega : \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \to \mathbb{C}$, wobei positiv bedeutet, daß

  $$\omega(A^*A) \geq 0 \tag{2.7}$$

  für alle $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$. Normiert bedeutet, daß $\omega(\mathbb{1}) = 1$ gilt. Für den Fall $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}} = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ erfüllen die Funktionale $A \mapsto E_\psi(A)$ wegen

  $$E_\psi(A^*A) = \frac{\langle \psi, A^*A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} = \frac{\langle A\psi, A\psi \rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{\|A\psi\|^2}{\|\psi\|^2} \geq 0 \tag{2.8}$$

  die Positivität (2.7) ebenso wie die Normierungsbedingung. Damit hat man also tatsächlich eine Verallgemeinerung gefunden.

  Dieser Zustandsbegriff erlaubt insbesondere eine einfache Charakterisierung von reinen und gemischten Zuständen. Sind $\omega_1$ und $\omega_2$ Zustände von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ und ist $\lambda \in (0, 1)$, so ist auch die *konvexe Kombination*

  $$\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 \tag{2.9}$$

wieder ein Zustand. Ein Zustand $\omega$ heißt nun *gemischt*, wenn er sich auf nicht-triviale Weise in zwei andere Zustände zerlegen läßt. Ein Zustand heißt *rein*, wenn dies nicht möglich ist. Als Beispiel für gemischte Zustände seien hier die *thermischen Zustände* $\omega : A \mapsto \mathsf{tr}(\varrho A)$ mit $\varrho = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta H}$ erwähnt[2]. Hier ist $\beta$ die inverse Temperatur, $H$ der Hamilton-Operator und $Z$ die Zustandssumme, welche die Normierung $\omega(\mathbb{1}) = 1$ sicherstellt.

**Übungsaufgabe 2.1** *Zeigen Sie, daß $\omega$ gemäß (2.9) ein Zustand ist. Zeigen Sie weiter, daß ein Zustand der Form $A \mapsto \mathsf{tr}(\varrho A)$ mit einem positiven Spurklasse-Operator $\varrho$ mit $\mathsf{tr}\,\varrho = 1$ genau dann ein reiner Zustand ist, wenn $\varrho$ ein Projektor ist. Welche Dimension hat das Bild von $\varrho$ in diesem Fall? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (2.8).*

Ein positives Funktional $\omega : \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \to \mathbb{C}$ ist automatisch *reell*

$$\omega(A^*) = \overline{\omega(A)} \tag{2.10}$$

und erfüllt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$\omega(A^*B)\overline{\omega(A^*B)} \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B). \tag{2.11}$$

**Übungsaufgabe 2.2** *Beweisen Sie (2.10) und (2.11), indem Sie folgende positive quadratische Form $p(z) = \omega((zA + B)^*(zA + B)) \geq 0$ für $z \in \mathbb{C}$ betrachten.*

- Die *möglichen Meßwerte* einer Observablen $A$ sind wieder durch das *Spektrum* $\operatorname{spec}(A)$ gegeben. Um einen physikalisch vernünftigen Spektralbegriff zu erhalten, ist im allgemeinen mehr als eine $^*$-Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ vorauszusetzen. Zunächst soll das Spektrum einer Observable $A$ intrinsisch definiert sein, also aus den algebraischen Relationen in $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ folgen und nicht von der Wahl eines Zustandes etc. abhängen. Nimmt man $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ als Beispiel, so wären

  - ▶ $\operatorname{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ für alle $A = A^*$,
  - ▶ $\operatorname{spec}(A^*A) \subseteq \mathbb{R}^+$ für alle $A$,
  - ▶ $\operatorname{spec}(p(A)) = p(\operatorname{spec}(A))$ für alle Polynome $p$

  weitere, natürliche Forderungen an eine Definition von $\operatorname{spec}(A)$. Darüberhinaus sollte für $A = A^*$ durch jeden Zustand $\omega$ ein *Spektralmaß* $d\omega$ auf $\operatorname{spec}(A)$ gegeben sein, so daß

$$\omega(A) = \int_{a \in \operatorname{spec}(A)} a \, d\omega(a) \tag{2.12}$$

  gilt. Für $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist dies gerade die Aussage des (nichttrivialen!) *Spektralsatzes*, siehe beispielsweise [4]. Es zeigt sich, daß ein vernünftiger Spektralbegriff ohne eine $C^*$-Norm nur sehr schwer, wenn überhaupt zu erreichen ist.

  Dieser funktional-analytische Gesichtspunkt, der für eine physikalische Interpretation unerläßlich ist, soll jedoch im folgenden, wie verabredet, nicht weiter berücksichtigt werden. Es soll vielmehr angenommen werden, daß $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ sich in eine $C^*$-Algebra einbetten läßt, so daß man einen guten Spektralbegriff zur Verfügung hat. Wie dies zu geschehen hat, wird typischerweise stark vom jeweiligen Beispiel abhängen, so daß hier wenig allgemeine Aussagen gemacht werden können.

[2]Hierfür ist sicherzustellen, daß $\varrho$ ein positiver Spurklasse-Operator mit $\mathsf{tr}\,\varrho = 1$ ist. Dies impliziert insbesondere, daß das Spektrum von $H$ diskret, nach unten beschränkt und von einem bestimmten Wachstum ist.

- Für die *Zeitentwicklung* betrachtet man für den Fall $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ zunächst das *Heisenberg-Bild*, also die *Heisenberg-Gleichung*

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, A(t)] \tag{2.13}$$

für eine Kurve $t \mapsto A(t)$ von Observablen. Deren Lösung ist durch

$$A(t) = U_t^* A(0) U_t \tag{2.14}$$

gegeben, wobei $U_t$ eine 1-*Parametergruppe* von unitären Operatoren $U_t \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist, welche der *Schrödinger-Gleichung*

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt}U_t = H U_t \tag{2.15}$$

genügt[3]. Der Begriff unitäre 1-Parametergruppe bedeutet, daß

$$U_0 = \mathsf{id}, \quad U_t U_s = U_{t+s} = U_s U_t \quad \text{und} \quad U_t^* = U_{-t} = (U_t)^{-1} \tag{2.16}$$

gilt. Der algebraische Gehalt von (2.14) läßt sich nun folgendermaßen fassen: Man betrachtet die Abbildung $\Phi_t : \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \to \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$, wobei

$$\Phi_t(A) = U_t^* A U_t. \tag{2.17}$$

Dies definiert eine 1-Parametergruppe von $^*$-*Automorphismen* von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$. Es gilt also wieder die Eigenschaft einer 1-Parametergruppe

$$\Phi_0 = \mathsf{id} \quad \text{und} \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} = \Phi_s \circ \Phi_t, \tag{2.18}$$

und jedes $\Phi_t$ ist ein $^*$-Automorphismus, denn es gilt für $z, w \in \mathbb{C}$ und $A, B \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$

$$\Phi_t(zA + wB) = z\Phi_t(A) + w\Phi_t(B), \quad \Phi_t(AB) = \Phi_t(A)\Phi_t(B) \quad \text{und} \quad \Phi_t(A^*) = (\Phi_t(A))^*. \tag{2.19}$$

Damit ist die quantenmechanische Zeitentwicklung also eine 1-Parametergruppe von $^*$-Automorphismen der Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$. Im allgemeinen wird $\Phi_t$ aber von komplizierterer Form als (2.17) sein.

**Übungsaufgabe 2.3** *Verifizieren Sie* (2.18) *und* (2.19) *für das Beispiel* (2.17)*.*

### 2.2.2 Klassische Mechanik: Version II

Die zugrundeliegende geometrische Struktur eines allgemeineren Phasenraumes, wie er typischerweise als reduzierter Phasenraum auftritt, ist die einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* $M$. Grob gesprochen handelt es sich bei einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit um ein geometrisches Gebilde, welches lokal wie ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^m$ aussieht und demnach auch *lokale Koordinaten* zuläßt. Global kann es allerdings eine kompliziertere Geometrie besitzen. Als Beispiel sei hier die Erdoberfläche (eine 2-Sphäre) und der Fahrradschlauch (ein 2-Torus) genannt, siehe Abbildung 2. Wichtig ist nun, daß man nach wie vor einen Begriff von „Differenzierbarkeit“ für Funktionen $f : M \to \mathbb{C}$ hat.

[3]Auch hier sind einige analytische Aspekte zu präzisieren: Gleichung (2.15) ist im Sinne der starken Topologie zu verstehen, denn dann gilt der Satz von Stone, daß $U_t$ genau dann eine in $t$ stark-stetige 1-Parametergruppe von unitären Abbildungen ist, wenn $H$ ein selbstadjungierter Operator ist, siehe beispielsweise [25, Sect. VIII.4]

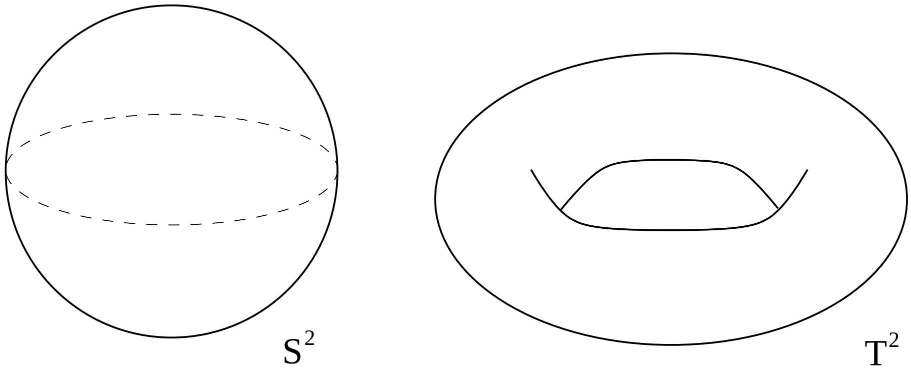


Abbildung 2: Zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten: Sphäre und Torus.

- Als *Observablen* nimmt man nach wie vor die glatten komplexwertigen Funktionen $C^\infty(M)$ auf $M$. Diese bilden eine *kommutative assoziative* $^*$*-Algebra*, wobei das Produkt von $f, g \in C^\infty(M)$ punktweise

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad x \in M, \tag{2.20}$$

erklärt ist, und die $^*$-Involution durch die komplexe Konjugation

$$(f^*)(x) = \overline{f(x)}, \qquad x \in M, \tag{2.21}$$

gegeben ist. Durch diese scheinbar „unnötige“ Hinzunahme komplexwertiger Funktionen ist eine größere strukturelle Ähnlichkeit mit der quantenmechanischen Observablenalgebra erreicht.

Damit $M$ die Interpretation eines Phasenraumes zuläßt, benötigt man eine weitere Struktur, die *Poisson-Klammer* $\{f, g\}$. Dies ist eine bilineare Verknüpfung von glatten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- ▶ *Antisymmetrie:* $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
- ▶ *Leibniz-Regel:* $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.
- ▶ *Jacobi-Identität:* $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer solchen Poisson-Klammer heißt entsprechend auch *Poisson-Mannigfaltigkeit.* Man kann zeigen, daß in lokalen Koordinaten $(x^1, \dots, x^m)$ die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ von der Gestalt

$$\{f, g\}(x) = \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial g}{\partial x^j}(x) \tag{2.22}$$

ist, wobei $\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}$ lokale Funktionen sind, welche die quadratische partielle Differentialgleichung

$$\sum_{l=1}^{m} \left( \alpha^{il} \frac{\partial \alpha^{jk}}{\partial x^l} + \alpha^{jl} \frac{\partial \alpha^{ki}}{\partial x^l} + \alpha^{kl} \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^l} \right) = 0 \tag{2.23}$$

für $i, j, k = 1, \dots, m$ erfüllen.

**Übungsaufgabe 2.4** *Zeigen Sie, daß (2.23) äquivalent zur Jacobi-Identität ist.*

Als letzte Eigenschaft der Poisson-Klammer hat man ihre *Realität.* Es gilt

$$\overline{\{f, g\}} = \{\overline{f}, \overline{g}\}, \tag{2.24}$$

was mit $\overline{\alpha^{ij}} = \alpha^{ij}$ gleichbedeutend ist.

Die Poisson-Klammer heißt *symplektisch*, wenn die Matrix $(\alpha^{ij}(x))$ an jedem Punkt $x \in M$ invertierbar ist. In diesem Fall nennt man die Poisson-Mannigfaltigkeit eine *symplektische Mannigfaltigkeit.* Für die klassische Mechanik ist dies der wichtigste Fall.

**Übungsaufgabe 2.5** *Zeigen Sie, daß für $M = \mathbb{R}^{2n}$ die* kanonische Poisson-Klammer

$$\{f, g\} = \sum_{r=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial q^r} \frac{\partial g}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r} \frac{\partial g}{\partial q^r} \right) \tag{2.25}$$

*die obigen Axiome tatsächlich erfüllt und bestimmen Sie die Funktionen $\alpha^{ij}$. Zeigen Sie so, daß diese Poisson-Klammer symplektisch ist.*

Eine kommutative assoziative Algebra $\mathcal{A}$ mit einer Poisson-Klammer heißt *Poisson-Algebra.* Ist $\mathcal{A}$ zudem eine $^*$-Algebra und sind $^*$-Involution und Poisson-Klammer wie in (2.24) miteinander verträglich, so nennt man $\mathcal{A}$ eine *Poisson-$^*$-Algebra.* Damit gelangt man also schließlich zu folgender Formulierung: die Observablen der klassischen Mechanik bilden eine Poisson-$^*$-Algebra $\mathcal{A}_{\text{klass}}$. Diese Charakterisierung geht weit über die klassische Mechanik hinaus und kann als wesentliches Strukturmerkmal der Observablen einer jeden klassischen Theorie angesehen werden.

- Für die Beschreibung der *Zustände* bieten sich folgende Möglichkeiten an. Wie bereits diskutiert entsprechen die reinen Zustände gerade den Punkten des Phasenraumes $M$. Andererseits ist die Charakterisierung von Zuständen von $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ auch über positive Funktionale möglich, da $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ ja eine $^*$-Involution besitzt. Dies erweist sich als konsistent, denn die Punkte $x$ von $M$ lassen sich mit den $\delta$-Funktionalen $\delta_x : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ identifizieren, welche wegen

$$\delta_x(\overline{f} f) = \overline{f(x)} f(x) \geq 0 \tag{2.26}$$

positive Funktionale sind. Damit ist die zweite Charakterisierung eine Verallgemeinerung der ersten. Darüberhinaus gibt es weitere positive Funktionale, welche durch Integration bezüglich anderer Maße $d\mu$ als den Punktmaßen (= $\delta$-Funktionale) erhalten werden, also

$$f \mapsto \int_M f \, d\mu. \tag{2.27}$$

Insbesondere erhält man *thermodynamische Zustände* mit der Integrationsdichte $\frac{1}{Z} \mathrm{e}^{-\beta H}$. Der Rieszsche Darstellungssatz, siehe beispielsweise [26, S. 40] und [12, App. B], besagt, daß man durch geeignete Integrationen bereits alle positiven Funktionale von $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ erhält: *Die positiven Funktionale von $C^\infty(M)$ sind durch positive Borel-Maße auf $M$ (mit kompaktem Träger) gegeben.*

**Übungsaufgabe 2.6** *Zeigen Sie, daß die reinen Zustände gerade die $\delta$-Funktionale sind, alle anderen Zustände sind gemischt.*

- Die *Zeitentwicklung* läßt sich schließlich auf folgende Weise algebraisch beschreiben. Zunächst bestimmt eine Hamilton-Funktion $H$ über die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen[4] zu gegebener Anfangsbedingung $x(0) = x \in M$ eine Lösungskurve $t \mapsto x(t)$. Man definiert nun die *Flußabbildung* $F_t : M \to M$ dadurch, daß $F_t$ einen Punkt $x \in M$ auf den Punkt $x(t)$ abbildet, wobei die Kurve $x(t)$ diejenige Lösungskurve mit $x(0) = x$ ist, also

$$F_t(x) = x(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = x. \tag{2.28}$$

Die Flußabbildung hat nun wieder die Eigenschaft einer 1-Parametergruppe[5]

$$F_0 = \mathsf{id} \quad \text{und} \quad F_t \circ F_s = F_{t+s} = F_s \circ F_t. \tag{2.29}$$

Ist $f$ nun eine Observable, so definiert man $\phi_t(f) : M \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi_t(f) := f \circ F_t \tag{2.30}$$

und erhält dadurch für alle $t$ wieder eine Observable. Es gilt also

$$(\phi_t(f))(x) = f \circ F_t(x) = f(x(t)). \tag{2.31}$$

Damit erhält man also als Zeitentwicklung zu jeder Observablen $f$ eine Kurve $t \mapsto f(t) = \phi_t(f)$ von Observablen mit $f(0) = f$. Folgende Eigenschaften der Zeitentwicklung $\phi_t$ lassen sich direkt von (2.29) und (2.30) ablesen. Es gilt

$$\phi_0(f) = f \quad \text{und} \quad \phi_t(\phi_s(f)) = \phi_{t+s}(f) = \phi_s(\phi_t(f)) \tag{2.32}$$

sowie

$$\phi_t(zf + wg) = z\phi_t(f) + w\phi_t(g), \quad \phi_t(fg) = \phi_t(f)\phi_t(g) \quad \text{und} \quad \phi_t(\overline{f}) = \overline{\phi_t(f))}. \tag{2.33}$$

Man vergleiche dies mit den Gleichungen (2.18) und (2.19)! Da die Zeitentwicklung von den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen herrührt, läßt sich darüberhinaus zeigen, daß

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\{H, f(t)\} \tag{2.34}$$

und

$$\phi_t(\{f, g\}) = \{\phi_t(f), \phi_t(g)\} \tag{2.35}$$

gilt. Gleichung (2.34) kann als „infinitesimale Version" der Zeitentwicklung gedeutet werden und ist offenbar das direkte Analogon zur Heisenbergschen Bewegungsgleichung (2.13). Gleichung (2.35) besagt, daß $\phi_t$ auch mit der Poisson-Klammer verträglich ist.

Faßt man diese Eigenschaften von $\phi_t$ zusammen, so erhält man das Resultat, daß die klassische Zeitentwicklung $\phi_t$ eine 1-Parametergruppe von *Poisson-$^*$-Automorphismen* der Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ ist.

[4]Hierzu ist noch anzumerken, daß auf einer Poisson-Mannigfaltigkeit eine geometrische Version von (2.2) existiert, die also nicht von den speziell gewählten Koordinaten abhängt.

[5]Da die Kurven $t \mapsto x(t)$ durch eine Differentialgleichung mit glatten Koeffizienten definiert werden, hängt $F_t(x)$ auf glatte Weise von $x$ ab. Damit sind die $F_t$ also nicht nur Bijektionen sondern sogar *Diffeomorphismen* von $M$.

### 2.2.3 Zusammenfassung: Bisherige Strukturen

Nach dieser eingehenden Analyse findet man also, daß der wesentliche strukturelle Unterschied von klassischer Mechanik und Quantenmechanik die *Nichtkommutativität* der quantenmechanischen Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ ist, während die klassische Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ zwar kommutativ ist, dafür aber eine zusätzliche Struktur, die *Poisson-Klammer*, besitzt, siehe Tabelle 1. Es ist auch klar geworden, daß die Observablenalgebra in beiden Fällen als das fundamentale Objekt angesehen werden sollte, da sich die Zustände als daraus resultierend erweisen: Kennt man die $^*$-Algebra $\mathcal{A}$ so kennt man auch ihre positiven Funktionale.

| | klassisch | QM |
|---|---|---|
| Observablen | Poisson-$^*$-Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ (kommutativ) | $^*$-Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ (nichtkommutativ) |
| Zustände | positive Funktionale von $\mathcal{A}$ | |
| Zeitentwicklung | 1-Parametergruppe von Automorphismen von $\mathcal{A}$ | |
| infinitesimal | $\frac{d}{dt}f(t) = -\{H, f(t)\}$ | $\frac{d}{dt}A(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, A(t)]$ |

Tabelle 1: Ausgangspunkt des Quantisierungsproblems.

## 2.3 Die Problemstellung: Quantisierung

Was will man nun mit „Quantisierung“ erreichen? Zunächst einmal macht man die alltägliche Beobachtung, daß die klassische Mechanik die Wirklichkeit in großen Bereichen außerordentlich gut beschreibt, also keineswegs „falsch“ ist. Dieses Phänomen des *klassischen Limes* aus der Quantenmechanik heraus zu erklären, ist sowohl konzeptuell als auch technisch schwierig. Es sei hier auf die anderen Beiträge zur Sommerschule verwiesen.

Nach all unserem heutigen Verständnis ist die Quantentheorie aber die fundamentalere, umfassendere Beschreibung der Natur. Versteht man „Quantisierung“ also als „Übergang“ von klassischer Physik zur Quantenphysik, so handelt es sich dabei *nicht* um ein physikalisches Phänomen: Die Welt *ist* vielmehr bereits quantisiert, und die Quantisierung ist lediglich der Versuch, eine quantentheoretische Beschreibung aus der klassischen, uns bekannten Beschreibung zu konstruieren. Wir (die Physiker) sind scheinbar nicht in der Lage, *a priori* und *intrinsisch* eine Quantentheorie beispielsweise des Standardmodells oder der Gravitation zu formulieren. Vielmehr wird immer von einem klassischen Analogon ausgegangen, obwohl man annehmen sollte, daß eine a priori quantenmechanische Beschreibung möglich sei, da es sich ja um die fundamentalere Theorie handelt.

Ich möchte mich nun aber nicht in philosophische Spekulationen verlieren, warum dies so ist, sondern es auf pragmatische Weise zur Kenntnis nehmen und „das Beste daraus machen“. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, daß es sich beim „inversen Problem“ des klassischen Limes um ein tatsächliches physikalisches Phänomen handelt.

Konkret soll Quantisierung also bedeuten, daß man aus der Kenntnis der klassischen Beschreibung eines physikalischen Systems dessen quantenmechanische Beschreibung (re-)konstruiert. Nach der Analyse in Abschnitt 2.2 kommt der Observablenalgebra hier die Schlüsselrolle zu: Quantisierung soll also in erster Linie ein Verfahren sein, $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ aus $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ zu konstruieren. Dabei wird zunächst nicht klar sein, ob ein solches Unterfangen überhaupt, und wenn ja, auf welche und wieviele Weisen zum Erfolg führen wird.

Die folgenden *Anforderungen* an eine derartige Konstruktion sollen nicht als strenge Axiomatik sondern als Anregung und Motivation verstanden werden. In konkreten Beispielen finden sich typischerweise weitere Anforderungen und Möglichkeiten, diese genauer zu fassen.

- Die quantenmechanische Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ soll „genauso groß" wie die klassische Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ sein. Klassische Observablen sind der klassische Limes von Quantenobservablen, weshalb es nicht mehr klassische Observablen als Quantenobservablen geben kann. Gibt es andererseits Quantenobservablen, die kein klassisches Analogon haben, so ist das Verfahren der Quantisierung für ein derartiges System entweder zum Scheitern verurteilt, oder aber die klassische Beschreibung muß überdacht und verfeinert werden.

  Als Beispiel sei hier der Spin genannt: dieser hat kein unmittelbares klassisches Analogon, es sei denn, man formuliert ein Elektron mit Spin bereits klassisch im Rahmen einer „Supermechanik" und quantisiert diese. Ein derartiges Vorgehen ist durchaus möglich.

  Die *Korrespondenz* von klassischen und quantenmechanischen Observablen soll weiterhin hinreichend explizit sein, damit man die physikalische Bedeutung der Algebraelemente in $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ durch Vergleich mit den korrespondierenden Algebraelementen in $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ erhalten kann. Da letztere als Funktionen auf dem Phasenraum realisiert sind, ist ihre physikalische Bedeutung als unmittelbar klar anzunehmen.

- Hat man $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ konstruiert, so soll jeder Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ als klassischer Limes eines Zustandes von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ auftreten. Da die quantenmechanische Beschreibung die fundamentalere ist, erscheint diese Konsistenzforderung plausibel und notwendig. Die Natur des klassischen Limes von Zuständen gilt es natürlich zu klären, bevor eine derartige Aussage sinnvoll überprüft werden kann.

- Die quantenmechanischen Observablen $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ sollen in einem zu präzisierenden Sinne im klassischen Limes auf $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ führen. Insbesondere erwartet man, daß für korrespondierende klassische und quantenmechanische Observablen im klassischen Limes $\rightsquigarrow$

  $$\hat{A}^* \rightsquigarrow A^*, \quad \hat{A}\hat{B} \rightsquigarrow AB \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \rightsquigarrow \{A, B\} \tag{2.36}$$

  gilt. Die Poisson-Klammer von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ wird unter diesem *Korrespondenzprinzip* als „Schatten" der quantenmechanischen Nichtkommutativität gesehen. Man beachte, daß die Poisson-Klammer in der klassischen Mechanik tatsächlich *dimensionsbehaftet* ist und die Dimension einer inversen Wirkung hat, während der Kommutator dimensionslos ist. Deshalb ist das Korrespondenzprinzip in dieser Form von den physikalischen Dimensionen gesehen konsistent.

- Die Nichtkommutativität von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ als Manifestation der Unschärferelationen wird durch die Größe des Planckschen Wirkungsquantums $\hbar$ kontrolliert. Insbesondere ist der klassische Limes $\rightsquigarrow$ in (2.36) so zu verstehen, daß typische Wirkungen des Systems groß gegen $\hbar$ sind. Intuitiv wird der klassische Limes daher als „$\hbar \to 0$" geschrieben. Vor einer zu naiven Verwendung von „$\hbar \to 0$" sie hier jedoch gewarnt: $\hbar$ ist eine dimensionsbehaftete universelle Naturkonstante, deren Wert nicht geändert werden kann und deren „Größe" nur *relativ* zu anderen, systemabhängigen Wirkungen beurteilt werden kann.

- Die Existenz des klassischen Limes zeigt, daß die Korrekturen, die man anbringen muß, um von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ nach $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ zu gelangen, überschaubar und eventuell sogar klein sein sollten: Es bedarf durchaus sorgfältiger und präziser Messungen, um Quanteneffekte überhaupt zu beobachten. Dies wird später im Begriff der *Deformation algebraischer Strukturen* umgesetzt.

- $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ soll einen physikalisch vernünftigen Spektralbegriff zulassen, sich also beispielsweise in eine $C^*$-Algebra einbetten lassen.

- $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ soll möglichst *explizit* aus $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ *konstruiert* werden, ansonsten ist das eigentlich Ziel von „Quantisierung" verfehlt.

- Der Übergang von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ nach $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ soll konzeptuell klar erfolgen. Es soll eine klare Trennung von beispielabhängigen und unabhängigen Zügen möglich sein. Die notwendigen ad-hoc Annahmen und ihre Auswirkungen sollen kontrollierbar sein, um die auftretenden Mehrdeutigkeiten bei der Konstruktion überschaubar zu machen.

# 3 Von kanonischer Quantisierung zu Sternprodukten

## 3.1 Kanonische Quantisierung und Ordnungsvorschriften

Als erstes Beispiel untersucht man den flachen Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ mit der kanonischen Poisson-Klammer (2.25). Der Einfachheit wegen sei $n = 1$, man hat also die kanonisch konjugierten Koordinatenfunktionen $q$ und $p$ mit der Poisson-Klammer

$$\{q, p\} = 1. \tag{3.1}$$

Kanonische Quantisierung, wie man dies in allen Lehrbüchern der Quantenmechanik [18, 29] finden kann, bedeutet nun, die klassischen Observablen $q$ und $p$ durch quantenmechanische Observablen $Q$ und $P$ zu ersetzen, wobei letztere als *Differentialoperatoren* auf Wellenfunktionen realisiert werden. Um den funktional-analytischen Fragen zunächst auszuweichen, betrachtet man die glatten Funktionen mit kompaktem Träger $C_0^\infty(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$ und definiert die Operatoren $Q, P : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R})$ für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ durch

$$(Q\psi)(q) = q\psi(q) \quad \text{und} \quad (P\psi)(q) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q}(q). \tag{3.2}$$

Dann bilden $Q$ und $P$ die glatten Funktionen mit kompaktem Träger in sich ab und es gilt die Vertauschungsrelation

$$[Q, P] = \mathrm{i}\hbar \mathbb{1}. \tag{3.3}$$

Da dem allgemeinen Konzept nach aber die klassische Observablenalgebra quantisiert werden soll und nicht nur einzelne Observablen, müssen auch die Quantenanaloga zu allgemeineren klassischen Observablen als $q$ und $p$ angegeben werden. Die kleinste Poisson-$^*$-Algebra von Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, die $q$ und $p$ enthält, ist die Polynomalgebra $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2)$. Verwendet man diese als klassische Observablenalgebra, so muß man allen Monomen $q^k p^l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ einen entsprechenden Operator zuordnen. Um dem Korrespondenzprinzip (2.36) Rechnung zu tragen, ist es naheliegend, das gleiche Monom in den entsprechenden $Q$ und $P$ zu verwenden. Hier ergibt sich aber folgendes *Ordnungsproblem*: während in $q^k p^l = p^l q^k$ die Reihenfolge aufgrund der Kommutativität irrelevant ist, spielt die Reihenfolge in $Q^k P^l \neq P^l Q^k$ eine entscheidende Rolle. Es gilt hier also, eine Entscheidung über die Anordnung der Variablen zu treffen, über deren Auswirkung man sich detailiert Gedanken machen muß. Im folgenden werden zwei *Ordnungsvorschriften* exemplarisch vorgestellt und auf ihre Eigenschaften untersucht.

### 3.1.1 Die Standardordnung

Die erste Ordnungsvorschrift, die ich vorstellen will, ist die *Standardordnung*, bei der zuerst alle Impulse nach rechts geschrieben werden, bevor die Ersetzung $q \rightsquigarrow Q$ und $p \rightsquigarrow P$ erfolgt. Man definiert daher die *Standarddarstellung* $\varrho_{\mathrm{S}}$ als Abbildung

$$\varrho_{\mathrm{S}} : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R})) \tag{3.4}$$

der Polynome in die Differentialoperatoren durch

$$\varrho_{\mathrm{S}}(q^k p^l) = Q^k P^l = \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^l q^k \frac{\partial^l}{\partial q^l} \tag{3.5}$$

und setzt $\varrho_{\mathrm{S}}$ linear auf alle Polynome fort. Eine einfache Überlegung zeigt, daß $\varrho_{\mathrm{S}}$ folgendermaßen geschrieben werden kann. Für ein beliebiges Polynom $f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\varrho_{\mathrm{S}}(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r \left.\frac{\partial^r f}{\partial p^r}\right|_{p=0} \frac{\partial^r}{\partial q^r}. \tag{3.6}$$

Die Reihe ist nur eine endliche Summe, wenn $f$ ein Polynom in $p$ ist, da dann alle Ableitungen der Ordnung $r$ verschwinden, sobald $r$ größer als der Grad in $p$ ist. Zur Verifikation von (3.6) rechnet man $\varrho_{\mathrm{S}}(q^k p^l)$ direkt aus und erhält wie gewünscht

$$\varrho_{\mathrm{S}}(q^k p^l) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r \left.\frac{\partial^r (q^k p^l)}{\partial p^r}\right|_{p=0} \frac{\partial^r}{\partial q^r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r l!\, \delta_{rl}\, q^k \frac{\partial^r}{\partial q^r} = \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^l q^k \frac{\partial^l}{\partial q^l}. \tag{3.7}$$

Aus Gleichung (3.6) sieht man, daß die Standarddarstellung $\varrho_{\mathrm{S}}$ immer noch wohldefiniert ist, wenn die Funktion $f$ nur in den Impulsen $p$ polynomial ist und eine beliebige glatte Abhängigkeit von den Orten $q$ aufweist. Diese nur in $p$ polynomialen glatten Funktionen werden mit $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ bezeichnet[6]. Man beachte, daß $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ tatsächlich eine Poisson-$^*$-Algebra ist. Auf diese Weise erhält man also eine Abbildung

$$\varrho_{\mathrm{S}} : \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R}) \to \mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R})) \tag{3.8}$$

in die Differentialoperatoren auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit glatten Koeffizienten.

**Lemma 3.1** *Die Standarddarstellung* (3.8) *ist bijektiv.*

Der Beweis dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der expliziten Form (3.6). Damit erhält man also tatsächlich die gewünschte Korrespondenz von klassischen und quantenmechanischen Observablen. In der Mathematik ist dieser Sachverhalt unter dem Stichwort *Symbolkalkül für Differentialoperatoren* bekannt.

Dennoch ist die Standarddarstellung $\varrho_{\mathrm{S}}$ aus einem anderen Grund physikalisch *unbefriedigend*. Dazu betrachtet man die $^*$-Involutionen von $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ und $\mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$. Letztere Algebra besitzt eine natürliche $^*$-Involution, welche man durch Operatoradjunktion erhält. Hierfür verwendet man das übliche $L^2$-Skalarprodukt

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(q)} \phi(q)\, dq \tag{3.9}$$

[6] Diese Notation hat einen differentialgeometrischen Ursprung: Hier faßt man $\mathbb{R}^2$ als Kotangentenbündel $T^*\mathbb{R}$ des Konfigurationsraumes $\mathbb{R}$ auf, siehe auch Abschnitt 3.2.2

für Funktionen $\psi, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Die glatten Funktionen mit kompaktem Träger werden damit zu einem Prä-Hilbert-Raum, dessen Vervollständigung der Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ist. Solange man sich auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$ beschränkt, ist die Definition des adjungierten Operators zu $\varrho_{\mathrm{S}}(f)$ unproblematisch: er kann mittels partieller Integration einfach ausgerechnet werden. Dazu betrachte ich zunächst eine Funktion der Form $f(q,p) = f_r(q)p^r$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $f_r \in C^\infty(\mathbb{R})$ beliebig. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle \psi, \varrho_{\mathrm{S}}(f)\phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(q)} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r f_r(q) \frac{\partial^r \phi}{\partial q^r}(q)\, dq \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r \frac{\partial^r}{\partial q^r} \left(\psi(q)\overline{f_r(q)}\right)}\, \phi(q)\, dq \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \frac{\partial^s \overline{f_r}}{\partial q^s}(q)\, \frac{\partial^{r-s}\psi}{\partial q^{r-s}}(q)}\, \phi(q)\, dq \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\varrho_{\mathrm{S}}\left(\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s \overline{f_r}}{\partial q^s}\, p^{r-s}\right)\psi\right)(q)}\, \phi(q)\, dq.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Damit gilt also für den zu $\varrho_{\mathrm{S}}(f_r p^r)$ adjungierten Operator

$$
\varrho_{\mathrm{S}}(f_r(q)p^r)^\dagger = \varrho_{\mathrm{S}}\left(\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s \overline{f_r}}{\partial q^s} p^{r-s}\right). \tag{3.11}
$$

Um diesen Ausdruck weiter vereinfachen zu können, definiert man folgenden Operator

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \tag{3.12}
$$

und

$$
N = \mathrm{e}^{\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\right)^s \Delta^s \tag{3.13}
$$

als Operator auf $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$. Man beachte, daß $N$ tatsächlich wohldefiniert ist, da für jedes $f \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ in $N(f)$ nur endlich viele Terme in der Summe (3.13) beitragen, weil $\Delta^s f = 0$, sobald $s$ größer als der Polynomgrad in $p$ wird.

Sei nun $f(q,p) = f_r(q)p^r$ wie in (3.11), dann gilt

$$
\begin{aligned}
N^2 \overline{f} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \Delta^s \overline{f} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s \overline{f_r}}{\partial q^s} \frac{\partial^s p^r}{\partial p^s} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s \overline{f_r}}{\partial q^s} \frac{r!}{(r-s)!} p^{r-s},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

womit man die wichtige Gleichung

$$
\varrho_{\mathrm{S}}(f)^\dagger = \varrho_{\mathrm{S}}(N^2 \overline{f}) \tag{3.15}
$$

bewiesen hat. Aufgrund der Linearität von (3.15) gilt diese Beziehung für alle $f \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$. Damit sieht man insbesondere, daß zu reellwertigem $f = \overline{f}$ *kein* Hermitescher Operator gehört, da im allgemeinen $\varrho_{\mathrm{S}}(f) \neq \varrho_{\mathrm{S}}(N^2 f)$. Die klassische und die quantenmechanische $^*$-Involutionen sind also *nicht* kompatibel.

### 3.1.2 Die Weyl-Ordnung

Diese unphysikalische Eigenschaft der Standardordnung läßt sich mit Hilfe des Operators $N$ nun leicht beheben. Man definiert dazu die *Weyl-Darstellung*

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f) = \varrho_{\mathrm{S}}(Nf) \tag{3.16}$$

für $f \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$. Ausgeschrieben gilt also

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^r \left.\frac{\partial^r (Nf)}{\partial p^r}\right|_{p=0} \frac{\partial^r}{\partial q^r}, \tag{3.17}$$

aufgefaßt als Differentialoperator auf $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Da $N = \mathrm{e}^{\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\Delta}$ auf $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ invertierbar ist, ist auch $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$ eine lineare Bijektion von $\mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ nach $\mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$. Mit einigen kombinatorischen Überlegungen kann man nun zeigen, daß für ein Polynom $f(q,p) = q^k p^l$ die Weyl-Darstellung $\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f)$ das entsprechende *vollständig symmetrisierte Polynom* in den Operatoren $Q$ und $P$ ist, also beispielsweise

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(q^2 p) = \frac{1}{3}(Q^2 P + QPQ + PQ^2) = -\mathrm{i}\hbar q^2 \frac{\partial}{\partial q} - \mathrm{i}\hbar q. \tag{3.18}$$

Diese Ordnungsvorschrift wird auch als *Weyl-Ordnung* bezeichnet. Darüberhinaus gilt nun mit (3.15) und (3.16)

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f)^\dagger = \varrho_{\mathrm{S}}(Nf)^\dagger = \varrho_{\mathrm{S}}(N^2 \overline{Nf}) = \varrho_{\mathrm{S}}(N^2 N^{-1} \overline{f}) = \varrho_{\mathrm{S}}(N\overline{f}) = \varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{f}), \tag{3.19}$$

womit die klassische $^*$-Involution mit der quantenmechanischen übereinstimmt.

Um nun die anderen Anforderungen an eine Quantisierung zu überprüfen, müßte man insbesondere das Korrespondenzprinzip (2.36) genauer untersuchen. Dies stelle ich hier als Übungsaufgabe, da ich im folgenden einen anderen Weg einschlagen will, der auf die Definition von Sternprodukten führt.

**Übungsaufgabe 3.2** *Sei $f, g \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$. Berechnen Sie dann $\varrho_{\mathrm{S}}(fg)$ und $\varrho_{\mathrm{S}}(f)\varrho_{\mathrm{S}}(g)$ sowie $\varrho_{\mathrm{S}}(\{f,g\})$ und $\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\varrho_{\mathrm{S}}(f), \varrho_{\mathrm{S}}(g)]$ und vergleichen Sie. Was fällt auf? Sie können die gleiche Rechnung auch für die Weyl-Ordnung durchführen.*

## 3.2 Die ersten Sternprodukte

### 3.2.1 Das standardgeordnete Sternprodukt und das Weyl-Produkt

Die folgende *Idee* ist eigentlich denkbar einfach, eröffnet aber ungeahnte Möglichkeiten, den Begriff der Quantisierung präziser zu formulieren. Beide Ordnungsvorschriften $\varrho_{\mathrm{S}}$ und $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$ sind lineare Bijektionen von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}} = \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ nach $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}} = \mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$, insbesondere sind $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ und $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ als *Vektorräume* isomorph. Da $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ ein nichtkommutatives Produkt besitzt, kann man diese mit Hilfe von $\varrho_{\mathrm{S}}$ oder $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$ „zurückziehen“ und so $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ mit einen *neuen Produkt* versehen. Konkret definiert man

$$f \star_{\mathrm{S}} g = \varrho_{\mathrm{S}}^{-1}\big(\varrho_{\mathrm{S}}(f)\varrho_{\mathrm{S}}(g)\big) \tag{3.20}$$

und

$$f \star_{\mathrm{Weyl}} g = \varrho_{\mathrm{Weyl}}^{-1}\big(\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f)\varrho_{\mathrm{Weyl}}(g)\big) \tag{3.21}$$

für $f, g \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$. Diese neuen Produkte heißen *standardgeordnetes Sternprodukt*[7] beziehungsweise *Weyl-geordnetes Sternprodukt* oder auch kurz *Weyl-Produkt*. Auch wenn das Weyl-Produkt die physikalisch sinnvollere Wahl darstellt, werde ich zunächst das einfachere standardgeordnete Produkt diskutieren. Zunächst gilt es, eine möglichst konkrete Form für $\star_{\mathrm{S}}$ zu finden. Dazu betrachtet man wieder Funktionen $f(q,p) = f_k(q)p^k$ und $g(q,p) = g_l(q)p^l$ mit $k, l \in \mathbb{N}$ und $f_k, g_l \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{S}}(f)\varrho_{\mathrm{S}}(g) &= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^{k+l} f_k \frac{\partial^k}{\partial q^k} g_l \frac{\partial^l}{\partial q^l} \\
&= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^{k+l} f_k \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \frac{\partial^s g_l}{\partial q^s} \frac{\partial^{l+k-s}}{\partial q^{l+k-s}} \\
&= \varrho_{\mathrm{S}}\left(\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s f_k p^{k-s} \frac{\partial^s g_l}{\partial q^s} p^l\right) \\
&= \varrho_{\mathrm{S}}\left(\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s}{\partial p^s}(f_k p^k) \frac{\partial^s}{\partial q^s}(g_l p^l)\right) \\
&= \varrho_{\mathrm{S}}\left(\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s f}{\partial p^s} \frac{\partial^s g}{\partial q^s}\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

womit gefolgert werden kann, daß allgemein

$$f \star_{\mathrm{S}} g = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s f}{\partial p^s} \frac{\partial^s g}{\partial q^s} \tag{3.23}$$

gilt. Wieder ist zu bemerken, daß die Reihe nur endlich viele von Null verschiedene Terme enthält, solange die Funktion $f$ polynomial in $p$ ist. Darüberhinaus ist das Resultat offenbar wieder eine in $p$ polynomiale Funktion, wenn sowohl $f$ als auch $g$ polynomial in $p$ sind.

Bevor ich die Eigenschaften von $\star_{\mathrm{S}}$ diskutiere, sei noch auf die entsprechende Formel für $\star_{\mathrm{Weyl}}$ hingewiesen. Mit den Definitionen (3.21) und (3.16) erhält man

$$f \star_{\mathrm{Weyl}} g = \varrho_{\mathrm{Weyl}}^{-1}(\varrho_{\mathrm{Weyl}}(f)\varrho_{\mathrm{Weyl}}(g)) = N^{-1}\varrho_{\mathrm{S}}^{-1}(\varrho_{\mathrm{S}}(Nf)\varrho_{\mathrm{S}}(Ng)) = N^{-1}(Nf \star_{\mathrm{S}} Ng), \tag{3.24}$$

womit der Operator $N$ zwischen $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ vermittelt. Explizit erhält man nach einiger Rechnung die Formel

$$f \star_{\mathrm{Weyl}} g = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\right)^r \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-1)^{r-s} \frac{\partial^r f}{\partial q^s \partial p^{r-s}} \frac{\partial^r g}{\partial q^{r-s} \partial p^s}. \tag{3.25}$$

Auch hier bricht die unendliche Reihe nach endlich vielen Termen ab, wenn $f, g \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$.

[7] Der Name Sternprodukt (eng.: „star product“, franz.: „produit etoile“) bezieht sich tatsächlich nur auf das Symbol $\star$.

**Übungsaufgabe 3.3** *Beweisen Sie* (3.25).

Die folgenden Eigenschaften lassen sich nun leicht aus den expliziten Formeln und den Definitionen herleiten:

**Satz 3.4** *Die Sternprodukte* $\star_{\mathrm{S}}$ *und* $\star_{\mathrm{Weyl}}$ *besitzen folgende Eigenschaften:*

1. *Für* $f, g \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$ *gilt* $f \star_{\mathrm{S}} g,\ f \star_{\mathrm{Weyl}} g \in \mathrm{Pol}(T^*\mathbb{R})$.

2. $\star_{\mathrm{S}}$ *und* $\star_{\mathrm{Weyl}}$ *sind assoziativ*
$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h. \tag{3.26}$$

3. $\star_{\mathrm{S}}$ *und* $\star_{\mathrm{Weyl}}$ *lassen sich als eine Reihe von Bidifferentialoperatoren* $C_r$ *schreiben*
$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r C_r(f,g). \tag{3.27}$$

4. *Es gilt für beide Produkte*
$$f \star g = fg + \cdots \quad \textit{also} \quad C_0(f,g) = fg \tag{3.28}$$
*und*
$$f \star g - g \star f = \mathrm{i}\hbar\{f,g\} + \cdots \quad \textit{also} \quad C_1(f,g) - C_1(g,f) = \mathrm{i}\{f,g\} \tag{3.29}$$
*sowie*
$$1 \star f = f = f \star 1, \tag{3.30}$$
*wobei* $\{f,g\}$ *die kanonische Poisson-Klammer* (2.25) *ist.*

5. *Für das Weyl-Produkt gilt zudem*
$$\overline{f \star_{\mathrm{Weyl}} g} = \overline{g} \star_{\mathrm{Weyl}} \overline{f}. \tag{3.31}$$

**Übungsaufgabe 3.5** *Beweisen Sie diesen Satz.*

In Worte gefaßt erhält man dadurch folgendes Resultat. Die neuen Produkte $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ sind *assoziative* Produkte (Gleichung (3.26)) für $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$. Sie *deformieren* das ursprüngliche Produkt (Gleichung (3.28)) in Richtung der Poisson-Klammer (Gleichung (3.29)). Das Korrespondenzprinzip manifestiert sich also in den Gleichungen (3.28) und (3.29). Für das Weyl-Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ gilt zudem, daß die klassische *-Involution, also die komplexe Konjugation, auch eine *-Involution für $\star_{\mathrm{Weyl}}$ ist, eine Eigenschaft, die für $\star_{\mathrm{S}}$ nicht der Fall ist.

Die Abbildungen $\varrho_{\mathrm{S}}$ beziehungsweise $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$ zeigen weiterhin, daß $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ mit dem Produkt $\star_{\mathrm{S}}$ beziehungsweise $\star_{\mathrm{Weyl}}$ versehen als *assoziative Algebra isomorph* zu $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ ist. Im Falle von $\star_{\mathrm{Weyl}}$ ist dies sogar ein *-Isomorphismus.

Damit motiviert sich folgendes *Deformationsproblem* als konkrete Formulierung des Quantisierungsproblems: Anstatt eine völlig neue Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ aus $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ zu konstruieren, behält man $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ als zugrundeliegenden Vektorraum und ändert lediglich das kommutative Produkt in ein nichtkommutatives Sternprodukt, welches eine Deformation des ursprünglichen sein soll. Es gilt also, diese Ideen im folgenden weiter zu entwickeln.

**Übungsaufgabe 3.6** *Wie sehen die entsprechenden Formeln für* $\varrho_{\mathrm{S}}$, $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$, $N$, $\star_{\mathrm{S}}$ *und* $\star_{\mathrm{Weyl}}$ *im* $\mathbb{R}^{2n}$ *aus?*

### 3.2.2 Erste Verallgemeinerung: Kotangentenbündel als Phasenräume

Die wichtigste Verallgemeinerung des flachen $\mathbb{R}^{2n}$ als Phasenraum für die klassische Mechanik ist die Klasse der *Kotangentenbündel*. Ich möchte nicht näher auf die differentialgeometrischen Details eingehen, sondern motivieren, an welchen Stellen Kotangentenbündel physikalisch bedeutsam sind.

Dazu betrachtet man beispielsweise ein physikalisches System von $N$ Teilchen, die sich im $\mathbb{R}^3$ bewegen. Damit ist der *Konfigurationsraum* ein $\mathbb{R}^{3N}$, eventuell ohne die Koinzidenzpunkte. Der Phasenraum ist entsprechend $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$, wobei der zweite $\mathbb{R}^{3N}$ der Raum der kanonisch konjugierten Impulse ist. Es ist klar, daß sich für diesen Fall $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ verallgemeinern lassen, siehe Übung 3.6.

Nun betrachte man aber die Situation, daß die möglichen *Lagen* der Teilchen *Zwangsbedingungen* unterliegen. Gibt es $f$ unabhängige Zwangsbedingungen, so wird der Konfigurationsraum eine $n = 3N - f$ dimensionale Untermannigfaltigkeit $Q$ des ursprünglichen Konfigurationsraumes $\mathbb{R}^{3N}$ sein. Damit die Teilchen die Zwangsfläche nicht verlassen, erhalten auch ihre Geschwindigkeiten eine Einschränkung: Die Tangente an eine Kurve in $Q$ liegt tangential an $Q$[8]. Zur Beschreibung der zulässigen Orte und Geschwindigkeiten verwendet man daher das *Tangentenbündel* $TQ$ von $Q$. Die differentialgeometrische Konstruktion von $TQ$ kann man sich so vorstellen, daß an jedem Punkt $q \in Q$ der Tangentialraum $T_qQ$ an $Q$ „angeklebt“ wird und demnach seine Lage im umgebenden $\mathbb{R}^{3N}$ vom Fußpunkt $q$ abhängt, siehe Abbildung 3. Die Gesamtheit aller $T_qQ$, $q \in Q$, ist dann der *Geschwindigkeitsphasenraum* $TQ$ der Dimension $2n$.

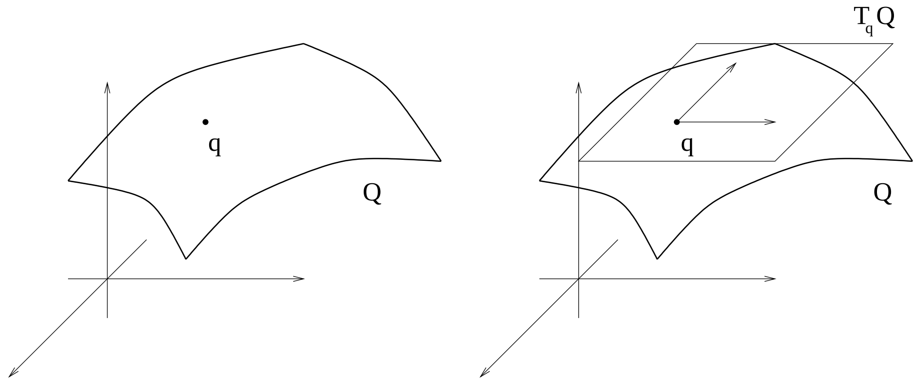


Abbildung 3: Eine Untermannigfaltigkeit $Q \subseteq \mathbb{R}^{3N}$ und der Tangentialraum $T_qQ$ bei $q \in Q$.

Um zum eigentlichen (Impuls-)Phasenraum zu gelangen, führt man eine Legendre-Transformation durch, was geometrisch dem Übergang zum ebenfalls $2n$-dimensionalen *Kotangentenbündel* $T^*Q$ entspricht. Dies wird analog zu $TQ$ konstruiert, nur „klebt“ man nun an jedem Punkt $q \in Q$ den Dualraum $T_q^*Q$ zum Tangentialraum $T_qQ$ an. Es zeigt sich, daß $T^*Q$ eine *kanonische Poisson-Klammer* besitzt und somit $C^\infty(T^*Q)$ zur Poisson-$^*$-Algebra wird.

Anders als im $\mathbb{R}^m$ gibt es auf einer Mannigfaltigkeit $M$ im allgemeinen kein ausgezeichnetes Koordinatensystem mehr. Damit gibt es auch keine sinnvolle Definition von polynomialen Funktionen. Im Falle eines Kotangentenbündels $M = T^*Q$ ist die Situation jedoch etwas *günstiger*. Da zumindest die *Impulsrichtungen* längs der Vektorräume $T_q^*Q$ verlaufen, kann man sinnvoll davon sprechen, daß eine Funktion auf $T^*Q$ *polynomial in den Impulsen* ist. In „Ortsrichtung“ ist dies im allgemeinen nicht möglich. Die glatten und in Impulsrichtung polynomialen Funktionen auf $T^*Q$

[8] Diese scheinbar tautologische Aussage wird in der Differentialgeometrie zur *Definition* des Tangentenbündels über Kurven herangezogen.

werden nun mit $\mathrm{Pol}(T^*Q)$ bezeichnet.

Für ein derartiges klassisches System $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}} = \mathrm{Pol}(T^*Q)$ zeigt sich nun folgendes: Man kann die wesentlichen Schritte bei der Konstruktion von $\varrho_{\mathrm{S}}$, $N$, $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ nahezu wörtlich wiederholen, mit der einzigen Modifikation, daß nun eine *kovariante Ableitung* $\nabla$ benötigt wird. Anstelle der kanonischen Quantisierung von $p_k$ als $P_k = -\mathrm{i}\hbar\partial_k$ ersetzt man nun $p_k$ durch $P_k = -\mathrm{i}\hbar\nabla_k$, wobei die kovariante Ableitung $\nabla$ eine *zusätzliche Wahl* darstellt. Auf diese Weise trägt man der Tatsache Rechnung, daß es keine ausgezeichneten Koordinatensysteme mehr gibt. Darüberhinaus gibt es in physikalischen Beispielen oft eine durch das spezielle Problem bevorzugte Wahl von $\nabla$, so daß diese Wahl einer zusätzlichen Struktur meist leicht getroffen werden kann. Dann steht einer Quantisierung durch ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ nichts mehr im Wege. Die technischen Details dieser sehr *expliziten* Konstruktion finden sich in der Literatur [6–8].

# 4 Deformationsquantisierung

## 4.1 Sternprodukte

### 4.1.1 Allgemeine Definition

Nachdem sich die *Deformation der klassischen Observablenalgebra* als erfolgreiche Herangehensweise bei der Quantisierung herausgestellt hat, soll dieser Begriff nun auf einen soliden mathematischen Boden gestellt werden. Hier werde ich zum einen eine geometrisch motivierte Version, die auf glatten Funktionen einer Poisson-Mannigfaltigkeit basiert, sowie eine allgemeine algebraische Definition geben.

Für die geometrische Situation bemerkt man, daß für eine allgemeine Poisson-Mannigfaltigkeit $M$ in der Regel keine „polynomialen Funktionen“ innerhalb von $C^\infty(M)$ ausgezeichnet werden können. Als klassische Observablenalgebra kommt daher ohne weiteres Detailwissen nur $C^\infty(M)$ in Frage. In konkreteren Beispielen oder gar Beispielklassen wie den Kotangentenbündeln kann es dagegen sehr wohl „gute“ Unteralgebren von $C^\infty(M)$ geben, welche dem Problem der Quantisierung besser angepaßt sind.

Im folgenden soll aber zunächst von $C^\infty(M)$ ausgegangen werden. In diesem Fall jedoch sind bereits die Formeln (3.23) und (3.25) zu überdenken, denn sind $f, g$ beliebige glatte Funktionen, so ist beispielsweise die *Konvergenz* des standardgeordneten Produktes

$$f \star_{\mathrm{S}} g = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^s \frac{\partial^s f}{\partial p^s} \frac{\partial^s g}{\partial q^s} \tag{4.1}$$

im allgemeinen nicht zu garantieren. Schlimmer noch, es lassen sich immer Funktionen $f, g$ finden, so daß bereits in diesem einfachsten Beispiel die Reihe einen Konvergenzradius 0 hat, also nur für $\hbar = 0$ konvergiert.

Deshalb bedient man sich folgenden „Tricks“: Man sucht Sternprodukte $\star$ für $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}} = C^\infty(M)$, welche zwar nur *formale Potenzreihen* in $\hbar$ sind, ansonsten aber alle Eigenschaften von $\star_{\mathrm{S}}$ oder $\star_{\mathrm{Weyl}}$ gemäß Satz 3.4 besitzen. *Anschließend* versucht man, geeignete Unteralgebren zu finden, so daß die formalen Potenzreihen tatsächlich konvergieren. Die Beispiele des $\mathbb{R}^{2n}$ und der Kotangentenbündel zeigen, daß dies hier für die in den Impulsen polynomialen Funktionen möglich ist. Diese Beispiele geben berechtigten Anlaß zu Hoffnung, daß das Verfahren auch in allgemeineren Situationen Erfolg hat und daß sich entsprechende Unteralgebren finden lassen, sobald man mehr Wissen über $M$ zur Verfügung hat. Beispielunabhängig dagegen läßt sich eine solche Unteralgebra von $C^\infty(M)$ nicht auszeichnen, so daß der formale Charakter der Sternprodukte als eine Folge der noch fehlenden, beispielabhängigen Informationen über $M$ anzusehen ist.

Nun sollte folgende Definition eines Sternprodukts nach Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz und Sternheimer durch die vorangegangenen Überlegungen gut motiviert sein:

**Definition 4.1 (Sternprodukte [2])** *Ein Sternprodukt für eine Poisson-Mannigfaltigkeit $M$ ist ein assoziatives Produkt $\star$ für die formalen Potenzreihen von glatten Funktionen $C^\infty(M)[[\lambda]]$ der Form*

$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(f,g) \tag{4.2}$$

*mit folgenden Eigenschaften:*

1. $f \star g = fg + \cdots$, *also* $C_0(f,g) = fg$.
2. $f \star g - g \star f = \mathrm{i}\lambda\{f,g\} + \cdots$, *also* $C_1(f,g) - C_1(g,f) = \mathrm{i}\{f,g\}$.
3. $f \star 1 = f = 1 \star f$, *also* $C_r(f,1) = 0 = C_r(1,f)$ *für* $r \geq 1$.
4. $C_r$ *ist ein Bidifferentialoperator.*

*Das Sternprodukt heißt Hermitesch, falls zusätzlich*

$$\overline{f \star g} = \overline{g} \star \overline{f} \tag{4.3}$$

*gilt.*

Der *formale Parameter* $\lambda$ übernimmt also die Rolle von $\hbar$ und kann durch $\hbar$ ersetzt werden, sobald die Konvergenz von (4.2) sichergestellt ist.

Die *Assoziativität* $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ wird Ordnung für Ordnung in $\lambda$ ausgewertet. Dies liefert folgende Bedingung an die $C_r$: für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Funktionen $f, g, h \in C^\infty(M)$ muß

$$\sum_{r=0}^{k} C_r(f, C_{k-r}(g,h)) = \sum_{r=0}^{k} C_r(C_{k-r}(f,g), h) \tag{4.4}$$

gelten. Gleichung (4.3) ist äquivalent zur Bedingung

$$\overline{C_r(f,g)} = C_r(\overline{g}, \overline{f}) \tag{4.5}$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$.

**Übungsaufgabe 4.2** *Leiten Sie* (4.4) *und* (4.5) *her.*

Der algebraische Grundgedanke der Deformationsquantisierung ist die *Deformationstheorie assoziativer Algebren* nach Gerstenhaber [17]. Will man nicht Bezug auf die geometrische Herkunft der klassischen Observablenalgebra nehmen, so startet man auf klassischer Seite direkt mit einer Poisson-$^*$-Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ und verwendet folgende naheliegende Formulierung für das Quantisierungsproblem:

**Definition 4.3 (Formale Deformationen)**

- *Eine formale Deformation einer beliebigen assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ ist ein assoziatives Produkt $\star$ für die formalen Potenzreihen $\mathcal{A}[[\lambda]]$ mit Werten in $\mathcal{A}$ der Form*

$$A \star B = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(A,B) \tag{4.6}$$

*mit* $C_0(A,B) = AB$ *für* $A, B \in \mathcal{A}$.

- *Eine formale Deformationsquantisierung einer Poisson-Algebra $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ ist eine Deformation $\star$ von $\mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$ mit $C_1(f,g) - C_1(g,f) = \mathrm{i}\{f,g\}$ für $f,g \in \mathcal{A}_{\mathrm{klass}}$.*

- *Eine Hermitesche formale Deformation einer $^*$-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine formale Deformation $\star$ von $\mathcal{A}$, welche $(A \star B)^* = B^* \star A^*$ für $A, B \in \mathcal{A}$ erfüllt.*

Damit ist also der Begriff einer *Hermiteschen formalen Deformationsquantisierung einer Poisson-$^*$-Algebra* erklärt. Diese Definition ist insbesondere auch in Fällen anwendbar, wenn die Geometrie des klassischen Phasenraumes schwierig zu beschreiben ist, aber eine klassische Observablenalgebra bekannt ist. Als Beispiel kann man hier einfache Feldtheorien nennen [14, 15].

### 4.1.2 Existenz und Eindeutigkeit

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob es zu einer gegebenen Poisson-Mannigfaltigkeit auch ein Sternprodukt gibt. Weiter gilt es zu klären, wieviele Möglichkeiten man bei der Konstruktion von Sternprodukten hat, da ja bereits im $\mathbb{R}^2$ mindestens zwei Sternprodukte $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ bekannt sind.

Die Frage der Existenz ist auf sehr zufriedenstellende Weise gelöst und in voller Allgemeinheit positiv zu beantworten:

**Satz 4.4** *Auf jeder Poisson-Mannigfaltigkeit existieren Sternprodukte.*

Der Beweis oder auch nur eine Beweisidee übersteigt den Rahmen dieser Sommerschule bei weitem. Es sei nur gesagt, daß der Fall von symplektischen Poisson-Mannigfaltigkeiten eine wesentliche Vereinfachung darstellt. Hier wurde die Existenz unabhängig von DeWilde und Lecomte [13], Fedosov [16] und Omori, Maeda und Yoshioka [24] gezeigt. Der allgemeine Poisson-Fall war lange unklar, bis Kontsevich 1997 in einer fundamentalen Arbeit der Existenzbeweis gelang [22].

Die Frage nach der Eindeutigkeit ist etwas schwieriger zu formulieren, hat man doch bereits im einfachsten Fall des $\mathbb{R}^{2n}$ mindestens *zwei* Sternprodukte $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$. Hier besteht allerdings folgender Zusammenhang mittels des Operators $N$

$$f \star_{\mathrm{Weyl}} g = N^{-1}(Nf \star_{\mathrm{S}} Ng), \tag{4.7}$$

wobei

$$N = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2\mathrm{i}}\Delta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\lambda}{2\mathrm{i}}\right)^r \Delta^r = \mathsf{id} + \frac{\lambda}{2\mathrm{i}}\Delta + \cdots \tag{4.8}$$

jetzt als formale Potenzreihe von Differentialoperatoren aufgefaßt wird. Damit kann man $N$ als einen *Algebraisomorphismus* von $\star_{\mathrm{Weyl}}$ nach $\star_{\mathrm{S}}$ auffassen, was nicht weiter verwunderlich ist, da doch beide Sternprodukte aus der selben Algebra $\mathrm{Diff}(C_0^\infty(\mathbb{R}))$ konstruiert wurden. Das besondere an $N$ ist nun, daß $N$ in nullter Ordnung von $\lambda$ mit der Identität beginnt: im klassischen Limes reduziert sich dieser Algebraisomorphismus auf die Identität. Einen solchen Operator nennt man *Äquivalenztransformation*, und zwei derart isomorphe Sternprodukte heißen *äquivalent.*

**Definition 4.5** *Seien $\star$ und $\star'$ zwei Sternprodukte für $C^\infty(M)$. Dann heißen $\star$ und $\star'$ äquivalent, falls es eine formale Reihe*

$$S = \mathsf{id} + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r S_r \tag{4.9}$$

*von Differentialoperatoren $S_r$ gibt, so daß*

$$S(f \star' g) = Sf \star Sg \quad \textit{und} \quad S1 = 1 \tag{4.10}$$

*gilt. In diesem Falle heißt $S$ Äquivalenztransformation. Im Falle Hermitescher Sternprodukte fordert man zudem $\overline{Sf} = S\overline{f}$ und nennt $\star$ und $\star'$ entsprechend $^*$-äquivalent.*

**Übungsaufgabe 4.6** *Zeigen Sie, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.*

Man kann nun umgekehrt eine formale Reihe $S$ von Differentialoperatoren nehmen, welche (4.9) erfüllt. Ist dann $\star$ ein Sternprodukt, so *definiert* man $\star'$ durch

$$f \star' g = S^{-1}(Sf \star Sg) \tag{4.11}$$

und erhält wieder ein Sternprodukt, das Hermitesch ist, falls $S$ reell und $\star$ Hermitesch war.

**Übungsaufgabe 4.7** *Verifizieren Sie, daß $\star'$ tatsächlich ein Sternprodukt ist.*

Damit kann man also sehr viele Sternprodukte erzeugen, sobald man eines gefunden hat. Anhand der Konstruktion von $\star_{\mathrm{S}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ erkennt man, daß dies gerade die Wahl einer Ordnungsvorschrift ist, welche nicht eindeutig ist und so zu verschiedenen Sternprodukten führen kann.

Daher kann man den Äquivalenzbegriff also physikalisch als eine Verallgemeinerung der Problematik der Wahl einer Ordnungsvorschrift verstehen. Es ergeben sich also folgende zwei Fragenstellungen:

1. Gibt es eine Klassifikation von Sternprodukte bis auf Äquivalenz, also bis auf die Wahl einer Ordnungsvorschrift?

2. Gibt es eine physikalisch motivierte Wahl eines Sternproduktes $\star$ innerhalb seiner Äquivalenzklasse $[\star]$?

Auf die erste Frage läßt sich eine allgemeine Antwort geben. Die Klassifikation von Sternprodukten erfolgt durch geometrische Eigenschaften von $M$:

**Satz 4.8 (Klassifikation von Sternprodukten [3, 23])** *Die Äquivalenzklassen $[\star]$ von Sternprodukten $\star$ auf $M$ werden durch geometrische Eigenschaften der Poisson-Mannigfaltigkeit $M$ klassifiziert*[9]*. Insbesondere gibt es für $\mathbb{R}^{2n}$ nur eine Äquivalenzklasse: hier sind alle Sternprodukte äquivalent.*

Die Wahl einer Äquivalenzklasse allein ist aber noch lange nicht physikalisch hinreichend. Um eine Quantenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ zu konstruieren, muß auch die zweite Frage beantwortet werden. Dies ist in der Regel ungleich schwieriger, da hier *beispielabhängige* Entscheidungen getroffen werden müssen. Wesentliche Hilfen und Einschränkungen sind die Forderungen nach *Konvergenz* und *Symmetrie*. Auf den letzten Punkt werde ich in Abschnitt 4.3 noch genauer eingehen.

## 4.2 Zeitentwicklung in der Deformationsquantisierung

Zuvor will ich aber noch die Zeitentwicklung im Formalismus der Deformationsquantisierung betrachten. Sei dazu eine klassische Hamilton-Funktion $H$ vorgegeben. Die klassische Zeitentwicklung ist dann durch

$$\frac{d}{dt} f(t) = -\{H, f(t)\} \tag{4.12}$$

[9] Wer es genauer wissen will: Im Falle symplektischer Poisson-Klammern geschieht die Klassifikation durch die zweite deRham Kohomologie von $M$ ...

gegeben. Da als Vektorraum $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ mit $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ übereinstimmt, ist klar, was das Sternprodukt-Analogon zur Heisenberg-Gleichung (2.13) sein soll, nämlich

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}(H \star f(t) - f(t) \star H). \tag{4.13}$$

Hier ergibt sich zunächst ein mathematisches Problem: Im Rahmen der formalen *Potenz*reihen kann nicht durch den formalen Parameter $\lambda$ geteilt werden, dazu wären *formale Laurent-Reihen* nötig. Da aber

$$(H \star f(t) - f(t) \star H) = \mathrm{i}\lambda\{H, f(t)\} + \cdots \tag{4.14}$$

gilt, ist dies in Wirklichkeit auch nicht nötig. Gleichung (4.13) lautet also ausgeschrieben

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}(H \star f(t) - f(t) \star H) = -\{H, f(t)\} + \cdots . \tag{4.15}$$

Damit erweist sich (4.13) also als eine *Deformation* der Hamiltonschen Bewegungsgleichung (4.12), wobei die *Quantenkorrekturen* in (4.15) von den höheren Ordnungen von $\lambda$ des Sternprodukt-Kommutators kommen. Auch an dieser Stelle ist die klassische Situation auf evidente Weise der klassische Limes der Situation in der Quantenmechanik.

## 4.3 Sternprodukte und Symmetrien

### 4.3.1 Klassische Symmetrien

Hier will ich kurz an die *infinitesimale Version einer Symmetrie* in der klassischen Mechanik erinnern, siehe beispielsweise [27] für eine detailierte und lesenswerte Einführung. Als Beispiel betrachte man den Drehimpuls $\vec{L}(\vec{q},\vec{p}) = \vec{q} \times \vec{p}$ mit den Komponenten $L_1$, $L_2$ und $L_3$ als Funktionen auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Daß die $L_1$, $L_2$, $L_3$ Drehungen erzeugen, bedeutet gerade, daß die Hamiltonschen Gleichungen zu $L_i$ als Flußabbildung gerade die Drehung um die $i$-te Achse besitzen. Die Poisson-Klammern der drei *Generatoren* sind

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k. \tag{4.16}$$

Damit bilden die $L_i$ also eine Unteralgebra bezüglich der Poisson-Klammern. Dies ist als infinitesimale Version der Tatsache anzusehen, daß die Hintereinanderausführung von Drehungen wieder eine Drehung ist.

Allgemeinere Symmetrien erhält man infinitesimal nun durch Generatoren $J_1, \ldots, J_N$, welche unter Poisson-Klammern wieder eine Unteralgebra bilden. Es gibt also Konstanten, die *Strukturkonstanten der Symmetrie* $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ mit

$$\{J_i, J_j\} = c_{ij}^k\, J_k, \tag{4.17}$$

wobei über $k$ summiert wird. Man beachte, daß die $J_i$ nur bezüglich der Poisson-Klammer eine Unteralgebra aufspannen, nicht aber bezüglich des punktweisen Produktes. Da die Poisson-Klammer die Jacobi-Identität erfüllt, müssen die $c_{ij}^k$ gewisse Konsistenzbedingungen erfüllen, nämlich

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \tag{4.18}$$

und

$$c_{ij}^r c_{rk}^l + c_{ki}^r c_{rj}^l + c_{jk}^r c_{ri}^l = 0. \tag{4.19}$$

Damit wird der Vektorraum $\mathfrak{g}$, der von den $J_1, \ldots, J_N$ aufgespannt wird, eine *Lie-Algebra* mit der *Lie-Klammer*

$$[J_i, J_j] = c_{ij}^k \, J_k. \tag{4.20}$$

Abstrakter formuliert erhält man, daß eine infinitesimale Symmetrie durch eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gegeben ist, welche durch Funktionen $J_1, \ldots, J_N$ auf $M$ realisiert ist, was bedeutet, daß (4.17) erfüllt ist.

### 4.3.2 Quantenmechanische Symmetrien

Quantenmechanisch werden Symmetrien sehr ähnlich beschrieben, Infinitesimale Symmetrien sind wieder durch eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gegeben, die diesmal durch Operatoren auf $\mathfrak{H}$ realisiert ist. Man nennt dies auch eine *Darstellung* von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{H}$. Konkret bedeutet dies, daß man für eine Basis von $\mathfrak{g}$ wieder Operatoren $J_1, \ldots, J_N$ findet, so daß die Lie-Klammer Relationen jetzt durch Kommutatoren anstatt durch Poisson-Klammern realisiert werden

$$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[J_i, J_j] = c_{ij}^k \, J_k. \tag{4.21}$$

### 4.3.3 Symmetrien in der Deformationsquantisierung

Hat man eine klassischen Symmetrie $\mathfrak{g}$ gegeben, so stellt sich die Frage, ob diese Symmetrie auch quantenmechanisch realisiert ist oder ob es zu *Anomalien* kommt. Im Falle von Sternprodukten läßt sich diese Frage wie folgt präzisieren. Ich gebe dabei nur die wichtigste Definition wieder, in der Literatur finden sich weitere, geringfügig verschiedene Begriffe, siehe beispielsweise [5].

**Definition 4.9** *Ein Sternprodukt $\star$ heißt kovariant bezüglich einer klassischen Symmetrie, die infinitesimal durch $J_1, \ldots, J_N$ mit $\{J_i, J_j\} = c_{ij}^k J_k$ erzeugt wird, wenn*

$$J_i \star J_j - J_j \star J_i = \mathrm{i}\lambda \, c_{ij}^k \, J_k \tag{4.22}$$

*für alle $i, j = 1, \ldots, N$ gilt.*

Man beachte, daß nach Definition eines Sternprodukts allgemein gilt, daß

$$f \star g - g \star f = \mathrm{i}\lambda\{f, g\} + \cdots . \tag{4.23}$$

Damit ist (4.22) also so zu lesen, daß in (4.23) für die $\star$-Kommutatoren von den $J_i$ alle höheren Ordnungen verschwinden. In der Regel stellt dies eine sehr drastische Bedingung an das Sternprodukt dar.

**Übungsaufgabe 4.10** *Zeigen Sie, daß das Weyl-Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ kovariant unter den Drehungen $L_i$ ist.*

Die Frage nach der Existenz solcher kovarianter Sternprodukte für eine gegebene klassische Symmetrie ist noch nicht allgemein beantwortet. Es gibt jedoch einen wichtigen Spezialfall:

**Satz 4.11** *Sei $M$ eine symplektische Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer kompakten Lie-Gruppe. Dann existiert ein $\mathfrak{g}$-kovariantes Sternprodukt.*

## 4.4 Der Zustandsbegriff in der Deformationsquantisierung

In den folgenden beiden Abschnitten seien die Sternprodukte immer Hermitesch.

### 4.4.1 Positive Funktionale und positive Deformationen

Es gilt nun, das Zustandskonzept von Abschnitt 2.2.1 auf die Deformationsquantisierung anzuwenden. Dabei ergibt sich jedoch folgendes Problem: $\mathbb{C}$-lineare Funktionale $\omega : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}$ der formalen Potenzreihen in die komplexen Zahlen sind wenig geeignet und nicht allgemein genug. Entweder schneiden sie alle höheren Potenzen von $\lambda$ jenseits einer bestimmten ab, oder man ist sofort mit Konvergenzfragen konfrontiert. Es zeigt sich, daß es besser ist, den formalen Charakter ernst zu nehmen und $\mathbb{C}[[\lambda]]$-lineare Funktionale

$$\omega : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]] \tag{4.24}$$

zu betrachten. Die Werte sind also auch formale Potenzreihen. Da $\hbar$ durch den formalen Parameter $\lambda$ ersetzt wurde, ist diese Vorgehen nur konsequent. Es stellt sich aber sofort die Frage, wie die Positivitätsforderung (2.7) interpretiert werden soll. Folgende Definition erweist sich dabei als grundlegend:

**Definition 4.12** *Eine reelle formale Potenzreihe $a = \sum_{r=r_0}^\infty \lambda^r a_r \in \mathbb{R}[[\lambda]]$ heißt positiv, falls die unterste Ordnung $a_{r_0}$ positiv ist.*

Damit ist also eine reelle formale Potenzreihe $a \in \mathbb{R}[[\lambda]]$ entweder positiv, negativ oder 0. Weiter gilt, daß die Summe und das Produkt zweier formaler Potenzreihen wieder positiv ist. Es läßt sich daher mit diesem Positivitätsbegriff genauso rechnen wie in $\mathbb{R}$. Mathematisch gesprochen handelt es sich bei $\mathbb{R}[[\lambda]]$ um einen *geordneten Ring*. Allerdings ist diese Ringordnung nicht mehr *Archimedisch*, da beispielsweise $n\lambda < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies läßt sich physikalisch so interpretieren, daß die formale Deformation zwar in die richtige Richtung erfolgt ist, aber ihre richtige „Größe“ $\hbar$ noch nicht erreicht hat. Dazu muß erst die Konvergenz sichergestellt werden. Hier handelt es sich daher vielmehr um eine *asymptotische* Form der Positivität.

Trotzdem läßt sich hiermit der Begriff von positiven Funktionalen auf die Deformationsquantisierung anwenden:

**Definition 4.13** *Sei $(M, \star)$ eine Poisson-Mannigfaltigkeit mit Hermiteschem Sternprodukt. Ein Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}} = (C^\infty(M)[[\lambda]], \star)$ ist ein $\mathbb{C}[[\lambda]]$-lineares Funktional*

$$\omega : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]] \tag{4.25}$$

*mit*

$$\omega(\overline{f} \star f) \geq 0 \quad \textit{und} \quad \omega(1) = 1. \tag{4.26}$$

Im Hinblick auf die Bemerkung in Abschnitt 2.3, daß bei einer physikalisch sinnvollen Quantisierung alle klassischen Zustände als klassischer Limes von Quantenzuständen auftreten, stellt sich die Frage, ob dies mit dem obigen Zustandsbegriff für die Deformationsquantisierung zu erreichen ist.

Hat man einen klassischen Zustand $\omega_0 : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$, also ein positives Borel-Maß, so läßt sich $\omega_0$ offenbar auf $\mathbb{C}[[\lambda]]$-lineare Weise zu einem Funktional

$$\omega_0 : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]] \tag{4.27}$$

fortsetzen, indem man $\omega_0$ Ordnung für Ordnung anwendet, also

$$\omega_0\left(\sum_{r=0}^\infty \lambda^r f_r\right) = \sum_{r=0}^\infty \lambda^r \omega_0(f_r). \tag{4.28}$$

Es stellt sich also die Frage, ob $\omega_0$ nicht nur positiv für das punktweise Produkt ist, also $\omega_0(\overline{f}f) \geq 0$, sondern auch positiv bezüglich des Sternprodukts $\star$ im Sinne von Definition 4.13. Ausgeschrieben bedeutet die Bedingung (4.26) für $f \in C^\infty(M)$

$$0 \leq \omega_0(\overline{f} \star f) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \omega_0(C_r(\overline{f}, f)) = \omega_0(\overline{f}f) + \lambda\omega_0(C_1(\overline{f}, f)) + \cdots . \tag{4.29}$$

Nun kann es passieren, daß $\omega_0(\overline{f}f) = 0$ ist, was ja kein Widerspruch zur Positivität $\omega_0(\overline{f}f) \geq 0$ darstellt. In diesem Fall entscheidet also das Vorzeichen der nächst höheren Ordnung über die Positivität von $\omega_0(\overline{f} \star f)$. Da dieser Term $\omega_0(C_1(\overline{f}, f))$ aber Ableitungen von $f$ enthält, kann es passieren, daß er negativ wird und somit die Positivität von $\omega_0$ bezüglich $\star$ nicht gewährleistet ist.

Als Beispiel kann man den harmonischen Oszillator $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ mit dem Weyl-Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\omega_0 = \delta_0$ betrachten. Man findet, daß

$$\overline{H} \star H = H^2 + \left(\frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\right)^2, \tag{4.30}$$

so daß die Auswertung bei 0

$$\delta_0(\overline{H} \star H) = -\frac{\lambda^2}{4} < 0 \tag{4.31}$$

ergibt. Damit kann das klassische positive $\delta$-Funktional *nicht* positiv für $\star_{\mathrm{Weyl}}$ sein. Physikalisch läßt sich das so interpretieren, daß ein *Punkt* im Phasenraum aufhört, quantenmechanisch sinnvoll zu sein. Die Unschärferelation verbietet eine gemeinsame punktgenaue Lokalisierung in Ort und Impuls.

**Übungsaufgabe 4.14** *Verifizieren Sie* (4.30) *und* (4.31).

Wie läßt sich dies nun mit der Forderung nach einer „Quantisierbarkeit“ der klassischen Zustände in Einklang bringen? Der Ausweg ist der, daß man nicht nur zu den Observablen Quantenkorrekturen zuläßt sondern auch zu den Zuständen. Man betrachtet daher ein Funktional $\omega : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]]$ der Form

$$\omega = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \omega_r, \tag{4.32}$$

wobei jedes $\omega_r : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional ist. Die Anwendung von $\omega$ auf $f$ erfolgt wieder Ordnung für Ordnung in $\lambda$, also

$$\omega(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \omega_r \left(\sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s f_s\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \sum_{s=0}^{r} \omega_{r-s}(f_s). \tag{4.33}$$

Die Positivitätsbedingung lautet jetzt in den ersten Ordnungen

$$0 \leq \omega(\overline{f} \star f) = \omega_0(\overline{f}f) + \lambda\left(\omega_0(C_1(\overline{f}, f)) + \omega_1(\overline{f}f)\right) + \cdots . \tag{4.34}$$

Damit muß man $\omega_1$ nun so wählen, daß im Falle von $\omega_0(\overline{f}f) = 0$ ein möglicher negativer Beitrag von $\omega_0(C_1(\overline{f}, f))$ in Ordnung $\lambda$ kompensiert wird. Entsprechend sind die höheren Ordnungen $\omega_2$, $\omega_3$, … so zu wählen, daß sie die Positivität sicherstellen, falls die vorangehenden Ordnungen alle verschwinden. Zunächst ist nicht klar, ob das Verfahren tatsächlich durchführbar ist, weshalb man folgenden Begriff einführt:

**Definition 4.15** *Sei $\omega_0$ ein klassischer Zustand und $\star$ ein Hermitesches Sternprodukt.*

1. *Ein $\mathbb{C}[[\lambda]]$-lineares Funktional $\omega = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \omega_r : C^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]]$ heißt Deformation von $\omega_0$, falls $\omega$ positiv bezüglich $\star$ ist.*

2. *Das Sternprodukt $\star$ heißt positive Deformation, wenn sich alle klassischen Zustände deformieren lassen.*

Der folgende, mathematisch vielleicht überraschende aber physikalisch plausible Satz besagt, daß Sternprodukte automatisch positive Deformationen sind:

**Satz 4.16 (Positive Deformationen [11])** *Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit sind alle Hermiteschen Sternprodukte positive Deformationen.*

Damit ist also tatsächlich jeder klassische Zustand der klassische Limes eines Quantenzustandes. Man beachte, daß sich aufgrund der Identifikation der Vektorräume von $\mathcal{A}_{\text{klass}}$ und $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ diese Frage überhaupt erst in obiger Weise sinnvoll stellen läßt.

### 4.4.2 Die GNS Konstruktion

Zum Abschluß und quasi als Ausblick auf aktuelle Forschung möchte ich hier kurz die GNS Konstruktion einer Darstellung erläutern. Diese Konstruktion ist ursprünglich für $C^*$-Algebren entwickelt worden [10], es zeigt sich aber, daß sie von sehr viel allgemeinerer Natur ist.

Im folgenden nehme ich an, eine Quantenalgebra $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ konstruiert zu haben, beispielsweise als Sternproduktalgebra $(C^\infty(M)[[\lambda]], \star)$. Wichtig ist nur, daß $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ eine $^*$-Algebra ist und über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}[[\lambda]]$ definiert ist. Um beide Fälle[10] simultan abzudecken, setze ich im folgenden $\mathsf{C} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{C}[[\lambda]]$ und genauso $\mathsf{R} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}[[\lambda]]$.

Ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathsf{C}$ ist dann ein $\mathsf{C}$-Modul $\mathfrak{H}$ mit einem positiv definiten Skalarprodukt. Wichtig ist hier nur, daß in $\mathsf{R}$ positive Elemente erklärt sind. Weiter heißt $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *adjungierbar*, falls es ein $A^* : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ gibt, so daß für alle $\phi, \psi \in \mathfrak{H}$

$$\langle A^* \psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle \tag{4.35}$$

gilt. Die Menge der adjungierbaren Operatoren auf $\mathfrak{H}$ bezeichne ich mit $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Ist $\mathfrak{H}$ sogar ein *komplexer Hilbert-Raum*, so stimmt diese Definition mit der üblichen Definition von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ als stetige Operatoren überein (Hellinger-Toeplitz-Theorem [25, S. 84]). Ganz allgemein zeigt man, daß $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ eine $^*$-Algebra über $\mathsf{C}$ ist. Dies geschieht völlig algebraisch und ist daher als Übungsaufgabe gestellt:

**Übungsaufgabe 4.17** *Zeigen Sie, daß $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ eine $^*$-Algebra ist.*

Der Begriff der $^*$-Darstellung präzisiert die Vorstellung, daß man die Elemente von $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ als Operatoren auf $\mathfrak{H}$ realisiert haben will:

**Definition 4.18** *Eine $^*$-Darstellung von $\mathcal{A}_{\text{QM}}$ auf $\mathfrak{H}$ ist ein $^*$-Homomorphismus*

$$\pi : \mathcal{A}_{\text{QM}} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{H}). \tag{4.36}$$

Die Abbildung $\pi$ ist also $\mathsf{C}$-linear und erfüllt die Identitäten

$$\pi(AB) = \pi(A)\pi(B) \quad \text{und} \quad \pi(A^*) = \pi(A)^* \tag{4.37}$$

[10] Tatsächlich genügt ein geordneter Ring $\mathsf{R}$ und $\mathsf{C} = \mathsf{R} \oplus \mathrm{i}\mathsf{R}$.

für alle $A, B \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$. Damit ist $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ die abstrakt und a priori gegebene Observablenalgebra, die man durch Angaben einer $^*$-Darstellung auf einem Prä-Hilbert-Raum realisieren kann. Die verschiedenen „Darstellungen" der Quantenmechanik, wie die Orts-, Impuls-, und Energiedarstellung, sind also tatsächlich verschiedene $^*$-Darstellungen von ein und der selben Observablenalgebra. Wirklich verschieden sind diese Darstellungen aber nicht, denn in der üblichen Quantenmechanik erweisen sie sich als *unitär äquivalent*. Allgemein heißen zwei $^*$-Darstellungen $\pi_1$ und $\pi_2$ von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ auf $\mathfrak{H}_1$ beziehungsweise $\mathfrak{H}_2$ unitär äquivalent, wenn es eine unitäre Abbildung $U : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ gibt, so daß

$$U\pi_1(A) = \pi_2(A)U \tag{4.38}$$

für alle $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ erfüllt ist. In diesem Fall heißt $U$ auch (unitärer) *Verschränkungsoperator* (eng.: *intertwiner*).

Für eine gegebene Observablenalgebra $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ stellt sich nun also die Frage, ob und gegebenenfalls wieviele $^*$-Darstellungen $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ besitzt. Die GNS Konstruktion[11] erlaubt es, auf *konstruktivem* Wege eine $^*$-Darstellung zu einem Zustand $\omega$ von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ anzugeben.

Sei also $\omega : \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \to \mathbb{C}$ ein Zustand. Da dieser die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (2.11)erfüllt, kann man zeigen, daß

$$\mathfrak{J}_\omega = \{A \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \mid \omega(A^*A) = 0\} \tag{4.39}$$

ein Linksideal, das sogenannte *Gel'fand-Ideal* ist[12]. Man definiert nun den Quotientenraum

$$\mathfrak{H}_\omega = \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}/\mathfrak{J}_\omega. \tag{4.40}$$

Elemente in $\mathfrak{H}_\omega$ werden mit $\psi_A$ bezeichnet, wobei $\psi_A$ die Äquivalenzklasse von $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ ist, also $A \sim A'$, falls $A - A' \in \mathfrak{J}_\omega$. Auf $\mathfrak{H}_\omega$ hat man nun zwei weitere Strukturen: eine Darstellung von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ und ein Skalarprodukt. Die Darstellung $\pi_\omega$ von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ ist als

$$\pi_\omega(A)\psi_B = \psi_{AB} \tag{4.41}$$

definiert, also die übliche Darstellung einer assoziativen Algebra auf sich selbst modulo eines Linksideals. Das Skalarprodukt ist

$$\langle \psi_A, \psi_B \rangle_\omega = \omega(A^*B). \tag{4.42}$$

Da $\mathfrak{J}_\omega$ aus $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ „herausgeteilt" wurde, ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ tatsächlich positiv definit. Schließlich zeigt man, daß $\pi_\omega$ eine $^*$-Darstellung ist, weil

$$\langle \psi_C, \pi_\omega(A)\psi_B \rangle = \omega(C^*AB) = \omega((A^*C)^*B) = \langle \pi_\omega(A^*)\psi_C, \psi_B \rangle. \tag{4.43}$$

Damit hat man also eine $^*$-Darstellung $\pi_\omega$ von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ auf $\mathfrak{H}_\omega$ aus einem Zustand $\omega : \mathcal{A}_{\mathrm{QM}} \to \mathfrak{H}_\omega$ konstruiert, welche nun die *GNS Darstellung* zu $\omega$ genannt wird.

Als bemerkenswerte und zugleich auch charakterisierende Eigenschaft gilt weiter, daß alle Vektoren $\psi_A \in \mathfrak{H}_\omega$ durch Anwendung eines *Erzeugungsoperators* $\pi_\omega(A)$ aus dem *Vakuumsvektor* $\psi_{\mathbb{1}}$ erhalten werden, denn

$$\psi_A = \psi_{A\mathbb{1}} = \pi_\omega(A)\psi_{\mathbb{1}}. \tag{4.44}$$

[11] Nach Gel'fand, Naimark und Segal.

[12] Zur Erinnerung: Ein Linksideal $\mathfrak{J} \subseteq \mathcal{A}$ einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, daß für alle $I \in \mathfrak{J}$ und $A \in \mathcal{A}$ auch $AI \in \mathfrak{J}$ gilt.

Man nennt eine solche Darstellung auch *zyklisch* mit *zyklischem Vektor* $\psi_{\mathbb{1}}$. Schließlich läßt sich das Funktional $\omega$ als *Vakuumserwartungswert* rekonstruieren, denn es gilt

$$\omega(A) = \langle \psi_{\mathbb{1}}, \pi_\omega(A)\psi_{\mathbb{1}} \rangle. \tag{4.45}$$

Diese Begriffsbildung stammt aus der Quantenfeldtheorie, wo die GNS Konstruktion ursprünglich verwendet wurde, siehe auch [20].

**Übungsaufgabe 4.19** *Beweisen Sie die behaupteten Eigenschaften der GNS Darstellung. Zeigen Sie insbesondere, daß alle Definitionen wohldefiniert sind, also unabhängig von den jeweiligen Repräsentanten in einer Äquivalenzklasse.*

Als Bemerkung möchte ich noch erwähnen, daß im Falle einer *$C^*$-Algebra* $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ die Darstellung $\pi_\omega$ automatisch zu beschränkten Operatoren auf dem Prä-Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_\omega$ führt. Daher läßt sich die Darstellung auf die Vervollständigung $\hat{\mathfrak{H}}_\omega$ fortsetzen und liefert eine $^*$-Darstellung von $\mathcal{A}_{\mathrm{QM}}$ auf einem Hilbert-Raum.

Zum Abschluß und als Ausblick gebe ich nun folgendes Beispiel aus der Deformationsquantisierung an. Sei das *Schrödinger-Funktional* $\omega : C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})[[\lambda]] \to \mathbb{C}[[\lambda]]$ durch

$$\omega(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(q, 0)\, d^n q \tag{4.46}$$

definiert. Mit einigen elementaren partiellen Integrationen zeigt man, daß

$$\omega(\overline{f} \star_{\mathrm{Weyl}} f) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{(Nf)(q,0)}(Nf)(q,0)\, d^n q \geq 0 \tag{4.47}$$

gilt, womit $\omega$ zu einem positiven Funktional wird. Die zugehörige GNS Darstellung erweist sich dabei gerade als die Weyl-Darstellung $\varrho_{\mathrm{Weyl}}$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit dem üblichen $L^2$-Skalarprodukt (3.9). Eine völlig analoge Konstruktion ist allgemein auf Kotangentenbündeln möglich, siehe [7–9, 30].

# Literatur


[1] Abraham, R., Marsden, J. E.: *Foundations of Mechanics.* Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2. Auflage, 1985.

[2] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Ann. Phys. **111** (1978), 61–151.

[3] Bertelson, M., Cahen, M., Gutt, S.: *Equivalence of Star Products.* Class. Quantum Grav. **14** (1997), A93–A107.

[4] Blanchard, P., Brüning, E.: *Distribitionen und Hilbertraumoperatoren.* Springer-Verlag, Wien, New York, 1993.

[5] Bordemann, M., Herbig, H.-C., Waldmann, S.: *BRST Cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **210** (2000), 107–144.

[6] Bordemann, M., Neumaier, N., Pflaum, M. J., Waldmann, S.: *On representations of star product algebras over cotangent spaces on Hermitian line bundles.* Preprint Freiburg FR-THEP-98/24 **math.QA/9811055** (November 1998).

[7] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation.* Commun. Math. Phys. **198** (1998), 363–396.

[8] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles II: GNS representations, the WKB expansion, traces, and applications.* J. Geom. Phys. **29** (1999), 199–234.

[9] Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **195** (1998), 549–583.

[10] Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: $C^*$- and $W^*$-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1987.

[11] Bursztyn, H., Waldmann, S.: *On Positive Deformations of $^*$-Algebras.* In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*, *Mathematical Physics Studies* Nr. **22**, 69–80. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

[12] Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Algebraic Rieffel Induction, Formal Morita Equivalence and Applications to Deformation Quantization.* J. Geom. Phys. **37** (2001), 307–364.

[13] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487–496.

[14] Dito, J.: *Star-Product Approach to Quantum Field Theory: The Free Scalar Field.* Lett. Math. Phys. **20** (1990), 125–134.

[15] Dütsch, M., Fredenhagen, K.: *Algebraic Quantum Field Theory, Perturbation Theory, and the Loop Expansion.* Commun. Math. Phys. **219** (2001), 5–30.

[16] Fedosov, B. V.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization.* J. Diff. Geom. **40** (1994), 213–238.

[17] Gerstenhaber, M., Schack, S. D.: *Algebraic Cohomology and Deformation Theory.* In: Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, 13–264. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.

[18] Grawert, G.: *Quantenmechanik: Studienbuch für Studierende der Physik, Mathematik und physikalischen Chemie.* AULA-Verlag, Wiesbaden, 5. Auflage, 1989.

[19] Gutt, S.: *Variations on deformation quantization.* In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*, *Mathematical Physics Studies* Nr. **21**, 217–254. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

[20] Haag, R.: *Local Quantum Physics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1993.

[21] Honerkamp, J., Römer, H.: *Klassische Theoretische Physik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.

[22] Kontsevich, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I.* Preprint **q-alg/9709040** (September 1997).

[23] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem.* Commun. Math. Phys. **172** (1995), 223–262.

[24] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Weyl Manifolds and Deformation Quantization.* Adv. Math. **85** (1991), 224–255.

[25] Reed, M., Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1972.

[26] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 3. Auflage, 1987.

[27] Schottenloher, M.: *Geometrie und Symmetrie in der Physik.* Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.

[28] Thirring, W.: *Klassische Dynamische Systeme*, Band 1 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1988.

[29] Thirring, W.: *Quantenmechanik von Atomen und Molekülen*, Band 3 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1994.

[30] Waldmann, S.: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen.* Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1999. German, 190 pages. Available at `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/`.