INSTITUT FÜR MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG

M. Dobrowolski

Würzburg, den 17.7.2013

Klausur zur „Analysis 1“

1. Man berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

2. a) Man bestimme die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 von $f(x) = \exp(x^2)$.

b) Man bestimme $f^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $f(0) = f(1) = 0$. Beweisen Sie: Zu jedem $y \in [0,1]$ gibt es ein $x \in [0, 1-y]$ mit

$$f(x) = f(x+y).$$

4. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genüge für ein $\alpha > 1$ und ein $c > 0$ der Abschätzung

$$\exp(|f(x) - f(y)|) \leq \exp(c|x-y|^\alpha) \quad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

Zeigen Sie: f ist konstant.

5. a) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf $[a,b]$. Dann gilt $f \geq g$ auf $[a,b]$.

b) Als Anwendung beweise man

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 \text{ für } x > 0.$$

Hinweis: b) kann man auch unabhängig von a) bearbeiten (aber mit Hilfe von a)!).

6. Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x;1)$ der Funktion $f(x) = \sin(\ln x)$, $x > 0$. Ist $T_2(1,1;1)$ eine auf zwei Nachkommastellen (im Dezimalsystem) genaue Approximation von $f(1,1)$? Begründung!

Für jeden Aufgabenteil gibt es 4 Punkte. Insgesamt sind 32 Punkte zu erreichen. Die Klausur ist mit 15 Punkten bestanden. Viel Erfolg!