Wie löst man Mathematikaufgaben?

Manfred Dobrowolski

Universität Würzburg

Wie löst man Mathematikaufgaben?

Das Schubfachprinzip

Verteilt man n Gegenstände in m Fächer und gibt es mehr Gegenstände als Fächer, so liegen in einem Fach mindestens zwei Gegenstände.

Haare

Ein Mensch hat höchstens 300000 Haare auf dem Kopf. Beweisen Sie, dass es zwei Deutsche gibt, die die gleiche Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Haare

Ein Mensch hat höchstens 300000 Haare auf dem Kopf. Beweisen Sie, dass es zwei Deutsche gibt, die die gleiche Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Dies macht man, indem man darauf hinweist, dass es mehr als 300000 Deutsche gibt.

Party

Auf einer Party mit n Personen geben sich manche Leute zur Begrüßung die Hand. Beweisen Sie, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele Hände geschüttelt haben.

Party

Auf einer Party mit n Personen geben sich manche Leute zur Begrüßung die Hand. Beweisen Sie, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele Hände geschüttelt haben.

Lösung: Jede Person kann 0 bis $n-1$ Personen die Hände schütteln, das sind leider zusammen n Möglichkeiten, so dass das Schubfachprinzip nicht angewendet werden kann. Doch nehmen wir einmal an, eine Person hat 0 Personen die Hände geschüttelt. Dann können die anderen Personen nur 0 bis $n-2$ Personen die Hände geschüttelt haben. Die Zahlen 0 und $n-1$ kommen also in ein Fach!

Socken

In einer Schublade liegen 60 Socken, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. 10 Paare sind rot, 10 Paare sind schwarz, 10 Paare sind gelb. Wie viele Socken muss man im verdunkelten Zimmer aus der Schublade ziehen, um sicher ein Paar gleicher Farbe zu bekommen?

Socken

In einer Schublade liegen 60 Socken, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. 10 Paare sind rot, 10 Paare sind schwarz, 10 Paare sind gelb. Wie viele Socken muss man im verdunkelten Zimmer aus der Schublade ziehen, um sicher ein Paar gleicher Farbe zu bekommen?

Lösung: Natürlich vier, spätestens die vierte muss die gleiche Farbe wie eine der vorher gewählten haben.

Das Invarianzprinzip

In einem Problem wird ein Objekt behandelt, das sich ständig ändert, beispielsweise eine Zahlenfolge oder ein Spiel, in dem gezogen wird.

Das Invarianzprinzip

In einem Problem wird ein Objekt behandelt, das sich ständig ändert, beispielsweise eine Zahlenfolge oder ein Spiel, in dem gezogen wird.

Das Invarianzprinzip lässt sich philosophisch so formulieren:

In dem, was sich ändert, suche das, was gleich bleibt.

Beispiel: Zeichen Wegwischen

Auf einer Tafel stehen mehrere Zeichen $+$ und $-$. Wir wischen sukzessive zwei Zeichen weg und ersetzen diese durch ein $+$, falls die beiden Zeichen gleich sind, andernfalls durch ein $-$. Zeigen Sie, dass das letzte Zeichen unabhängig von der Reihenfolge des Wegwischens ist.

Beispiel: Zahlen Wegwischen

Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Wir schreiben die Zahlen von 1 bis $2n$ auf eine Tafel. In jedem Schritt wischen wir zwei beliebige Zahlen a, b aus und schreiben stattdessen die Zahl $|a - b|$ auf die Tafel. Nach $2n - 1$ Schritten steht nur noch eine Zahl auf der Tafel.

Beispiel: Zahlen Wegwischen

Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Wir schreiben die Zahlen von 1 bis $2n$ auf eine Tafel. In jedem Schritt wischen wir zwei beliebige Zahlen a, b aus und schreiben stattdessen die Zahl $|a - b|$ auf die Tafel. Nach $2n - 1$ Schritten steht nur noch eine Zahl auf der Tafel.

Beweisen Sie, dass diese ungerade ist.

Tipp: Die Summe der Zahlen ist $S = 1 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$.

Beispiel: Zahlen Wegwischen

Die Summe der Zahlen ist $S = 1 + \ldots + 2n = n(2n+1)$, eine ungerade Zahl. In jedem Schritt wird S um die gerade Zahl $2\min(a, b)$ vermindert. Damit bleibt S in jedem Schritt ungerade, was gerade die Invariante dieses Problems ist.

Aufgabe: Infizierte Zellen

Neun 1×1-Zellen eines 10×10-Schachbretts sind infiziert. In jedem Schritt wird jede Zelle infiziert, die mit mindestens zwei infizierten Zellen eine gemeinsame Kante hat.

Aufgabe: Infizierte Zellen

Neun 1×1-Zellen eines 10×10-Schachbretts sind infiziert. In jedem Schritt wird jede Zelle infiziert, die mit mindestens zwei infizierten Zellen eine gemeinsame Kante hat.

Können nach einigen Schritten alle 100 Zellen infiziert werden?

Beispiel: Infizierte Zellen

In jedem Schritt nimmt der Umfang des infizierten Gebiets ab oder bleibt gleich, denn wenn eine Zelle durch $k = 2, 3, 4$ Nachbarn infiziert wird, ändert sich der Umfang des infizierten Gebiets um $0, -2, -4$. Der Umfang des infizierten Gebiets zu Anfang ist höchstens $9 \cdot 4 = 36$, der Umfang des gesamten Schachbretts ist 40. Daher kann das gesamte Brett nicht infiziert werden.

Das Extremalprinzip

Ähnlich wie das Invarianzprinzip gehört auch das Extremalprinzip zum Repertoire eines jeden Mathematikers, ohne dass ihm dies zwangsläufig bewusst ist.

Das Extremalprinzip

Ähnlich wie das Invarianzprinzip gehört auch das Extremalprinzip zum Repertoire eines jeden Mathematikers, ohne dass ihm dies zwangsläufig bewusst ist.

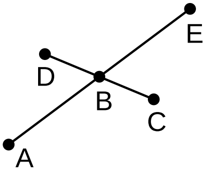
Das Extremalprinzip lautet andeutungsweise so: Um die Existenz eines Objekts zu beweisen, mache es zum Extremum einer Funktion. Dadurch bekommt das Objekt eine weitere Eigenschaft (nämlich Extremum zu sein) und in manchen Fällen ist es durch diese Zusatzeigenschaft eindeutig bestimmt.

Beispiel

Eine Punktmenge S der Ebene ist dadurch charakterisiert, dass jeder Punkt von S Mittelpunkt einer Strecke mit Endpunkten in S ist. Beweisen Sie, dass S keine endliche Menge sein kann.

Beispiel

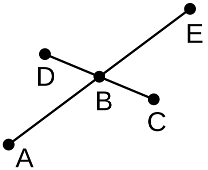
Eine Punktmenge S der Ebene ist dadurch charakterisiert, dass jeder Punkt von S Mittelpunkt einer Strecke mit Endpunkten in S ist. Beweisen Sie, dass S keine endliche Menge sein kann.



Angenommen, S wäre eine endliche Menge. Dann gibt es zwei Punkte A und B in S mit maximalem Abstand.

Beispiel

Eine Punktmenge S der Ebene ist dadurch charakterisiert, dass jeder Punkt von S Mittelpunkt einer Strecke mit Endpunkten in S ist. Beweisen Sie, dass S keine endliche Menge sein kann.



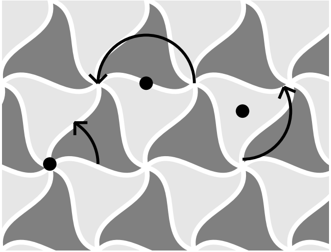
Angenommen, S wäre eine endliche Menge. Dann gibt es zwei Punkte A und B in S mit maximalem Abstand.
Der Punkt B ist Mittelpunkt einer Strecke mit Endpunkten in S, also entweder Mittelpunkt von $\overline{CD}$ oder $\overline{AE}$.

Parkette

Eine Drehung um den Winkel $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ heißt *Drehung der Ordnung* n.

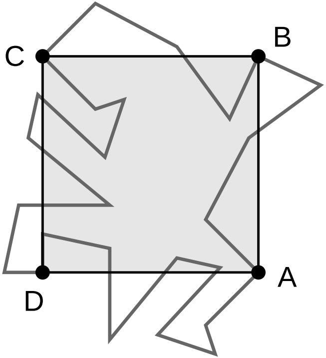
Parkette

Eine Drehung um den Winkel $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ heißt *Drehung der Ordnung n*.



Hier Drehungen der Ordnung $n = 2, 3, 6$.

Parkette



M.C. Escher: Symmetriezeichnung 104, 1959

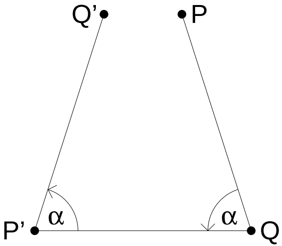
B und D: $n = 4$ A und D: $n = 2$

Kristallographische Beschränkung

In allen bisher betrachteten Beispielen kamen nur bestimmte Ordnungen vor, was kein Zufall ist:

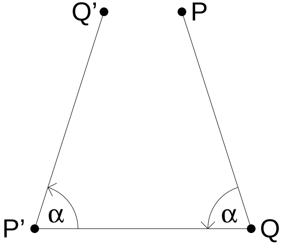
Satz über die kristallographische Beschränkung In jeder periodischen Parkettierung gibt es nur Drehungen der Ordnung $2, 3, 4$ oder 6.

Beweis der Kristallographischen Beschränkung



Jede Kongruenzabbildung bildet ein Drehzentrum auf ein Drehzentrum gleicher Ordnung ab. Sei P ein Drehzentrum der Ordnung n und Q ein Drehzentrum der Ordnung n mit minimaler Entfernung zu P (=Extremalprinzip).

Beweis der Kristallographischen Beschränkung



Jede Kongruenzabbildung bildet ein Drehzentrum auf ein Drehzentrum gleicher Ordnung ab. Sei P ein Drehzentrum der Ordnung n und Q ein Drehzentrum der Ordnung n mit minimaler Entfernung zu P (=Extremalprinzip).
Wir drehen P um Q mit Winkel $\alpha = 2\pi/n$ und erhalten den Punkt P', der nach der vorausgeschickten Bemerkung ebenfalls ein Drehzentrum der Ordnung n ist.

Aufgabe

$2n + 1$ Personen werden so auf die Ebene gesetzt, dass die Abstände zwischen zwei Personen paarweise verschieden sind. Auf ein Kommando erschießt jede Person den Nachbarn mit geringstem Abstand. Beweisen Sie:

a) Mindestens eine Person überlebt.

b) Keine Person wird von mehr als 5 Kugeln getroffen.

c) Die Schusslinien können sich nicht kreuzen.

d) Die Schusslinien enthalten keinen geschlossenen Polygonzug.

Aufgabe

a) Wir betrachten die beiden Personen mit minimalem Abstand. Diese schießen sich gegenseitig tot. Es gibt nun zwei Fälle: Die beiden Personen werden zusätzlich von mindestens einer anderen Kugel getroffen. In diesem Fall ziehen die beiden Personen insgesamt mindestens drei Kugeln auf sich. Daher muss mindestens eine Person überleben. Im zweiten Fall werden die beiden Personen von niemandem sonst getroffen. Dann können wir sie aus dem Spiel entfernen, weil sie das Schießverhalten der anderen Personen nicht beeinflussen. Wir können die gleiche Argumentation auf die verbleibenden $2n-1$ Personen ausdehnen (=Rekursion). Entweder es trifft irgendwann der erste Fall zu oder wir haben am Ende nur noch 3 Personen vor uns, von denen eine überlebt.

Aufgabe

b) Wird A von den Personen B und C getroffen, so ist $\angle BAC$ größer als $\pi/6$. Daher kann eine Person nur von höchstens 5 Kugeln getroffen werden.

Aufgabe

b) Wird A von den Personen B und C getroffen, so ist $\angle BAC$ größer als $\pi/6$. Daher kann eine Person nur von höchstens 5 Kugeln getroffen werden.

c) Wenn sich die Schusslinien AA' und BB' kreuzen, so bilden $ABA'B'$ ein Viereck mit den Diagonalen als Schusslinien. Es können aber nicht beide Diagonalen kleiner als alle vier Seiten sein.

Aufgabe

d) Auch dieser Aufgabenteil folgt leicht aus dem Extremalprinzip. Wir nehmen an, die Schusslinien enthalten einen geschlossenen Polygonzug. Es gibt eine minimale Seite dieses Polygons. Die Personen auf den Eckpunkten dieser Seite haben sich gegenseitig erschossen oder sie haben jemand anderen erschossen, der nicht zum Polygonzug gehört. Beides schließt einen geschlossenen Polygonzug aus.