Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Jörn Steuding

WS 2008/2009
07.02.2009

Klausur zur Funktionentheorie I

Jede Aufgabe wird mit maximal 5 Punkten bewertet. 10 Punkte sind hinreichend für das Bestehen der Klausur.

Kennzeichnen Sie bitte jedes Blatt Papier mit Ihrem Namen, Vornamen, und Matrikelnummer. Bearbeiten Sie auf jedem Blatt ausschließlich eine Aufgabe.

Alle Ihre Antworten sind zu begründen. Dazu können Sie jedes in der Vorlesung oder in den Übungen gezeigte Ergebnis benutzen. Bei besonders inkompetenten Aussagen (wie z.B. "$\sqrt{-1} < 1$") behalten wir uns Punktabzüge vor.

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes Blatt (Din A4) zugelassen. Nicht zugelassen als Hilfsmittel sind sonstige Skripten, Lehrbücher, Taschenrechner, Notebooks, Handys, etc.

Sie haben 122 Minuten Zeit, die Aufgaben zu lösen.

Bezeichnungen: In allen Aufgaben sei

$$A_r^R(\omega) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - \omega| < R\} \text{ und } D_\epsilon(\omega) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - \omega| < \epsilon\}.$$

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $f(A_0^1(0))$ kompakt, dann hat f eine hebbare Singularität in Null.

(ii) Ist $f\left(e^{iq}\right) = e^{-i7q}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$, dann hat f in Null einen Pol siebter Ordnung.

(iii) Ist $\left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann hat f einen Pol in Null.

(iv) Gilt $f(\frac{1}{m}) = e^{-m}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, dann hat f eine wesentliche Singularität in Null.

(v) Es gilt

$$\int_{\partial D_2(0)} f(z)dz = \int_{\partial D_3(i)} f(z)dz.$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

a) Es sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\cos(\sqrt{2}z) - \exp(-z^2)}{z^4}.$$

Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität in Null.

b) Es sei $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion mit $g(z) = g(\frac{1}{z})$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass Null keine hebbare Singularität von g ist.

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)
Gegeben sei das Polynom

$$P_\lambda(z) = z^3 - \lambda(2z + 1), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass $P_\lambda(z)$ für $|\lambda| < \frac{1}{3}$ genau drei Nullstellen und für $|\lambda| > 1$ genau eine Nullstelle in $D_1(0)$ besitzt.

b) Nun sei $P(z) = z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (2+1+2 Punkte)

a) Zeigen Sie: Es gibt eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion F mit den Eigenschaften:
   (i) F hat genau in den Stellen $z = n \in \mathbb{N}$ Pole und diese sind allesamt zweiter Ordnung.
   (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt weiterhin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - n| = \frac{1}{2}} \frac{F(\xi)}{(\xi - n)^{k+1}} d\xi = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für} \quad k = -1 \\ 1 & \text{für} \quad k = -2 \end{cases} .$$

   Bestimmen Sie außerdem die Hauptteile von F in den Punkten $z = n$.

b) Zeigen Sie: Alle Singularitäten der Funktion

$$z \mapsto F(z) \cdot \left(\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \right)^2$$

   sind hebbar, wobei F die Funktion aus a) bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass es eine ganze Funktion f gibt, die für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{n}(z - n) + \mathcal{O}\left(|z - n|^2 \right)$$

   erfüllt.
   Hinweis: Sei $h_n(z) = \mathcal{O}(|z - n|^2)$, dann gibt es nach der Definition des Landau-Symbols $\mathcal{O}$ eine positive Zahl M mit $|h_n(z)| \leqslant M|z - n|^2$ für alle z mit hinreichend kleinem $|z - n|$.

Aufgabe 5 (3 + 2 Punkte)

a) Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{R}_N$ den Rand des Quadrates mit den Ecken $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Ferner sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ohne Polstellen in $\mathbb{Z}$. Es gelte

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^k} \qquad \text{für alle} \quad z \in \mathcal{R}_N,$$

   wobei $A > 0$ und $k > 1$ von N unabhängige Konstanten sind. (Bemerkung: Insbesondere folgt hieraus, dass f für kein $N \in \mathbb{N}$ eine Singularität auf $\mathcal{R}_N$ hat.)
   Beweisen Sie:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{\omega} \mathrm{Res}_{z=\omega} \left(f(z) \pi \cot(\pi z) \right),$$

   wobei die rechte Summe über alle **Polstellen** ω **von** f läuft.
   Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis!)

   (i) $|\cot(\pi z)| \leq B$ für alle $z \in \mathcal{R}_N$, wobei $B > 0$ eine von N unabhängige Konstante ist.

   (ii) $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{m} \right)$.

b) Folgern Sie aus Aufgabenteil a): Für $\alpha \in (0, 1)$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \coth(\pi\alpha) - \frac{1}{2\alpha^2},$$

   wobei bekanntlich $\coth(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)}$.

Viel Erfolg

Lösungshinweise zu 1: Aussage (i) ist **wahr**, denn f muß konstant sein. Wäre f nicht konstant, dann wäre $f(A_0^1(0))$ offen (Gebietstreue) und damit nicht kompakt. Alternativ kann man auch mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz argumentieren, da kompakte Mengen beschränkt sind.

Aussage (ii) ist **wahr**. Für alle $z = e^{iq}$ mit $q \in \mathbb{Q}$ stimmen f und die Funktion $g(z) = \frac{1}{z^7}$ überein. Nach dem Identitätsprinzip gilt $f = g$. Also hat f einen Pol 7-ter Ordnung in Null.

Aussage (iii) ist **falsch**. Die Funktion $f(z) = \exp(\frac{i}{z})$ hat eine wesentliche Singularität in Null. Es gilt aber $f(\frac{i}{n}) = e^n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aussage (iv) ist **wahr**. Denn, $\lim_{m\to\infty} f(\frac{1}{m}) = 0 \neq \lim_{m\to-\infty} f(\frac{1}{m}) = \infty$.
Aussage (v) ist **richtig**. Das folgt direkt aus dem Residuensatz. Genauer:

$$\int_{\partial D_2(0)} f(z)dz = 2\pi i Res_{z=0} f = \int_{\partial D_3(i)} f(z)dz.$$

Lösungshinweis zu 2: a) Wegen

$$\cos(\sqrt{2}z) = 1 - \frac{(\sqrt{2}z)^2}{2!} + \frac{(\sqrt{2}z)^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{(\sqrt{2}z)^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

und

$$\exp(-z^2) = 1 + \frac{-z^2}{1!} + \frac{(-z^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-z^{2k})^2}{(2k)!} + \ldots$$

gilt

$$\cos(\sqrt{2}z) - \exp(-z^2) = -\frac{1}{3}z^4 + \text{Terme höherer Ordnung.}$$

Also hat f in Null eine hebbare Singularität.
b) Für die Laurentreihe von g gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = g(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{z^k}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung folgt $a_k = a_{-k}$. Ist g nicht konstant, so ist mindestens einer der Koeffizienten a_k, $k \neq 0$ ungleich Null. Wegen $a_k = a_{-k}$ gibt es also einen Koeffizienten a_k mit $k < 0$ ungleich Null. Die Singularität ist also nicht hebbar. Alternativ kann man mit dem Riemanschen Hebbarkeitssatz und dem Satz von Liouville argumentieren.

Lösungshinweis zu 3:

a) Setzt man $g(z) = \lambda(2z+1)$, dann gilt für $z \in \partial D_1(0)$:

$$|g(z)| \geqslant |\lambda| \cdot (2|z| - 1) = |\lambda| \qquad \text{und} \qquad |P_\lambda(z) + g(z)| = |z|^3 = 1$$

Für $|\lambda| > 1$ folgt sofort aus dem Satz von Rouche, dass P_λ und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $D_1(0)$ besitzen. g hat genau eine Nullstelle.
Setze man nun $g(z) = z^3 - \lambda 2z$, dann gilt für $z \in \partial D_1(0)$:

$$|g(z)| \geqslant \big||z|^2 - 2|\lambda|\big| \geqslant 1 - 2|\lambda| \qquad \text{und} \qquad |P_\lambda(z) - g(z)| = |\lambda|$$

Für $|\lambda| < \frac{1}{3}$ folgt nun aus dem Satz von Rouche, dass P_λ und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in $D_1(0)$ besitzen. g hat genau drei Nullstellen in $D_1(0)$.

b) Es gilt $P = P_\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{4}$. Nach dem Argumentprinzip gilt:

$$\int_{\partial D_2(0)} \frac{P'_{\frac{1}{4}}(z)}{P_{\frac{1}{4}}(z)} dz = \sharp \left\{ \text{Nullstellen von } P_{\frac{1}{4}}(z) \text{ in } D_2(0) \right\} 2\pi i$$

$P_{\frac{1}{4}}(z)$ ist ein Polynom vom Grad 3 und nach Aufgabenteil a) liegen schon alle drei Nullstellen in $D_1(0) \subset D_2(0)$. Der Wert des Integrals ist damit $6\pi i$.

Lösungshinweis 4:

a) Nach dem Satz von Mittag-Leffler gibt es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $F(z)$, die genau in $z_n = n,\ n \in \mathbb{N}$ Pole, mit Hauptteil $h_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{n(z-n)}$ besitzt. Im Punkt $z = n$ gilt also für die Koeffizienten a_{-1} und a_{-2} der Laurententwicklung $a_1 = \frac{1}{n}$ bzw. $a_{-2} = 1$. Weier gilt:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - n| = \frac{1}{2}} \frac{F(\xi)}{(\xi - n)^{k+1}} d\xi$$

und

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - n| = \frac{1}{2}} \frac{F(\xi)}{(\xi - n)^{k+1}} d\xi.$$

b) Genau in den Polen von F, welche alle zweiter Ordnung sind hat $\frac{(\sin(\pi z))^2}{\pi^2}$ Nullstellen zweiter Ordnung.

c) Die Funktion $f(z) = F(z) \cdot \frac{(\sin(\pi z))^2}{\pi^2}$ erfüllt das gewünschte, denn

$$f(z) = \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{n(z-n)} + \mathcal{O}(1) \right) \left((z-n)^2 + \mathcal{O}\left(|z-n|^4 \right) \right).$$

Lösungshinweis zu 5: i) Mit dem Residuensatz gilt

$$\int_{\mathcal{R}_N} f(z) \pi \cot(\pi z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\zeta} \mathrm{Res}_{z=\zeta} f(z) \pi \cot(\pi z),$$

wobei hier über $\mathcal{R}_N$ in positiver Orientierung integriert wird und die Residuensumme über alle Polstellen ζ des Integranden $f(z)\pi \cot(\pi z)$ läuft. Bekanntlich hat $\pi \cot(\pi z)$ einfache Polstellen in den Punkten $z = n \in \mathbb{Z}$ mit Residuum $(z-n)^{-1}$, so dass also

$$\mathrm{Res}_{z=n} f(z) \pi \cot(\pi z) = \lim_{z \to n} (z-n) f(z) \pi \cot(\pi z) = f(n).$$

Wegen

$$\left| \int_{\mathcal{R}_N} f(z) \pi \cot(\pi z)\, \mathrm{d}z \right| \le 4(2N+1) B \pi \frac{A}{(N + \frac{1}{2})^k} \to 0 \qquad \text{für} \quad N \to \infty,$$

folgt die Identität über die Residuen.

ii) Mit $f(z) = (z^2 + \alpha^2)^{-1}$ folgt aus ii) sofort

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = -\mathrm{Res}_{z=-i\alpha} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + \alpha^2} - \mathrm{Res}_{z=+i\alpha} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + \alpha^2}.$$

Hierin gilt

$$\mathrm{Res}_{z=\pm i\alpha} \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + \alpha^2} = \lim_{z \to \pm i\alpha} (z \mp i\alpha) \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z - i\alpha)(z + i\alpha)} = -\frac{\pi}{2\alpha} \coth(\pi \alpha).$$

Daraus ergibt sich leicht die Formel für die Reihe in iii). (Mit dem Grenzübergang $\alpha \to 0+$ ergibt sich übrigens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)