Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Jörn Steuding

Sommersemseter
13.07.2009

Klausur zur Funktionentheorie II

Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. 15 Punkte sind hinreichend für das Bestehen der Klausur.

Kennzeichnen Sie bitte jedes Blatt Papier mit Ihrem Namen, Vornamen, und Matrikelnummer. Bearbeiten Sie auf jedem Blatt ausschließlich eine Aufgabe.

Alle Ihre Antworten sind zu begründen. Dazu können Sie jedes in der Vorlesung oder in den Übungen gezeigte Ergebnis benutzen. Bei besonders inkompetenten Aussagen (wie z.B. "$\sqrt{-1} < 1$") behalten wir uns Punktabzüge vor.

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes Blatt (Din A4) zugelassen. Nicht zugelassen als Hilfsmittel sind sonstige Skripten, Lehrbücher, Taschenrechner, Notebooks, Handys, etc.

Sie haben 90 Minuten Zeit, die Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1 (1+2+2+3+2 Punkte)
Zu $r \in (-2, 2)$ sei $b_r := \frac{2-r}{2+r} \in \mathbb{R}^+$ und

$$T_r : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \frac{2iz + 2b_r}{z + ib_r}.$$

a) Bestimmen Sie $T_r^{-1}(0)$.

b) Zeigen Sie $T_r(i) \in i\mathbb{R}$ und $-2 < \operatorname{Im} T_r(i) < 2$.

c) Bestimmen Sie das Bild von $M_1 := i\mathbb{R}$ unter T_r.

d) Bestimmen Sie das Bild von $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ unter T_r.

e) Skizieren Sie das Bild von $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 1\}$ unter T_r.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Es sei $\Lambda = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Weiter sei $\wp$ die Weierstrassche $\wp$-Funktion bezüglich Λ, $K(\Lambda)$ der Körper der elliptischen Funktionen bezüglich Λ und $\Pi := \{\alpha w_1 + \beta w_2 \in \mathbb{C} \mid \alpha, \beta \in [0, 1)\}$ das Fundamentalparallelogramm bezüglich Λ.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Gleichung $\wp(z)\wp'(z) = i$ hat maximal 5 verschiedene Lösungen in Π.

(ii) $K(\Lambda)$ hat als Vektorraum über $\mathbb{C}$ endliche Dimension.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
Es sei $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ die Kleinsche j-Funktion und $\epsilon > 0$. Weiter sei $U_\epsilon := \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 42| < \epsilon\} \subset \mathbb{H}$.
Zeigen Sie:

(i) Die Einschränkung von j auf U_ϵ, also $j_{|U_\epsilon} : U_\epsilon \to \mathbb{C}$, ist surjektiv.

(ii) Die Einschränkung von j auf U_ϵ, also $j_{|U_\epsilon} : U_\epsilon \to \mathbb{C}$, ist **nicht** injektiv.

Aufgabe 4 (3+7 Punkte)
Es seien f und g ganze Funktionen.
Zeigen Sie:

a) Ist e^f konstant, dann ist f konstant.

b) Ist $e^f + e^g = 1$, dann sind f und g konstant. **Hinweis:** Nutzen Sie den kleinen Satz von Picard.

Viel Erfolg