Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Jörn Steuding

WS 2009
02.07.2009

Probeklausur zur Funktionentheorie II

Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. 15 Punkte sind hinreichend für das Bestehen der Klausur.

Kennzeichnen Sie bitte jedes Blatt Papier mit Ihrem Namen, Vornamen, und Matrikelnummer. Bearbeiten Sie auf jedem Blatt ausschließlich eine Aufgabe.

Alle Ihre Antworten sind zu begründen. Dazu können Sie jedes in der Vorlesung oder in den Übungen gezeigte Ergebnis benutzen. Bei besonders inkompetenten Aussagen (wie z.B. "$\sqrt{-1} < 1$") behalten wir uns Punktabzüge vor.

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig beschriebenes Blatt (Din A4) zugelassen. Nicht zugelassen als Hilfsmittel sind sonstige Skripten, Lehrbücher, Taschenrechner, Notebooks, Handys, etc.

Sie haben 90 Minuten Zeit, die Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1
Es sei $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt eine Möbiustransformation $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $T(M) = M$ und $T(e^{i\pi/4}) = 1 + 2i$.

b) Es gibt einen Automorphismus Φ von M mit $\Phi(e^{i\pi/4}) = 1 + 2i$.

c) Es gibt eine Modulform $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ vom Gewicht 12, so dass $f(M) = M$.

d) Es gibt eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass $f(i^k M) = M$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2
Es sei $\Lambda = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ und und $\wp$ die Weierstrassche $\wp$-Funktion zu Λ. Weiter sei

$$f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \wp(z) + \frac{(\wp'(z))^2}{\wp(z)}.$$

a) Bestimmen Sie die Ordnung von f.

b) Es sei $\Delta = \{\alpha + \beta(1 + i) \mid \alpha, \beta \in [0, 1)\}$. Zeigen Sie, dass f eingeschränkt auf Δ, also $f_{|\Delta} : \Delta \to \hat{C}$, surjektiv ist.

c) Zeigen Sie: Es gibt Polynome $F, G \in \mathbb{C}[x, y]$, so dass

$$F(\wp(z), \wp'(z)) f\left(2z + \frac{1}{2}\right) = G(\wp(z), \wp'(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3
Es seien f und g holomorphe Modulformen vom Gewicht k. Zeigen Sie:

a) Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ist $f(\tau)\overline{g(\tau)}(\mathrm{Im}\,\tau)^k$ invariant unter Möbiustransformationen der Modulgruppe.

b) Ist f eine Spitzenform auf $\mathbb{H}$ so nimmt die Funktion $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, $\tau \mapsto |f(\tau)|(\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{k}{2}}$ ein Maximum in $\mathbb{H}$ an.

Hinweis: Die Lösungen zur Probeklausur werden am 8. und 9. Juli in den Tutorien besprochen.