KAPITEL 5

Unendlichdimensionale Vektorräume

1. Vergleich: endlich dimensional und unendlich dimensional

Definition 5.1. *Ein Vektorraum V heißt unendlichdimensional, falls es eine linear unabhängige Menge $M \subset V$ gibt, welche unendlich viele Elemente hat.*

Satz 5.2 (Einige Beispiele)**.** *Es sei $M \subset \mathbb{R}$.*

a) *Die Menge*
$$\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
versehen mit der Addition $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ und der skalaren Multiplikation $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ ist ein reeller Vektorraum unendlicher Dimension. Im Fall $M = \mathbb{N}$ nennt man $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ den reellen Folgenraum.

b) *Die Mengen*
$$\begin{aligned} P(M, \mathbb{R}) &= \{p : M \to \mathbb{R} \mid p \textit{ Polynom}\} \\ C(M, \mathbb{R}) &= \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \textit{ stetig}\} \end{aligned}$$
sind unendlichdimensionale Unterräume von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$.

c) *Sei nun M offen in $\mathbb{R}$. Die Mengen*
$$\begin{aligned} D(M, \mathbb{R}) &= \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \textit{ differentierbar}\} \\ C^k(M, \mathbb{R}) &= \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \textit{ k mal stetig differentierbar}\} \\ C^\infty(M, \mathbb{R}) &= \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \textit{ beliebig oft differentierbar} \end{aligned}$$
sind unendlichdimensionale Unterräume von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$.

Ein Vergleich:

Sei $f: V \to W$ linear	endlichdimensional	unendlichdimensional
$\text{Kern}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\}$	ist Unterraum von V	ist Unterraum von V
$\text{Bild}(f) := f(V)$	ist Unterraum von W	ist Unterraum von W
f injektiv	$\Leftrightarrow$ $\text{Kern}(f) = \{0\}$	$\Leftrightarrow$ $\text{Kern}(f) = \{0\}$
f surjektiv	$\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(f) = \dim W$	$-------------$
Lösungemenge $\mathcal{L} := \{x \in V \mid f(x) = y\}$	leer oder affiner U-Raum $\mathcal{L} := \tilde{v} + \text{Kern}(f)$ für $\tilde{v} \in \mathcal{L}$	leer oder affiner U-Raum $\mathcal{L} := \tilde{v} + \text{Kern}(f)$ für $\tilde{v} \in \mathcal{L}$
Falls $V = W$	f injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv	f injektiv $\not\Rightarrow$ f surjektiv f surjektiv $\not\Rightarrow$ f injektiv
$\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwerte, d.h. $\exists x \in V \setminus \{0\} : f(x) = \lambda x$	λ Eigenwert $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det(tE - f(t)) = 0$	$-------------$ $-------------$

2. $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$

Satz 5.3 ($\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$)**.** *Die Menge $\mathbb{R}$ ist bezüglich des Körpers $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum (der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$). Die Menge $\{\ln(p) \mid p \in \mathbb{P}\}$ ist linear unabhängig im Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ unendlich dimensional.*

Satz 5.4 (Satz von Dehn)**.** *Ein Rechteck kann genau dann in Quadrate zerlegt werden, wenn der Quotient der Seitenlänge eine rationale Zahl ist.*