Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Oliver Roth
Dipl.-Math. Sebastian Schleißinger
Dipl.-Math. Marcel Ullrich

10.01.2012

Probeklausur zur Linearen Algebra I
Hinweise zur Berarbeitung und Lösungsvorschläge

Vorbemerkung. Egal, ob Sie die Probeklausur durchgerechnet haben oder nicht: nehmen Sie diese Hinweise nicht einfach als Text zum Durchlesen nach dem Motto „ah, so muss ich das machen“. Lösen Sie die Aufgaben lieber nochmal selbst und gehen Sie die Hinweise durch, wenn Sie beim Lösungsversuch hängen geblieben sind. Die Lösungsvorschläge sind keine Musterlösungen, da es bei den meisten Aufgaben stets mehrere Lösungsvarianten gibt, insbesondere bei Gegenbeispielen in Aufgabe **PK.5**.

PK.1 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien

$$V_\alpha = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Basis von $U + V_\alpha$ und $U \cap V_\alpha$. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag. Es sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zunächst sind v_1, v_2 linear unabhängig (klar) und damit ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von U.
Für $\alpha = \pm 2$ gilt $w_\alpha = v_1$, also ist hier $V_\alpha \subseteq U$. Daraus folgt sofort $U + V_\alpha = U$ und $U \cap V_\alpha = V_\alpha$, also ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $U + V_\alpha$ und $\{v_1\} (\neq \{0\})$ eine Basis von $U \cap V_\alpha$.

Es sei nun $\alpha \notin \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}$. Dann erzeugt $B := \{w_\alpha, v_1, v_2\}$ den Unterraum $U + V_\alpha$ (denn nach Übungsaufgabe 4.2 b) gilt $U + V_\alpha = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} + \operatorname{span}\{w_\alpha\} = \operatorname{span}\{w_\alpha, v_1, v_2\}$) und B ist auch linear unabhängig, denn: Es gelte

$$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann liefert die letzte Gleichung $\delta = 0$ und es verbleibt

$$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist $4 - \alpha^2 \neq 0$, also gibt es genau eine Lösung, nämlich $\beta = \gamma = 0$. Damit ist B also insgesamt eine Basis von $U + V_\alpha$.

Weiter gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V_\alpha) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V_\alpha - \dim_{\mathbb{R}}(U + V_\alpha) = 2 + 1 - 3 = 0$, also ist $U \cap V_\alpha = \{0\}$ und eine Basis von $U \cap V_\alpha$ ist die leere Menge $\emptyset$.

PK.2 Für eine reelle Folge $p = (p_1, p_2, p_3, ...) \in \mathbb{R}^\infty$ sei M_p die Abbildung
$M_p : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, $M_p(a_1, a_2, a_3, ...) = (p_1 a_1, p_2 a_2, p_3 a_3, ...)$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung M_p ist linear. b) Es gilt: M_p ist bijektiv $\iff$ $p_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (1+4 Punkte)

Lösungsvorschlag zu a). M_p ist linear, denn es gilt

$$M_p((a_1, a_2, ...) + (b_1, b_2, ...)) = M_p(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...) = (p_1(a_1 + b_1), p_2(a_2 + b_2), ...)$$

$$= (p_1 a_1 + p_1 b_1, p_2 a_2 + p_2 b_2, ...) = (p_1 a_1, p_2 a_2, ...) + (p_1 b_1, p_2 b_2, ...) = M_p(a_1, a_2, ...) + M_p(b_1, b_2, ...),$$

und

$$M_p(\lambda(a_1, a_2, ...)) = M_p(\lambda a_1, \lambda a_2, ...) = (p_1 \lambda a_1, p_2 \lambda a_2, ...) = \lambda(p_1 a_1, p_2 a_2, ...) = \lambda M_p(a_1, a_2, ...)$$

für alle Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ und Vektoren $(a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty$.

Lösungsvorschlag zu b). Wir zerlegen die Behauptung in die zwei Teilbehauptungen "$\Longrightarrow$" und "$\Longleftarrow$":

1. "$\Longrightarrow$": M_p sei bijektiv. (Wiederspruchsbeweis.) Angenommen $p_k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$M_p(0, ...0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, ...) = M_p(0, ...0, \underbrace{2}_{k\text{-te Stelle}}, 0, ...) = (0, 0, 0...).$$

Dann ist M_p also nicht injektiv, Widerspruch.

2. "$\Longleftarrow$": Es gelte $p_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es sei $q = (\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, ...)$, dann ist M_q die Umkehrfunktion von M_p (klar?) und folglich ist M_p bijektiv.

PK.3 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$(T \circ T)(v) = 0$ für alle $v \in V \iff R(T) \subseteq N(T)$. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag.

1. "$\Longrightarrow$": Es sei $T \circ T = 0$ und $v \in R(T)$. [Zu zeigen ist $v \in N(T)$.] Folglich gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = v$ und es folgt $f(f(x)) = f(v)$. Wegen $f \circ f = 0$ gilt $f(f(x)) = (f \circ f)(x) = 0$, d.h. $f(v) = 0$, also $v \in N(T)$.

2. "$\Longleftarrow$": Es sei $v \in V$ beliebig. [Zu zeigen: $(f \circ f)(v) = 0$.] Dann ist $f(v) \in R(T)$ und wegen $R(T) \subseteq N(T)$ gilt $f(v) \in N(T)$, d.h. $f(f(v)) = 0$, also $(f \circ f)(v) = 0$. $\square$

PK.4 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq V$ sei ein Unterraum.

a) Es gebe linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_m \in V$, $m \in \mathbb{N}$, mit $\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\} \cap U = \{0\}$.
Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{K}} U \leq n - m$.

b) Es sei W ein weiterer Unterraum von V und $\dim_{\mathbb{K}} U = n - 1$.
Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{K}}(W \cap U) \geq \dim_{\mathbb{K}} W - 1$. (2+2 Punkte)

Lösungsvorschlag zu a). Wir verwenden die Dimensionsformel für U und den Unterraum $\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\}$:

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + \operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\}) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ...v_m\}) - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\} \cap U)$$

$$\iff \dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}}(U + \operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\}) - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ...v_m\}) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\} \cap U).$$

Wegen $\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\} \cap U = \{0\}$ gilt $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\} \cap U) = 0$.

Da $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig sind, ist $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{span}\{v_1, ...v_m\}) = m$.

Außerdem ist $\dim_{\mathbb{K}}(U + \operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\}) \leq \dim_{\mathbb{K}} V = n$. Dies eingesetzt ergibt

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}}(U + \operatorname{span}\{v_1, ..., v_m\}) - m + 0 \leq n - m. \qquad \square$$

Lösungsvorschlag zu b). Wir verwenden die Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

Es gilt also

$$\dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(U + W) = n - 1 + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(U + W).$$

Nun ist $U + W$ ein Unterraum von V und $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Dann ist also $\dim_{\mathbb{K}}(U + W) \leq n$. Dies eingsetzt ergibt:

$$\dim_{\mathbb{K}}(U \cap W) = n - 1 + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(U + W) \geq n - 1 + \dim_{\mathbb{K}} W - n = \dim_{\mathbb{K}} W - 1. \qquad \square$$

PK.5 Beweisen oder widerlegen Sie: (Begründung nicht vergessen!)

a) Die Menge $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, \text{Es gibt ein } y \in \mathbb{R} \text{ mit } f(y) = 0.\}$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Für Unterräume U, W_1, W_2 eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V gilt stets die Implikation $W_1 \subseteq W_2 \Longrightarrow U + W_1 \subseteq U + W_2$.

c) Für Teilmengen $M, N \subseteq V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V gilt stets: $\mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N) \subseteq \mathrm{span}(M \cap N)$.

d) Die Menge $P = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) = 0 \right\}$ ist ein $\mathbb{C}$–Unterraum von $\mathbb{C}^2$. (6 Punkte)

> **Hinweis.** Bei Ja/Nein-Aufgaben ist immer folgendes empfehlenswert: Zuerst die Lösung nennen („Die Aussage ist wahr.“ oder „Die Aussage ist falsch.“). Dann entweder eine kurze Begründung oder ein möglichst einfaches Gegenbeispiel. Achtung: Durch ein Beispiel wird die Wahrheit der Aussage nicht nachgewiesen. Zu einem Gegenbeispiel gehört, dass die Voraussetzung der Aussage erfüllt ist, das Behauptete aber nicht eintritt.

Lösungsvorschlag zu a). Die Aussage ist falsch: Die Polynome $1-x, 1+x$ sind Elemente von U, (denn beide besitzen eine reelle Nullstelle: $+1$ bzw. -1,) aber es gilt $(1-x)+(1+x) = 1 \notin U$. (1 Punkt)

Lösungsvorschlag zu b). Die Aussage ist wahr: Es gelte $M_1 \subseteq M_2$ und es sei $v \in U + W_1$. Dann gibt es $u \in U$, $w \in W_1$ mit $v = u + w$. Wegen $w \in W_2$ gilt dann aber auch $v = u + w \in U + W_2$. (1 Punkt)

Lösungsvorschlag zu c). Die Aussage ist falsch: Für $V = \mathbb{R}$, $M = \{1\}$ und $N = \{2\}$ gilt:

$$\begin{gathered} \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \not\subseteq \\ \mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}. \end{gathered}$$

(2 Punkte)

Lösungsvorschlag zu d). Die Aussage ist falsch: Es gilt $\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \in P$, aber es ist

$$i \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin P.$$

[Wenn P ein $\mathbb{C}$-Unterraum wäre, müsste jedes komplexe Vielfache von Vektoren aus P wieder in P liegen, was hier allerdings nicht der Fall ist. Reelle Vielfache von Vektoren aus P liegen dagegen wieder in P.]

(2 Punkte)

> **Tipps zur Klausur:**
>
> * Die beste Vorbereitung auf die Klausur ist die fortwährende Mitarbeit im Semester: Wenn Sie sich viele Wochen immer wieder durch regelmäßiges Nacharbeiten, Lösen von Übungsaufgaben und Diskussion mit Kommilitonen über die Vorlesungsinhalte beschäftigen, bekommen Sie auch die nötige Sicherheit im Umgang mit der Materie. Das eigentliche Lernen für die Klausur ist dann nur noch eine Wiederholung des Stoffes.
>
> * Wiederholen Sie die Vorlesung und schauen Sie sich noch einmal die Übungsaufgaben an. Rechnen Sie unter Umständen weitere Beispielaufgaben und schreiben Sie sie so sauber auf, als säßen Sie in der Klausur, damit Sie im Rechnen und im Aufschreiben Übung bekommen. Zügiges Rechnen (z.B. Lösen eines linearen Gleichungssystems) und gründliches Aufschreiben der Lösungen werden häufig unterschätzt!
> [Ihr formloses Konzeptpapier („Schmierzettel“) wird nicht eingesammelt werden, geht also auch nicht in die Bewertung ein.]
>
> * Lösen Sie in der Klausur zuerst die Aufgaben, bei denen Sie denken, dass Sie damit wenig Probleme haben. Die Aufgaben werden nicht nach Schwierigkeit geordnet sein.
>
> * Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, brechen Sie ab und beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe. Verbohren Sie sich nicht in eine Aufgabe. Wenn Sie später Zeit haben, können Sie immer noch über diese Aufgabe nachdenken.
>
> * Verlieren Sie keine Zeit, z.B. indem Sie die Aufgabenstellung abschreiben.