Ägyptische Brüche und die Vermutung von Erdős und Straus

Ägyptische Brüche / Stammbrüche : $\frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$

beliebt bei Rechnungen im alten Ägypten:

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \quad \leftsquigarrow \text{ nicht eindeutig}$$

$$\frac{20}{13} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{26}$$

Offensichtlich lässt sich jede rationale Zahl als Summe von ägyptischen Brüchen schreiben.

Gesucht: möglichst kurze Summen !?

Gierig: Nimm' soviel wie möglich!
Greedy-Algorithmus: Gegeben $1 < a < n$, wähle m so, dass

$$\frac{1}{m} \leq \frac{a}{n} < \frac{1}{m-1} \qquad \left(\text{bzw. } \begin{cases} n \leq am, \\ a(m-1) < n \end{cases}\right);$$

dann ist

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{m} + \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{a}{n} - \frac{1}{m} = \frac{am-n}{mn}.$$

Zähler ist kleiner geworden: $1 \leq am - n < a$ (s.o.)
Iteriere: $am - n \to a$, $mn \to n$.
Algorithmus bricht spätestens nach a Schritten ab.

Bsp.e: $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$,

$$\frac{4}{13} = \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468}, \dots$$

Erdős & Straus (1948) vermuteten, dass $4/n$ für hinreichend große (alle?) n eine Darstellung als Summe von höchstens drei ägyptischen Brüchen besitzt.

Satz (Erdős) Für die Menge

$M_N := \{ 5 \leq n \leq N :$ $4/n$ besitzt keine Darstellung als Summe von einem oder zwei ägyptischen Brüchen $\}$

gilt
$$\lim_{N \to \infty} \frac{\# M_N}{N} = 0.$$

d.h. 'fast alle' $4/n$ lassen sich als Summe von einem oder zwei ägyptischen Brüchen darstellen!

Beweis. Für Primzahlen der Form $p = 4k+3$ gilt

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{k+1} + \frac{4}{p} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{4k+4-p}{p(k+1)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{p(k+1)}$$

und

$$\frac{4}{pm} = \frac{1}{(k+1)m} + \frac{1}{p(k+1)m}$$ mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$.

/2

Im Falle ungerader n kann $4/n$ also nur mehr als zwei ägyptische Brüche benötigen, wenn n nur Primfaktoren der Gestalt $p = 4k+1$ besitzt!

Nach einem Satz von Fermat lassen sich solche Zahlen als Summe von zwei Quadraten darstellen:

$$n = a^2 + b^2 \qquad (\text{z.B. } 17 = 4^2 + 1^2)$$

und nach einem Satz von Landau gibt es derer unterhalb N weniger als

$$\text{Konstante} \cdot \frac{N}{\sqrt{\log N}}$$

Beweise hiervon in Zahlentheorie-Vorlesung bzw. einschlägiger Literatur! (z.B. Hardy & Wright, Brüdern)

Der Fall gerader n sei dem Leser/in überlassen. $\blacksquare$

! interessant: das additive Problem hat etwas mit den multiplikativen Bausteinen — Primzahlen — zu tun!

Untersuchen nun, welche Kettenbrüche sich als Summe zweier ägyptischer Brüche darstellen lassen (C. Elsner, J. Sander, J. St. 1999):

Muir-Symbol $A_n = \langle a_n, a_{n+1}, \dots, a_m \rangle$ einer Folge natürlicher Zahlen $a_1, a_2, \dots a_m$ ist rekursiv definiert durch

$$A_{m+1} = \langle\ \rangle := 1, \quad A_m := a_m$$
$$A_n := a_n A_{n+1} + A_{n+2} \quad \text{für } n = 1, \dots, m-1$$

Sind alle $a_j = 1$, ist $A_{m+2-j} = F_j$ die j-te Fibonacci-Zahl:

$$A_{m+1} = 1 = A_m, \quad A_{m-1} = 1 \cdot A_m + A_{m+1} = 2, \dots$$

stets sind die A_n paarweise teilerfremd (klar); darüber hinaus gilt

Satz (Muir)

$$[0, a_1, \dots a_m] := \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_m}}}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Kettenbrüche rationaler Zahlen lassen sich mit dem Muir-Symbol berechnen!

Bsp.e: $[0, a_1] = \frac{1}{a_1} = \frac{A_2}{A_1}$, $[0, \overbrace{1, \dots, 1}^{n}] = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$,

$$[0, a_1, a_2] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Beweis per Induktion nach m – selber probieren (nicht schwer :-). $\blacksquare$

Satz (Elsner, Sands, St.) Seien $a_2, \dots a_m \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $(A_2-1)k > A_3$

$$[0, (A_2-1)k - A_3, a_2, \dots a_m] = \frac{1}{A_2k - A_3} + \frac{1}{(A_2k-A_3)(A_2-1)}.$$

Beweis durch Nachrechnen: Für $a_1 \in \mathbb{N}$ ist

$$[0, a_1, a_2, \dots a_m] = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{a_1 A_2 + A_3}$$

$$= \frac{1}{A_2k - A_3} + \frac{1}{(A_2k-A_3)(A_2-1)} \quad \left(= \frac{A_2}{(A_2k-A_3)(A_2-1)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = (A_2-1)k - A_3. \ \blacksquare \ \text{(konstruktiv!)}$$

Für $\frac{4}{n} = [0, a_1, a_2, \dots a_m]$ mit $a_1 = (A_2-1)k - A_3 \geq 1$ liefert der Satz eine Darstellung als Summe von zwei ägyptischen Brüchen!

Satz (Elsner, Sands, St.) Seien $a_1, \dots a_m \in \mathbb{N}$. [D]ann ist $[0, a_1, \dots a_m]$ genau dann Summe zweier [ä]gyptischer Brüche, wenn

$$A_1 + \prod_{j=1}^{r} p_j^{\mu_j} \equiv 0 \mod A_2$$

für gewisse $0 \le \mu_j \le 2\nu_j$, wobei $A_1 = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\nu_j}$ die Primfaktorzerlegung von A_1 ist.

Schreiben $a \equiv b \mod m$, wenn $a-b$ durch m teilbar ist.

__Beweis.__ $\frac{A_2}{A_1} = [0, a_1, \dots a_m] = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ mit $z = x+y$.

$$A_2 x (z-x) = A_1 z$$

$\iff$ wegen der Teilerfremdheit von A_1 und A_2 ist $z = A_2 w$ für ein $w \in \mathbb{N}$ und obiges ist äquivalent zu

$$\iff (A_2 x - A_1) w = x^2.$$

Es verbleibt nun lediglich noch folgende Behauptung für teilerfremde $a, b \in \mathbb{N}$ nachzuweisen:

__Beh.:__ Es existiert genau dann $x \in \mathbb{N}$ mit
und x^2 ist durch $bx - a$ teilbar,
es $0 \le \beta_j \le 2\nu_j$ existieren, so dass
$a + \prod_{j=1}^{r} p_j^{\beta_j}$ durch b teilbar ist,
wobei $a = \prod_{j=1}^{r} p_j^{\nu_j}$ die Primfaktorzerl

__Beweis__ hiervon sei dem(r) Leser/in überla