Zahlentheorie

Thomas Christ, Nicola Oswald, Prof. Jörn Steuding
Lehrstuhl für Mathematik IV (Zahlentheorie)

Zahlentheorie ist ein modernes Teilgebiet der Mathematik mit langer Tradition, welches sich mit den allgemeinen Erscheinungsformen und den speziellen Eigenschaften von Zahlen beschäftigt. So geben beispielsweise die Primzahlen Einblick in die multiplikative Struktur der ganzen Zahlen und die komplexen Zahlen ermöglichen das Lösen jeder polynomiellen Gleichung. Wir illustrieren ein weiteres Beispiel durch ein **konkretes Approximationsproblem: Papierformate!**

Die Formate der Din A-Reihe sind durch folgende Regeln definiert:

- Alle Formate sind einander geometrisch ähnlich;
- Halbierung des Formats A(n) an der langen Seite ergibt das Format A(n+1);
- das Format A(0) besitzt einen Flächeninhalt von einem Quadratmeter.

Wie lässt sich dies mathematisch realisieren?

Bezeichnet x die Länge der langen und 1 die Länge der kurzen Seite des Formates A(n), so ist 1 die Länge der langen Seite des Formates A(n+1) und x/2 die der kurzen Seite. Damit die Verhältnisse übereinstimmen, muss also

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x/2} \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 = 2$$

gelten. Da x positiv ist, folgt x$= \sqrt{2}$. Unglücklicherweise ist jedoch $\sqrt{2} = 1,41421\,3562\ldots$ irrational (also kein Bruch). Somit lässt sich diese Proportion in der Praxis nur annähernd realisieren.

Wie findet man gute (beste) rationale Approximationen an Irrationalzahlen?

Wir berechnen den Kettenbruch zu $\sqrt{2}$. Es gilt

$$\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}.$$

Mit einer Subsitution entsteht so ein typographisches Monster:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

wobei die Pünktchen andeuten, dass diese Entwicklung sich ad infinitum fortsetzt. Brechen wir diesen Kettenbruch nach der fünften '2' ab, erhalten wir die rationale Zahl

$$\frac{29,7\mathrm{cm}}{21\mathrm{cm}} = \frac{99}{70} = 1,41428\,5714\ldots,$$

welche von $\sqrt{2} = 1,41421\,3562\ldots$ um weniger als 0.00008 abweicht. Tatsächlich existiert kein Bruch mit einem Nenner < 169, der $\sqrt{2}$ besser approximiert. Noch besser: Mit dieser Methode finden sich stets die besten rationalen Approximationen an eine Irrationalzahl!, also liefert $\frac{99}{70}$ eine hervorragende Näherung an $\sqrt{2}$ und entsprechend ist das Din A4-Format durch die Ausmaße 29,7 cm $\times$ 21 cm definiert.

Dieser Handzettel hat übrigens Format A4!

Kettenbrüche als Werkzeug zur Findung geeigneter rationaler Approximationen werden schon seit langem benutzt. Eine systematische Theorie wurde durch den Astronomen Huygens im 17. Jahrhundert gegeben, als dieser ein mechanisches Modell unseres Sonnensystems bauen wollte, und fortgeführt durch namhafte Mathematiker wie z.B. Euler, Lagrange, Legendre, Gauß und Ramanujan. Seitdem haben Kettenbrüche viele Anwendungen innerhalb der Mathematik und in Technologien gefunden. Aus dem Kettenbruch für das astronomische Sonnenjahr (365 d 5 h 48 min 45,8 sec) lassen sich beispielsweise der Julianische und der Gregorianische Kalender ablesen.