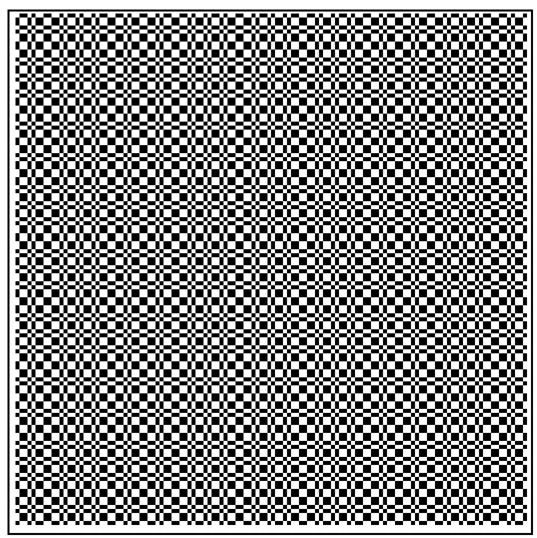
Die Thue-Morse Folge und wie man unendlich lange Schach spielt

JÖRN STEUDING (UNI WÜRZBURG)

MATHEMATIK-OLYMPIADE BAYERN – WÜRZBURG, 24. FEBRUAR 2013



Axel Thue beschäftigte sich 1906 und 1912 mit...

... einer Folge von Nullen und Einsen

$$t = 0\ 1\ 10\ 1001\ 10010110\ \ldots$$

... einer Folge von Nullen und Einsen

$$t \;=\; 0\;1\;10\;1001\;10010110\;\;\ldots$$

Die Ziffern von $t = t_0 t_1 t_2 \ldots$ sind definiert über

$$t_0 = 0, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = 1 - t_n.$$

... einer Folge von Nullen und Einsen

$$t \;=\; 0\;1\;10\;1001\;10010110\;\ldots$$

Die Ziffern von $t = t_0 t_1 t_2 \ldots$ sind definiert über

$$t_0 = 0, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = 1 - t_n.$$

t ist auch Fixpunkt der Transformation $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$

$$\begin{array}{rcccccccccc} t & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \ldots \\ & = & 01 & 10 & 10 & 01 & 10 & 01 & 01 & 10 & 10 \ldots ; \end{array}$$

... einer Folge von Nullen und Einsen

$$t = 0\ 1\ 10\ 1001\ 10010110\ \ldots$$

Die Ziffern von $t = t_0 t_1 t_2 \ldots$ sind definiert über

$$t_0 = 0, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = 1 - t_n.$$

t ist auch Fixpunkt der Transformation $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \ \ldots \\ &= 01 \ \ 10 \ \ 10 \ \ 01 \ \ 10 \ \ 01 \ \ 01 \ \ 10 \ \ 10 \ \ldots \ ; \end{aligned}$$

Thue zeigte u.a., dass t nicht periodisch ist und

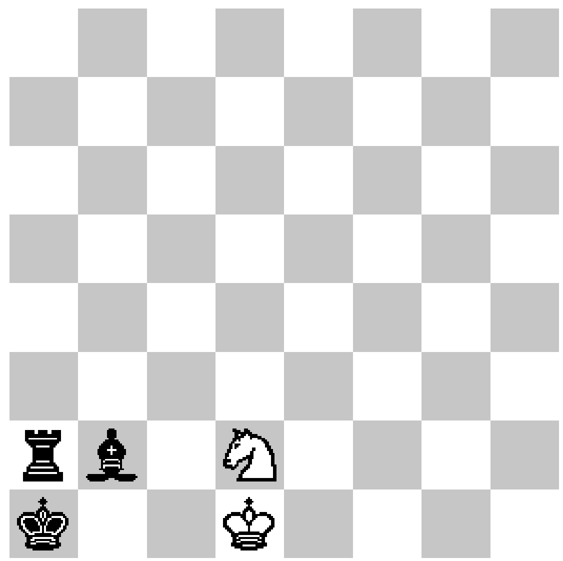
keine dreimal direkt aufeinanderfolgenden Sequenzen enthält!

Harold Marston Morse studierte die Folge seit 1921 immer wieder und zeigte mit ihrer Hilfe u.a, dass es auf Flächen negativer Krümmung rekurrente, aber nicht periodische Geodäten gibt.

Der Mathematiker und passionierte Schachspieler und spätere Weltmeister **Machgielis Euwe** wiederentdeckte die Folge 1929 im Zusammenhang mit dem Problem unendlicher Schachpartien...

Die Deutsche Regel

besagte, dass eine Schachpartie mit einem Unentschieden endet, wenn dieselbe Folge von Zügen – mit allen Figuren in denselben Positionen – dreimal hintereinander vorkommt.



Euwe bemerkte, dass trotzdem nicht erwünschte, unendlich andauernde Schachpartien möglich sind!

Arbeitet man nämlich die Thue-Morse Folge gemäß folgender Vorschrift

0 : Sb1-c3, Sb8-c6; Sc3-b1, Sc6-b8

1 : Sg1-f3, Sg8-f6; Sf3-g1, Sf6-g8

in eine passende Schachstellung ein, so kann man nach den 1929 gültigen Regeln unendlich lange Schach spielen!

Arbeitet man nämlich die Thue-Morse Folge gemäß folgender Vorschrift

0 : Sb1-c3, Sb8-c6; Sc3-b1, Sc6-b8

1 : Sg1-f3, Sg8-f6; Sf3-g1, Sf6-g8

in eine passende Schachstellung ein, so kann man nach den 1929 gültigen Regeln unendlich lange Schach spielen!

Die Deutsche Regel wurde im Nachhinein abgeschafft und

Arbeitet man nämlich die Thue-Morse Folge gemäß folgender Vorschrift

0 : Sb1-c3, Sb8-c6; Sc3-b1, Sc6-b8

1 : Sg1-f3, Sg8-f6; Sf3-g1, Sf6-g8

in eine passende Schachstellung ein, so kann man nach den 1929 gültigen Regeln unendlich lange Schach spielen!

Die Deutsche Regel wurde im Nachhinein abgeschafft und

Euwe 1935-1937 Weltmeister **:-)**

Arbeitet man nämlich die Thue-Morse Folge gemäß folgender Vorschrift

0 : Sb1-c3, Sb8-c6; Sc3-b1, Sc6-b8

1 : Sg1-f3, Sg8-f6; Sf3-g1, Sf6-g8

in eine passende Schachstellung ein, so kann man nach den 1929 gültigen Regeln unendlich lange Schach spielen!

Die Deutsche Regel wurde im Nachhinein abgeschafft und

Euwe 1935-1937 Weltmeister **:-)**

Dreimal dieselbe Stellung wäre ein hinreichendes Abbruchkriterium für endliches Schach!

Hintergrund

Wie bereits **Thue** gezeigt hatte, enthält die Thue-Morse Folge $t = t_0 t_1 t_2 \ldots$ keine sich direkt hintereinander dreimal wiederholende Sequenz:

$$\ldots BBB \ldots \not\subset t \qquad \text{für alle} \quad B \in \{0,1\}^n.$$

Hintergrund

Wie bereits **Thue** gezeigt hatte, enthält die Thue-Morse Folge $t = t_0 t_1 t_2 \ldots$ keine sich direkt hintereinander dreimal wiederholende Sequenz:

$$\ldots BBB \ldots \not\subset t \qquad \text{für alle} \quad B \in \{0,1\}^n.$$

Ein Satz von **Hedlund** und **Morse** liefert sogar die Unmöglichkeit des Auftretens von BBb, wobei b die erste Ziffer von B sei.

<u>Beweisidee:</u> Induktion nach der Anzahl $\sharp B$ der Ziffern in B. Die Bausteine von t sind 01 bzw. 10, was das Auftreten von 000 bzw. 111 bereits unmöglich macht; Sequenzen wie 010101 bzw. 101010 korrepsondieren mit dem Morphismus $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$ mit 000 bzw. 111, sind also auch unmöglich...

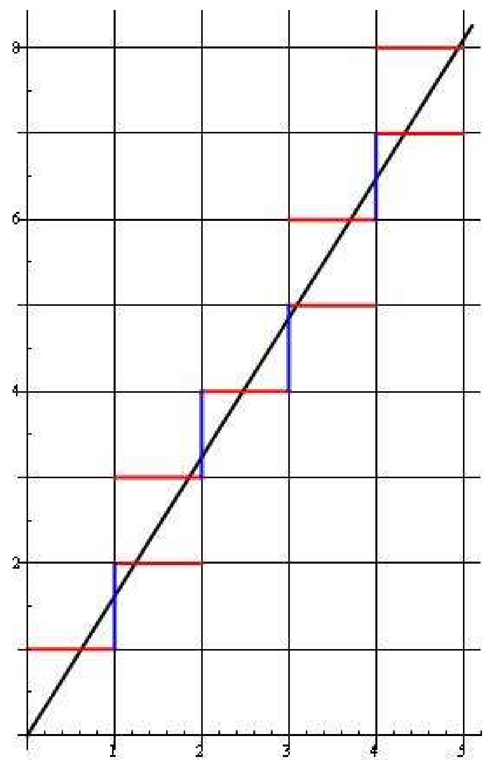
Gustav Arnold Hedlund und Morse begründeten mit einer Reihe von Untersuchungen in den 1940ern das Gebiet der symbolischen Dynamik (bzw. auch Combinatorics on Words).

Gustav Arnold Hedlund und Morse begründeten mit einer Reihe von Untersuchungen in den 1940ern das Gebiet der symbolischen Dynamik (bzw. auch Combinatorics on Words).

Im Folgenden ein weiteres Beispiel ihrer Theorie...

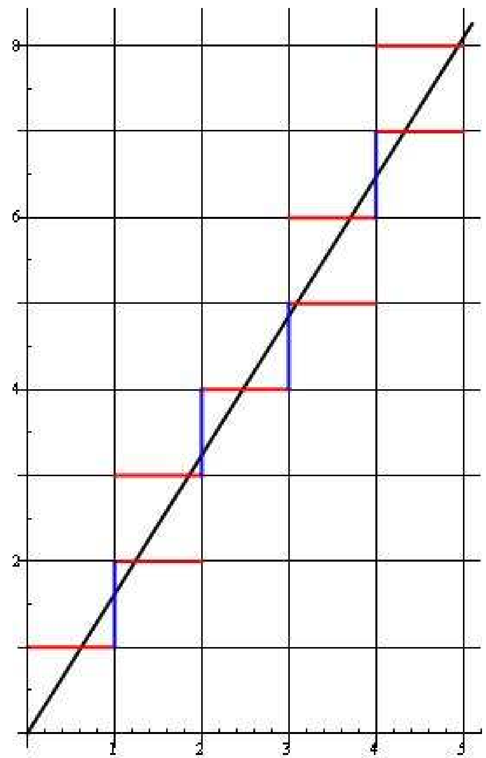
Sturmsche Wörter

Eine Gerade mit irrationaler Steigung durch den Nullpunkt – wie etwa $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x$ – besitzt keine rationalen Punkte außer dem Nullpunkt.



Sturmsche Wörter

Eine Gerade mit irrationaler Steigung durch den Nullpunkt – wie etwa $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x$ – besitzt keine rationalen Punkte außer dem Nullpunkt.



Goldener Schnitt: $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \to 010010100100\ldots$

Das Fibonacci-Wort f

ist Fixpunkt der Transformation $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 0$

$$\begin{aligned} f &= 0 \;\; 1\,0 \;\; 0 \;\; 1\,0 \;\; 1\;0 \;\; 0 \;\ldots \\ &= 01\; 0\; 01\; 01\; 0\; 01\; 0\; 01\; 01 \;\ldots\; ; \end{aligned}$$

Das Fibonacci-Wort f

ist Fixpunkt der Transformation $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 0$

$$\begin{aligned} f &= 0\ \ 1\,0\ \ 0\ \ 1\,0\ \ 1\ 0\ \ 0\ \ldots \\ &= 01\ 0\ 01\ 01\ 0\ 01\ 0\ 01\ 01\ \ \ldots\ \ ; \end{aligned}$$

es ist **nicht-periodisch** und ist Grenzwert der Rekursion

$$f_0 := 0,\ f_1 := 01 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_n f_{n-1}.$$

Das Fibonacci-Wort f

ist Fixpunkt der Transformation $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 0$

$$\begin{aligned} f &= \ 0 \ \ 1\,0 \ \ 0 \ \ 1\,0 \ \ 1 \ 0 \ \ 0 \ \ldots \\ &= \ 01\ 0\ 01\ 01\ 0\ 01\ 0\ 01\ 01 \ \ \ldots \ \ ; \end{aligned}$$

es ist **nicht-periodisch** und ist Grenzwert der Rekursion

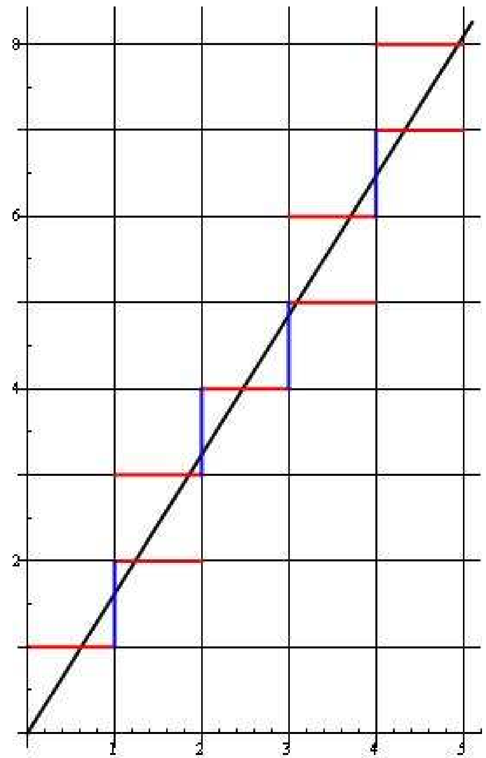
$$f_0 := 0,\ f_1 := 01 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_n f_{n-1}.$$

Die Fibonacci-Zahlen $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$; die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen konvergieren gegen den goldenen Schnitt:

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2} = 1,5,\ \frac{5}{3} = 1,\overline{6},\ \frac{8}{5} = 1,6,\ \frac{13}{8} = 1,625, \ldots \to \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618\ldots$$

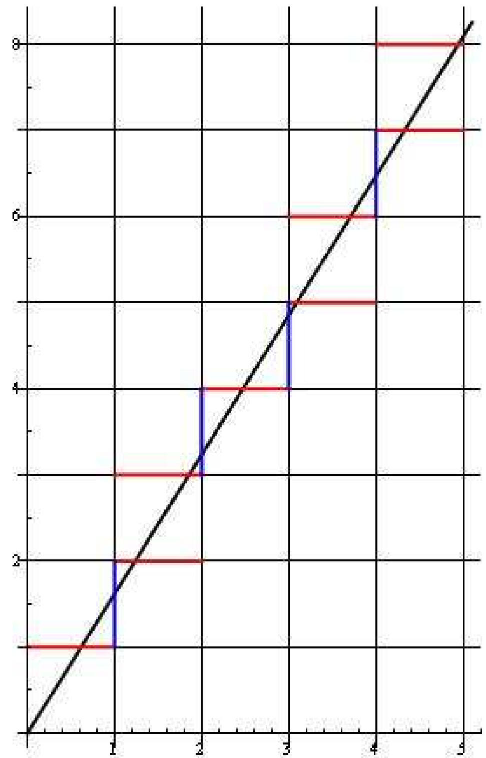
Und noch einmal

schneiden wir die Gerade $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ mit dem Gitter:



Und noch einmal

schneiden wir die Gerade $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ mit dem Gitter:



Die Zahlen $\lfloor n\frac{\sqrt{5}+1}{2} \rfloor$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sind der Reihe nach

$$1, 3, 4, 6, 8, \ldots$$

Beatty-Folgen

Sei $\alpha > 1$ irrational, dann heißt

$$B(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$$

die zugehörige Beatty-Folge.

Beatty-Folgen

Sei $\alpha > 1$ irrational, dann heißt

$$B(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor : n = 1, 2, \ldots\}$$

die zugehörige Beatty-Folge.

Sei β definiert durch $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$,

Beatty-Folgen

Sei $\alpha > 1$ irrational, dann heißt

$$B(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor : n = 1, 2, \ldots\}$$

die zugehörige Beatty-Folge.

Sei β definiert durch $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, dann ist auch β irrational und der Satz von Beatty besagt

$$B(\alpha) \cup B(\beta) = 1, 2, 3, \ldots \quad B(\alpha) \cap B(\beta) = \emptyset;$$

d.h. die beiden Beatty-Folgen bilden eine disjunkte Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen!

Beatty-Folgen

Sei $\alpha > 1$ irrational, dann heißt

$$B(\alpha) = \{\lfloor n\alpha \rfloor \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$$

die zugehörige Beatty-Folge.

Sei β definiert durch $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, dann ist auch β irrational und der Satz von Beatty besagt

$$B(\alpha) \cup B(\beta) = 1, 2, 3, \ldots \quad B(\alpha) \cap B(\beta) = \emptyset;$$

d.h. die beiden Beatty-Folgen bilden eine disjunkte Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen!

Im Falle des goldenen Schnittes $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ergibt sich beispielsweise

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$$

Empfehlenswerter Lesestoff:

- G.A. HEDLUND, J. MARSTON MORSE, Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups, *Duke Math. J.* **11** (1944), 1-7

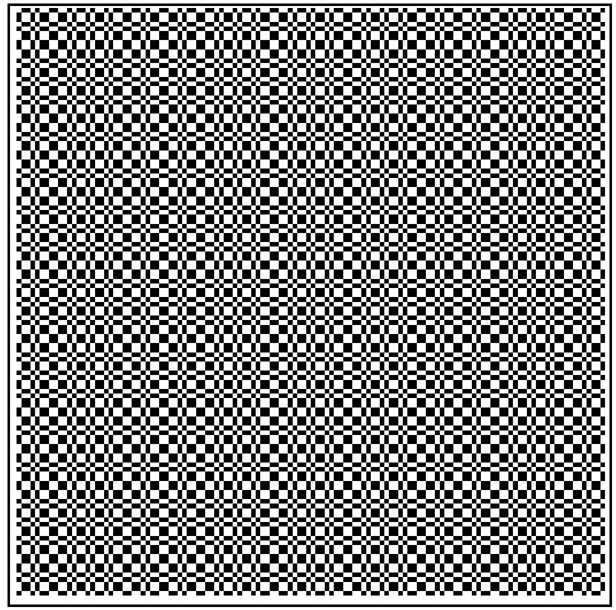
enthält den Beweis der Unmöglichkeit von BBb in t

- K.B. STOLARSKY, Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators, *Canadian Math. Bull.* **19** (1976), 473-482

knüpft an den zweiten Teil des Vortrages an

- J.-P. ALLOUCHE, J. SHALLIT, The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence, in *Sequences and their applications*, Proceedings of SETA 98, Springer 1999, 1-16

sehr lesenswert und informativ; enthält noch vieles mehr als das hier angesprochene und ist im internet frei verfügbar!



Weiterhin viel Spaß mit Mathe und vielen Dank!

Die Folien gibt es auch auf meiner webseite

http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼steuding/