Die Kunst der Hochstapelei

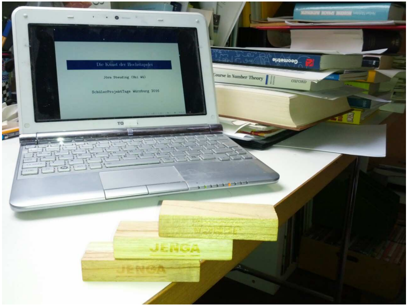
Jörn Steuding (Uni Wü)

Schüler_InnenProjektTage Würzburg 2016

1. Herausforderung: Mit Mathematik Brücken bauen!
2. Eine alternative Lösung
3. Was ist eigentlich Mathematik?

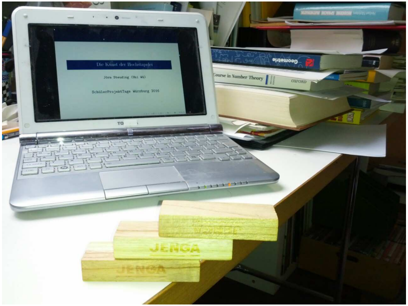
Die Herausforderung

Gegeben seien n identische quaderförmige Bausteine (etwa Dominosteine); diese sollen so an einer Kante gestapelt werden, dass ein möglichst großer Überhang entsteht!



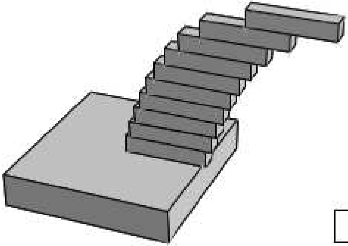
Die Herausforderung

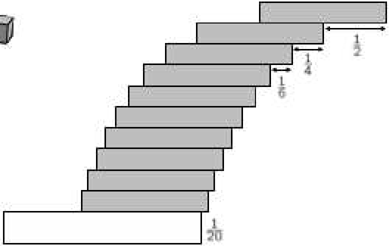
Gegeben seien n identische quaderförmige Bausteine (etwa Dominosteine); diese sollen so an einer Kante gestapelt werden, dass ein möglichst großer Überhang entsteht!



wir experimentieren...

Theorie vs. Praxis :-)





Eine Strategie!

Diese Aufgabe ist im Falle eines einzigen Bausteins leicht zu lösen, in dem dieser zur Hälfte über die Kante geschoben wird, so dass sich also die überhängende Masse im Gleichgewicht mit der restlichen Masse befindet.

Bei zwei Steinen ist es offensichtlich sinnvoll mit dem oberen Stein so zu verfahren wie im vorangegangenen Fall; dabei lässt sich der darunter liegende Stein nun noch zu einem Viertel über die Kante ziehen.

Bei drei Steinen besetzt man die oberen beiden wie gehabt und, wie eine kurze Rechnung oder das Ausprobieren mit Dominosteinen zeigt, lässt sich der dritte dann noch um ein Sechstel über die Kante schieben.

Eine Strategie!

Diese Aufgabe ist im Falle eines einzigen Bausteins leicht zu lösen, in dem dieser zur Hälfte über die Kante geschoben wird, so dass sich also die überhängende Masse im Gleichgewicht mit der restlichen Masse befindet.

Bei zwei Steinen ist es offensichtlich sinnvoll mit dem oberen Stein so zu verfahren wie im vorangegangenen Fall; dabei lässt sich der darunter liegende Stein nun noch zu einem Viertel über die Kante ziehen.

Bei drei Steinen besetzt man die oberen beiden wie gehabt und, wie eine kurze Rechnung oder das Ausprobieren mit Dominosteinen zeigt, lässt sich der dritte dann noch um ein Sechstel über die Kante schieben.

Eine Strategie!

Diese Aufgabe ist im Falle eines einzigen Bausteins leicht zu lösen, in dem dieser zur Hälfte über die Kante geschoben wird, so dass sich also die überhängende Masse im Gleichgewicht mit der restlichen Masse befindet.

Bei zwei Steinen ist es offensichtlich sinnvoll mit dem oberen Stein so zu verfahren wie im vorangegangenen Fall; dabei lässt sich der darunter liegende Stein nun noch zu einem Viertel über die Kante ziehen.

Bei drei Steinen besetzt man die oberen beiden wie gehabt und, wie eine kurze Rechnung oder das Ausprobieren mit Dominosteinen zeigt, lässt sich der dritte dann noch um ein Sechstel über die Kante schieben.

Für diejenigen, die später Mathematik studieren werden:

Unsere Strategie des Hochstapelns ist ein induktiver Prozess, d.h. wir erklären den zukünftigen Prozess durch seine Vergangenheit.

In der Mathematik spricht man von *Induktion* und benutzt dies auch als ein *Beweisprinzip*.

Für diejenigen, die später Mathematik studieren werden:

Unsere Strategie des Hochstapelns ist ein induktiver Prozess, d.h. wir erklären den zukünftigen Prozess durch seine Vergangenheit.

In der Mathematik spricht man von *Induktion* und benutzt dies auch als ein *Beweisprinzip*.

Eine Gleichgewichtsgleichung

Unsere oben beschriebene Konstruktion legt im Falle von n Steinen für die Masse der Steine links der Kante folgende Gleichgewichtsgleichung nahe

$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{oberster}} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}}_{\text{zweiter}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2}}_{\text{unterster Stein}}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$. Für $n = 2$ zeigt sich

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

usw.

Eine Gleichgewichtsgleichung

Unsere oben beschriebene Konstruktion legt im Falle von n Steinen für die Masse der Steine links der Kante folgende Gleichgewichtsgleichung nahe

$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{oberster}} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}}_{\text{zweiter}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2}}_{\text{unterster Stein}}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$. Für $n = 2$ zeigt sich

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

usw.

Unsere oben beschriebene Konstruktion legt im Falle von n Steinen für die Masse der Steine links der Kante folgende Gleichgewichtsgleichung nahe

$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{oberster}} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}}_{\text{zweiter}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{\text{unterster Stein}}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$. Für $n = 2$ zeigt sich

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

usw.

Eine Gleichgewichtsgleichung

Unsere oben beschriebene Konstruktion legt im Falle von n Steinen für die Masse der Steine links der Kante folgende Gleichgewichtsgleichung nahe

$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{oberster}} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}}_{\text{zweiter}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2}}_{\text{unterster Stein}}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$. Für $n = 2$ zeigt sich

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

usw.

Unsere oben beschriebene Konstruktion legt im Falle von n Steinen für die Masse der Steine links der Kante folgende Gleichgewichtsgleichung nahe

$$\frac{n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{oberster}} + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}}_{\text{zweiter}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{\text{unterster Stein}} .$$

Mit Hilfe der so genannten harmonischen Zahlen

$$h(m) := \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} \qquad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}$$

können wir diese Gleichung nach einer kurzen Rechung äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{n-1} h(k) + n = nh(n) \tag{1}$$

umformen.

Diese Formel lässt sich per Induktion beweisen (was auch unserer induktiven Vorgehensweise bei der 'Hochstapelei' Rechnung trägt) oder aber mit einem schönen visuellen Argument, welches wir hier dem lesenswerten Buch "*Proofs without Words*" von Roger B. Nelson entnehmen:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
1 & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1}
\end{array}
\;+\;
\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \frac{1}{n}
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

Anwesende mögen versuchen, den illustrierten Beweis der Gleichgewichtsgleichung (1) nachzuvollziehen.

Ein Beweis ohne Worte

Diese Formel lässt sich per Induktion beweisen (was auch unserer induktiven Vorgehensweise bei der 'Hochstapelei' Rechnung trägt) oder aber mit einem schönen visuellen Argument, welches wir hier dem lesenswerten Buch "*Proofs without Words*" von Roger B. Nelson entnehmen:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \\
1 & & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} &
\end{array}
\;+\;
\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \frac{1}{n}
\end{array}
\;=\;
\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

Anwesende mögen versuchen, den illustrierten Beweis der Gleichgewichtsgleichung (1) nachzuvollziehen.

Wie viel Überhang?

Welchen Überhang kann unsere Hochstapelei produzieren?

Der Überhang beträgt bei Verwenden von n Steinen genau

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{h(n)}{2}, \tag{2}$$

so dass also das Wachstum der harmonischen Zahlen $h(n)$ zu bestimmen ist.

Wir (oder ein Computer) berechnen die ersten harmonischen Zahlen als

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7\,129}{2\,520}, \frac{7\,381}{2\,520}, \frac{83\,711}{27\,720}, \frac{86\,021}{27\,720}, \ldots$$

Wie viel Überhang?

Welchen Überhang kann unsere Hochstapelei produzieren?

Der Überhang beträgt bei Verwenden von n Steinen genau

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{h(n)}{2}, \qquad (2)$$

so dass also das Wachstum der harmonischen Zahlen $h(n)$ zu bestimmen ist.

Wir (oder ein Computer) berechnen die ersten harmonischen Zahlen als

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7\,129}{2\,520}, \frac{7\,381}{2\,520}, \frac{83\,711}{27\,720}, \frac{86\,021}{27\,720}, \ldots$$

Wie viel Überhang?

Welchen Überhang kann unsere Hochstapelei produzieren?

Der Überhang beträgt bei Verwenden von n Steinen genau

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{h(n)}{2}, \tag{2}$$

so dass also das Wachstum der harmonischen Zahlen $h(n)$ zu bestimmen ist.

Wir (oder ein Computer) berechnen die ersten harmonischen Zahlen als

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{6},\ \frac{25}{12},\ \frac{137}{60},\ \frac{49}{20},\ \frac{363}{140},\ \frac{761}{280},\ \frac{7\,129}{2\,520},\ \frac{7\,381}{2\,520},\ \frac{83\,711}{27\,720},\ \frac{86\,021}{27\,720},\ \ldots$$

Harmonische Zahlen

1, 3/2, 11/6, 25/12, 137/60, 49/20, 363/140, 761/280, 7129/2520, 7381/2520, 83711/27720, 86021/27720, 1145993/360360, 1171733/360360, 1195757/360360, 2436559/720720, 42142223/12252240, 14274301/4084080, 275295799/77597520, 55835135/15519504, 18858053/5173168, 19093197/5173168, 444316699/118982864, 1347822955/356948592, 34052522467/8923714800, 34395742267/8923714800, 312536252003/80313433200, 315404588903/80313433200, 9227046511387/2329089562800, 9304682830147/2329089562800, 290774257297357/72201776446800, 586061125622639/144403552893600, 53676090078349/13127595717600, 54062195834749/13127595717600, 54437269998109/13127595717600, 54801925434709/13127595717600,

Harmonische Zahlen - gerundet

1.0000, 1.5000, 1.8333, 2.0833, 2.2833, 2.4500, 2.5929, 2.7179,
2.8290, 2.9290, 3.0199, 3.1032, 3.1801, 3.2516, 3.3182, 3.3807,
3.4396, 3.4951, 3.5477, 3.5977, 3.6454, 3.6908, 3.7343, 3.7760,
3.8160, 3.8544, 3.8915, 3.9272, 3.9617, 3.9950, 4.0272, 4.0585,
4.0888, 4.1182, 4.1468, 4.1746, 4.2016, 4.2279, 4.2535, 4.2785,
4.3029, 4.3267, 4.3500, 4.3727, 4.3949, 4.4167, 4.4380, 4.4588,
4.4792, 4.4992, 4.5188, 4.5380, 4.5569, 4.5754, 4.5936, 4.6115,
4.6290, 4.6463, 4.6632, 4.6799, 4.6963, 4.7124, 4.7283, 4.7439,
4.7593, 4.7744, 4.7894, 4.8041, 4.8186, 4.8328, 4.8469, 4.8608,
4.8745, 4.8880, 4.9014, 4.9145, 4.9275, 4.9403, 4.9530, 4.9655,
4.9778, 4.9900, 5.0021, 5.0140, 5.0257, 5.0374, 5.0489, 5.0602,
5.0715, 5.0826, 5.0936, 5.1044, 5.1152, 5.1258, 5.1363, 5.1468,
5.1571, 5.1673, 5.1774, 5.1874, 5.1973, 5.2071, 5.2168, 5.2264,
5.2359, 5.2454, 5.2547, 5.2640, 5.2731, 5.2822, 5.2912, 5.3002,
5.3090, 5.3178, 5.3265, 5.3351, 5.3437, 5.3521, 5.3605, 5.3689,
5.3771, 5.3853, 5.3935, 5.4015, 5.4095, 5.4175, 5.4253, 5.4331,

Die harmonische Reihe

Die harmonischen Zahlen treten als Partialsummen der harmonischen Reihe auf:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Die Partialsummen der harmonischen Reihe, also die harmonischen Zahlen $h(n)$, übertreffen bei wachsendem n jede vorgegebene Schranke:

Wir sagen auch: Die harmonische Reihe divergiert!

Die harmonische Reihe

Die harmonischen Zahlen treten als Partialsummen der harmonischen Reihe auf:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Die Partialsummen der harmonischen Reihe, also die harmonischen Zahlen $h(n)$, übertreffen bei wachsendem n jede vorgegebene Schranke:

Wir sagen auch: Die harmonische Reihe divergiert!

Die harmonischen Zahlen treten als Partialsummen der harmonischen Reihe auf:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Die Partialsummen der harmonischen Reihe, also die harmonischen Zahlen $h(n)$, übertreffen bei wachsendem n jede vorgegebene Schranke:
Wir sagen auch: Die harmonische Reihe divergiert!

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir die Größenordnung von $h(n)$ genauer bestimmen. Hierzu beobachten wir, dass die Funktion $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist und also für $m \geq 2$

$$\frac{1}{m} = \min_{m-1 \leq x \leq m} f(x) < \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} < \max_{m-1 \leq x \leq m} f(x) = \frac{1}{m-1}$$

gilt, wobei wir ausgenutzt haben, dass das Integral über einen Weg der Länge eins erhoben wird. Durch Summation über m ergibt sich nun

$$h(n) - 1 = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} < \sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} < \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} = h(n-1) \quad (3)$$

und das auftretende Integral berechnet sich als

$$\sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \log n.$$

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir die Größenordnung von $h(n)$ genauer bestimmen. Hierzu beobachten wir, dass die Funktion $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist und also für $m \geq 2$

$$\frac{1}{m} = \min_{m-1 \leq x \leq m} f(x) < \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\, x}{x} < \max_{m-1 \leq x \leq m} f(x) = \frac{1}{m-1}$$

gilt, wobei wir ausgenutzt haben, dass das Integral über einen Weg der Länge eins erhoben wird. Durch Summation über m ergibt sich nun

$$h(n) - 1 = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} < \sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\, x}{x} < \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} = h(n-1) \quad (3)$$

und das auftretende Integral berechnet sich als

$$\sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\, x}{x} = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}\, x}{x} = \log n.$$

Mit Hilfe der Integralrechnung können wir die Größenordnung von $h(n)$ genauer bestimmen. Hierzu beobachten wir, dass die Funktion $x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$ streng monoton fallend ist und also für $m \geq 2$

$$\frac{1}{m} = \min_{m-1 \leq x \leq m} f(x) < \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} < \max_{m-1 \leq x \leq m} f(x) = \frac{1}{m-1}$$

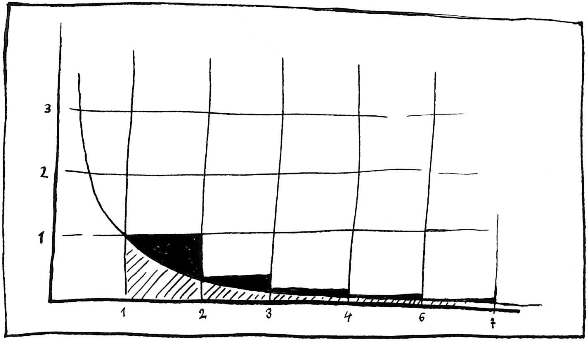
gilt, wobei wir ausgenutzt haben, dass das Integral über einen Weg der Länge eins erhoben wird. Durch Summation über m ergibt sich nun

$$h(n) - 1 = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m} < \sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} < \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m-1} = h(n-1) \quad (3)$$

und das auftretende Integral berechnet sich als

$$\sum_{m=2}^{n} \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \log n.$$

Die Fläche unter einer Hyperbel



Eine Abschätzung

Dass die Ableitung des natürlichen Logarithmus gerade die Funktion f ist, lernt man in der *Analysis* (und kennt es vielleicht schon aus der Schule). Mit diesem Trick ergibt sich nun also eine Beziehung zwischen den harmonischen Zahlen und dem Logarithmus. Wegen $h(n) = h(n-1) + \frac{1}{n}$ wachsen die harmonischen Zahlen wie der Logarithmus: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$-\frac{1}{n} < h(n) - \log n < 1. \tag{4}$$

Harmonische Zahlen - gerundet

1.0000, 1.5000, 1.8333, 2.0833, 2.2833, 2.4500, 2.5929, 2.7179,
2.8290, 2.9290, 3.0199, 3.1032, 3.1801, 3.2516, 3.3182, 3.3807,
3.4396, 3.4951, 3.5477, 3.5977, 3.6454, 3.6908, 3.7343, 3.7760,
3.8160, 3.8544, 3.8915, 3.9272, 3.9617, 3.9950, 4.0272, 4.0585,
4.0888, 4.1182, 4.1468, 4.1746, 4.2016, 4.2279, 4.2535, 4.2785,
4.3029, 4.3267, 4.3500, 4.3727, 4.3949, 4.4167, 4.4380, 4.4588,
4.4792, 4.4992, 4.5188, 4.5380, 4.5569, 4.5754, 4.5936, 4.6115,
4.6290, 4.6463, 4.6632, 4.6799, 4.6963, 4.7124, 4.7283, 4.7439,
4.7593, 4.7744, 4.7894, 4.8041, 4.8186, 4.8328, 4.8469, 4.8608,
4.8745, 4.8880, 4.9014, 4.9145, 4.9275, 4.9403, 4.9530, 4.9655,
4.9778, 4.9900, 5.0021, 5.0140, 5.0257, 5.0374, 5.0489, 5.0602,
5.0715, 5.0826, 5.0936, 5.1044, 5.1152, 5.1258, 5.1363, 5.1468,
5.1571, 5.1673, 5.1774, 5.1874, 5.1973, 5.2071, 5.2168, 5.2264,
5.2359, 5.2454, 5.2547, 5.2640, 5.2731, 5.2822, 5.2912, 5.3002,
5.3090, 5.3178, 5.3265, 5.3351, 5.3437, 5.3521, 5.3605, 5.3689,
5.3771, 5.3853, 5.3935, 5.4015, 5.4095, 5.4175, 5.4253, 5.4331,

Drei Steine Überhang...

Soll ein Überhang von drei Dominosteinen realisiert werden, so sind hierfür bereits 227 Steine nötig, denn

$$h(227) = 6.00437\ldots > 5.99996\ldots = h(226).$$

Übrigens bietet es sich hier wirklich an, mit einem Computer zu arbeiten, denn etwa die harmonische Zahl $h(227)$ als gekürzter Bruch geschrieben lautet

$$h(227) = \frac{7210530454341478178114292924106791866448071719960766673184657267908514585008387695857601640547547}{1200881092808579751109445892858157237623011602251376919557525378451885327053551694768211209584000}.$$

Für einen Überhang der doppelten Länge von sechs Steinen werden bereits 91 380 Steine benötigt. Die obige Approximation (4) der harmonischen Zahlen durch den Logarithmus erlaubt, ein besseres Verständnis für dieses Wachstumverhalten zu bekommen.

Soll ein Überhang von drei Dominosteinen realisiert werden, so sind hierfür bereits 227 Steine nötig, denn

$$h(227) = 6.00437\ldots > 5.99996\ldots = h(226).$$

Übrigens bietet es sich hier wirklich an, mit einem Computer zu arbeiten, denn etwa die harmonische Zahl $h(227)$ als gekürzter Bruch geschrieben lautet

$$h(227) = \frac{7210530454341478178114292924106791866448071719960766673184657267908514585008387695857601640547547}{1200881092808579751109445892858157237623011602251376919557525378451885327053551694768211209584000}.$$

Für einen Überhang der doppelten Länge von sechs Steinen werden bereits 91 380 Steine benötigt. Die obige Approximation (4) der harmonischen Zahlen durch den Logarithmus erlaubt, ein besseres Verständnis für dieses Wachstumverhalten zu bekommen.

50 Dominosteine Überhang?

Schätzen wir einmal, wie viele Dominosteine für einen Überhang der Länge 50 benötigt werden: Nach unserer obigen Formel gilt

$$h(n) > \log n - 1;$$

damit ist der vorgeschriebene Überhang der Länge 50 nach (2) sicherlich mit n Steinen zu realisieren, wenn

$$\log n - 1 > 100 \qquad \text{bzw.} \qquad n > \exp(101).$$

Tatsächlich ist

$$\exp(101) = 7307\,05997\,93680\,67272\,64768\,26340\,61513\,58900\,78390,0840\ldots$$

eine Zahl mit 44 Dezimalstellen vor dem Komma. Der Aufwand für mehr Überhang wächst also exponentiell!

50 Dominosteine Überhang?

Schätzen wir einmal, wie viele Dominosteine für einen Überhang der Länge 50 benötigt werden: Nach unserer obigen Formel gilt

$$h(n) > \log n - 1;$$

damit ist der vorgeschriebene Überhang der Länge 50 nach (2) sicherlich mit n Steinen zu realisieren, wenn

$$\log n - 1 > 100 \qquad \text{bzw.} \qquad n > \exp(101).$$

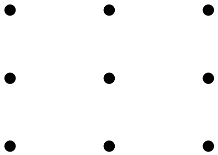
Tatsächlich ist

$$\exp(101) = 7307\,05997\,93680\,67272\,64768\,26340\,61513\,58900\,78390{,}0840\ldots$$

eine Zahl mit 44 Dezimalstellen vor dem Komma. Der Aufwand für mehr Überhang wächst also exponentiell!

1. Herausforderung: Mit Mathematik Brücken bauen!
2. Eine alternative Lösung
3. Was ist eigentlich Mathematik?

Noch ein Rätsel...

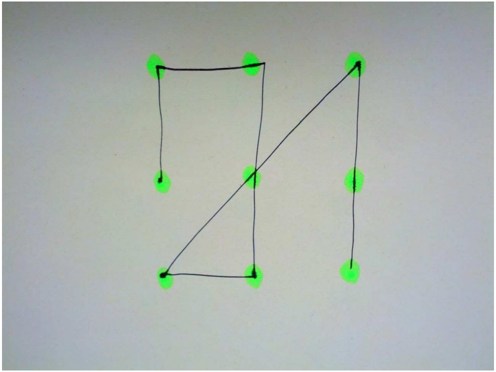


Verbinde die neun Punkte mit Hilfe von möglichst wenigen geraden Linien ohne Abzusetzen!

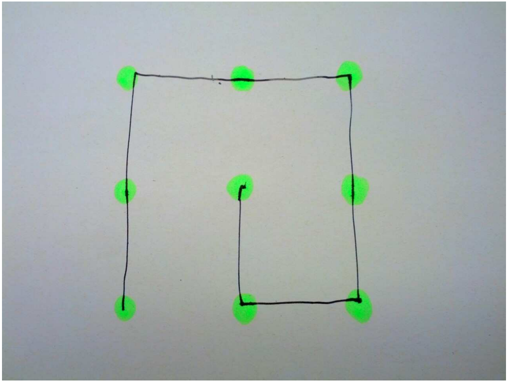
Keine optimale Lösung ...

Dies ist ein altes Rätsel von Sam Loyd
(spätestens aus dem Jahr 1914).

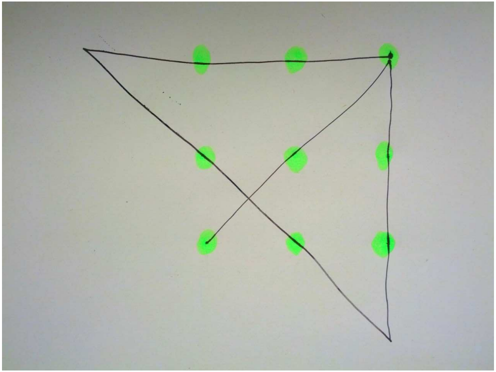
Erster Versuch



Zweiter Versuch



Dritter Versuch



Man muss den 'Rahmen' verlassen!

Zurück zu unserer Hochstapelei:
Haben Sie Ideen, einen größeren Überhang mit weniger Steinen zu realisieren?

Man muss den 'Rahmen' verlassen!

Zurück zu unserer Hochstapelei:
Haben Sie Ideen, einen größeren Überhang mit weniger Steinen zu realisieren?

Gierig!

Unsere Strategie der Hochstapelei ist gierig: Mit jedem Stein wollen wir unmittelbar einen größeren Überhang erzielen.
Solch ein Verfahren nennt man einen *Greedy-Algorithmus*.

Viele Probleme lassen sich sehr gut mit Greedy-Algorithmen angehen, z.B. Packen eines Rucksacks, "traveling person problem", Dijkstras "shortest distance algorithm" zur Navigation, ...
Diese Lösungen sind aber nicht unbedingt bestmöglich.

Angesichts der immensen Mengen von Dominosteinen sind wir tatsächlich über das Ziel hinaus geschossen...

Es geht besser :-)

Tatsächlich gibt es noch andere Strategien, weitaus größere Überhänge zu stapeln. So haben Mike Paterson (Informatik-Professor in Warwick) und Uri Zwick (in Tel Aviv) eine Strategie entwickelt, mit der sich wirklich lange Überhänge mit relativ wenigen Steinen konstruieren lassen, beispielsweise einen Überhang der Länge drei mit nur zwanzig Steinen; dabei benutzen sie oftmals mehr als nur einen Stein pro Etage. Ihr Verfahren liefert ein polynomielles Wachstum statt einem exponentiellen...

M. Paterson, U. Zwick: `Overhang`, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 19-44

Es geht besser :-)

Tatsächlich gibt es noch andere Strategien, weitaus größere Überhänge zu stapeln. So haben Mike Paterson (Informatik-Professor in Warwick) und Uri Zwick (in Tel Aviv) eine Strategie entwickelt, mit der sich wirklich lange Überhänge mit relativ wenigen Steinen konstruieren lassen, beispielsweise einen Überhang der Länge drei mit nur zwanzig Steinen; dabei benutzen sie oftmals mehr als nur einen Stein pro Etage. Ihr Verfahren liefert ein polynomielles Wachstum statt einem exponentiellen...

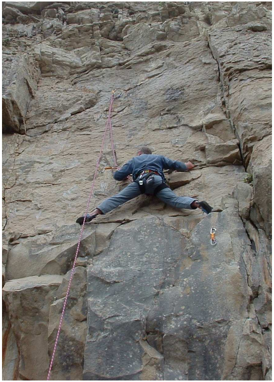
M. Paterson, U. Zwick: `Overhang`, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 19-44

Es geht besser :-)

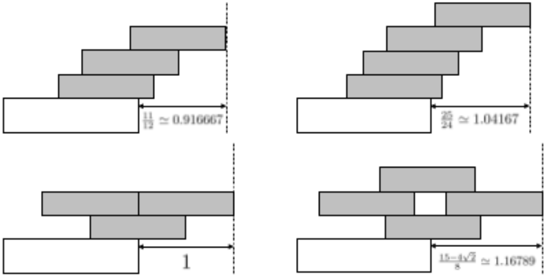
Tatsächlich gibt es noch andere Strategien, weitaus größere Überhänge zu stapeln. So haben Mike Paterson (Informatik-Professor in Warwick) und Uri Zwick (in Tel Aviv) eine Strategie entwickelt, mit der sich wirklich lange Überhänge mit relativ wenigen Steinen konstruieren lassen, beispielsweise einen Überhang der Länge drei mit nur zwanzig Steinen; dabei benutzen sie oftmals mehr als nur einen Stein pro Etage. Ihr Verfahren liefert ein polynomielles Wachstum statt einem exponentiellen...

M. Paterson, U. Zwick: `Overhang`, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 19-44

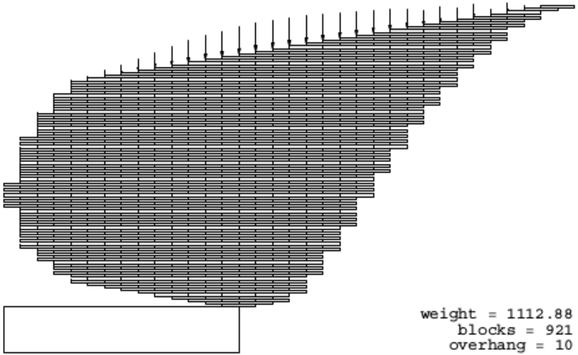
Mike Paterson und Uri Zwick



Nicht unbedingt hochstapeln!



Ein großes Beispiel :-)



1. Herausforderung: Mit Mathematik Brücken bauen!
2. Eine alternative Lösung
3. Was ist eigentlich Mathematik?

Was haben wir getan?

Im englischsprachigen Raum wird unser Überhangsproblem in die Schublade "Recreational Math" (= Erholungsmathematik) geschoben.

Hochschulmathematik sieht (insbesondere in der Lehre) anders aus!

Trotzdem ist in unserer Hochstapelei für Mathematik i.A. beispielhaft, wie ein Problem analysiert wird (mit dem Legen der Dominosteine), eine Strategie entwickelt und ein Ansatz formalisiert wird (mit den harmonischen Zahlen und der passenden Formel), und schließlich eine Einschätzung der Problemlösung gegeben wird (durch approximative Abschätzung).

Was haben wir getan?

Im englischsprachigen Raum wird unser Überhangsproblem in die Schublade "Recreational Math" (= Erholungsmathematik) geschoben.

Hochschulmathematik sieht (insbesondere in der Lehre) anders aus!

Trotzdem ist in unserer Hochstapelei für Mathematik i.A. beispielhaft, wie ein Problem analysiert wird (mit dem Legen der Dominosteine), eine Strategie entwickelt und ein Ansatz formalisiert wird (mit den harmonischen Zahlen und der passenden Formel), und schließlich eine Einschätzung der Problemlösung gegeben wird (durch approximative Abschätzung).

Was haben wir getan?

Im englischsprachigen Raum wird unser Überhangsproblem in die Schublade "Recreational Math" (= Erholungsmathematik) geschoben.

Hochschulmathematik sieht (insbesondere in der Lehre) anders aus!

Trotzdem ist in unserer Hochstapelei für Mathematik i.A. beispielhaft, wie ein Problem analysiert wird (mit dem Legen der Dominosteine), eine Strategie entwickelt und ein Ansatz formalisiert wird (mit den harmonischen Zahlen und der passenden Formel), und schließlich eine Einschätzung der Problemlösung gegeben wird (durch approximative Abschätzung).

Was haben wir getan?

Im englischsprachigen Raum wird unser Überhangsproblem in die Schublade “Recreational Math” (= Erholungsmathematik) geschoben.

Hochschulmathematik sieht (insbesondere in der Lehre) anders aus!

Trotzdem ist in unserer Hochstapelei für Mathematik i.A. beispielhaft, wie ein Problem analysiert wird (mit dem Legen der Dominosteine), eine Strategie entwickelt und ein Ansatz formalisiert wird (mit den harmonischen Zahlen und der passenden Formel), und schließlich eine Einschätzung der Problemlösung gegeben wird (durch approximative Abschätzung).

Was haben wir getan?

Im englischsprachigen Raum wird unser Überhangsproblem in die Schublade “Recreational Math” (= Erholungsmathematik) geschoben.

Hochschulmathematik sieht (insbesondere in der Lehre) anders aus!

Trotzdem ist in unserer Hochstapelei für Mathematik i.A. beispielhaft, wie ein Problem analysiert wird (mit dem Legen der Dominosteine), eine Strategie entwickelt und ein Ansatz formalisiert wird (mit den harmonischen Zahlen und der passenden Formel), und schließlich eine Einschätzung der Problemlösung gegeben wird (durch approximative Abschätzung).

Mathematik ist ein kreativer Prozess mit Erfolgen und Misserfolgen...

Was genau ist Mathematik? Eine allgemein anerkannte Definition, was Mathematik denn sei, gibt es (bislang) nicht!

Und ich kenne auch keine zutreffende ...

Was ist Mathematik?

Mathematik ist ein kreativer Prozess mit Erfolgen und Misserfolgen...

Was genau ist Mathematik? Eine allgemein anerkannte Definition, was Mathematik denn sei, gibt es (bislang) nicht!

Und ich kenne auch keine zutreffende ...

Mathematik ist ein kreativer Prozess mit Erfolgen und Misserfolgen...

Was genau ist Mathematik? Eine allgemein anerkannte Definition, was Mathematik denn sei, gibt es (bislang) nicht!

Und ich kenne auch keine zutreffende ...

Mathematik ist ein kreativer Prozess mit Erfolgen und Misserfolgen...

Was genau ist Mathematik? Eine allgemein anerkannte Definition, was Mathematik denn sei, gibt es (bislang) nicht!

Und ich kenne auch keine zutreffende ...

Mit einem Jeep in der Wüste...

Es gilt mit einem Jeep eine Wüste zu durchqueren. Es sind n Liter Benzin am Ausgangspunkt vorhanden. Der Jeep kann jederzeit höchstens einen Liter Benzin transportieren und legt mit einem Liter Benzin 10 Kilometer zurück. Der Jeep kann jederzeit jeden Anteil seines Benzinvorrats zurücklassen bzw. von ihm zuvor zurückgelassenes Benzin einsammeln (solange dies nicht den einen zulässigen Liter überschreitet). Nach jedem Ausflug muss der Jeep wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehren.

Wie weit kann man mit dem Jeep fahren?

Mit einem Jeep in der Wüste...

Es gilt mit einem Jeep eine Wüste zu durchqueren. Es sind n Liter Benzin am Ausgangspunkt vorhanden. Der Jeep kann jederzeit höchstens einen Liter Benzin transportieren und legt mit einem Liter Benzin 10 Kilometer zurück. Der Jeep kann jederzeit jeden Anteil seines Benzinvorrats zurücklassen bzw. von ihm zuvor zurückgelassenes Benzin einsammeln (solange dies nicht den einen zulässigen Liter überschreitet). Nach jedem Ausflug muss der Jeep wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehren.

Wie weit kann man mit dem Jeep fahren?

Mit einem Jeep in der Wüste...

Es gilt mit einem Jeep eine Wüste zu durchqueren. Es sind n Liter Benzin am Ausgangspunkt vorhanden. Der Jeep kann jederzeit höchstens einen Liter Benzin transportieren und legt mit einem Liter Benzin 10 Kilometer zurück. Der Jeep kann jederzeit jeden Anteil seines Benzinvorrats zurücklassen bzw. von ihm zuvor zurückgelassenes Benzin einsammeln (solange dies nicht den einen zulässigen Liter überschreitet). Nach jedem Ausflug muss der Jeep wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehren.

Wie weit kann man mit dem Jeep fahren?

Die letzte Folie

Die Texte und Bilder entstammen größtenteils dem Lehrbuch

`Elementare Zahlentheorie`
`- ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik`
von Nicola Oswald und Jörn Steuding (Springer, 2014)

sowie dem Artikel

`Overhang`
von Mike Paterson und Uri Zwick (*Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 19-44.

DANKE :-)

Die letzte Folie

Die Texte und Bilder entstammen größtenteils dem Lehrbuch

`Elementare Zahlentheorie`
`- ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik`
von Nicola Oswald und Jörn Steuding (Springer, 2014)

sowie dem Artikel

`Overhang`
von Mike Paterson und Uri Zwick (*Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 19-44.

DANKE :-)