Mathematische Logik
Teil 1: Terminierung von Goodstein-Folgen

Die mathematische Logik untersucht, was in einem gegebenen Kontext berechnet, bewiesen oder definiert werden kann. Neben dem inhärenten Interesse ergeben sich dabei Anwendungen und Verbindungen zu weiteren Teilgebieten der Mathematik sowie zu anderen Fächern wie der Informatik und der Philosophie.
In den vorliegenden Notizen (Teil 1) und den zugehörigen Übungsaufgaben (Teil 2) beweisen wir ein mathematisches Ergebnis über sogenannte Goodstein-Folgen. Dieses Ergebnis gehört noch nicht zur mathematischen Logik. Wir beweisen es, um es dann in einem Forschungsvortrag (Teil 3) aus dem Blickwinkel der Logik untersuchen zu können. In diesem Vortrag werden wir erklären, warum das Ergebnis über Goodstein-Folgen nur dann bewiesen werden kann, wenn verhältnismäßig starke Axiome angenommen werden. Alle drei Teile sind über die folgende Website verfügbar:

`https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/mathematicallogic/lehre/material/`

Das Konzept der Goodstein-Folge geht auf Reuben Goodstein zurück.[1] Es hat sich insbesondere durch des Unbeweisbarkeitsresultats von Laurie Kirby und Jeff Paris als bedeutend erwiesen.[2] Wir betrachten eine vereinfachte Version von Goodstein-Folgen mit nicht-hereditärer Basisdarstellung.[3]

Wir schreiben $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen. Für eine beliebige Basis $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ hat jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ eine eindeutige b-Normalform

$$n =_{b\text{-NF}} b^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + b^{e_k} \cdot c_k$$

mit natürlichen Zahlen $e_0 > \ldots > e_k$ und $c_i < b$ für $i \leq k$. Für $b = 10$ entspricht dies dem üblichen Dezimalsystem, wie sich aus

$$203706 =_{10\text{-NF}} 10^5 \cdot 2 + 10^3 \cdot 3 + 10^2 \cdot 7 + 10^0 \cdot 6$$

beispielhaft ersehen lässt.

Für einen gegebenen Startwert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ wird die Goodstein-Folge $G_n(0), G_n(1), \ldots$ berechnet, indem man zunächst n in 2-Normalform schreibt, in dieser Normalform jedes Vorkommen der Basis 2 durch 3 ersetzt und dann vom Ergebnis eins abzieht. Ist das Resultat ungleich 0, so schreibt man es nun in 3-Normalform, erhöht die Basis auf 4 und zieht wieder eins ab. So fährt man fort, was sich formal wie folgt ausdrücken lässt.

[1] R. Goodstein, On the restricted ordinal theorem. The Journal of Symbolic Logic 9(2) 1944, S. 33-41.

[2] L. Kirby and J. Paris, Accessible independence results for Peano arithmetic. Bulletin of the London Mathematical Society, 14(4) 1982, S. 285-293. Siehe für den historischen Hintergrund auch M. Rathjen, Goodstein's Theorem Revisited, S. 229-242 in: R. Kahle und M. Rathjen (Hg.), Gentzen's Centenary. Springer, Cham, 2015.

[3] Dieses wird F. Beckman and K. Mc Aloon zugeschrieben in E. Cichon, A short proof of two recently discovered independence results using recursion theoretic methods, Proceedings of the American Mathematical Society 87(4) 1983, S. 704-706.

Definition 1. Die Goodstein-Folge $G_n(0), G_n(1), \ldots$ mit Startwert $n \in \mathbb{N}$ ist bestimmt durch

$$G_n(0) = n, \quad G_n(i+1) = \begin{cases} (i+3)^{e_0} \cdot c_1 + \ldots + (i+3)^{e_k} \cdot c_k - 1 \\ \qquad \text{wenn } 0 < G_n(i) =_{(i+2)\text{-NF}} (i+2)^{e_0} \cdot c_1 + \ldots + (i+2)^{e_k} \cdot c_k, \\ 0 \qquad \text{wenn } G_n(i) = 0. \end{cases}$$

Exemplarisch berechnen wir

$$\begin{aligned} G_{42}(0) &=_{2\text{-NF}} 2^5 + 2^3 + 2^1 && = 42, \\ G_{42}(1) &= 3^5 + 3^3 + 3^1 - 1 =_{3\text{-NF}} 3^5 + 3^3 + 3^0 \cdot 2 && = 272, \\ G_{42}(2) &= 4^5 + 4^3 + 4^0 \cdot 2 - 1 =_{4\text{-NF}} 4^5 + 4^3 + 4^0 && = 1089, \\ G_{42}(3) &= 5^5 + 5^3 + 5^0 - 1 =_{5\text{-NF}} 5^5 + 5^3 && = 3250, \\ G_{42}(4) &= 6^5 + 6^3 - 1 =_{6\text{-NF}} = 6^5 + 6^2 \cdot 5 + 6^1 \cdot 5 + 6^0 \cdot 5 && = 7991, \\ G_{42}(5) &= 7^5 + 7^2 \cdot 5 + 7^1 \cdot 5 + 7^0 \cdot 5 - 1 && = 17091. \end{aligned}$$

Man sagt, dass die Goodstein-Folge mit Startwert n terminiert, wenn es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $G_n(i) = 0$ gibt. Aufgrund des angegebenen Beispiels und des starken Wachstums der Exponentialfunktion würde man Terminierung vielleicht nicht unbedingt erwarten. Wir werden jedoch zeigen, dass die Goodstein-Folge für jeden Startwert terminiert.

Betrachten wir zunächst, wie sich Ungleichungen zwischen natürlichen Zahlen auf Basis Ihrer Normalformen entscheiden lassen. Sei dazu

$$m =_{b\text{-NF}} b^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + b^{e_k} \cdot c_k \quad \text{und} \quad n =_{b\text{-NF}} b^{f_0} \cdot d_0 + \ldots + b^{f_l} \cdot d_l. \qquad (\star)$$

Wir nehmen zunächst an, dass $e_i = f_i$ und $c_i = d_i$ für alle $i \leq \min(k, l)$ gilt. Hat man nun $k < l$ bzw. $k > l$, so erhält man $m < n$ bzw. $m > n$. Illustriert wird dieser Fall durch die Ungleichung

$$203000 < 203706.$$

Im verbliebenen Fall finden wir ein $j \leq \min(k, l)$ mit $e_j \neq f_j$ oder $c_j \neq d_j$. Wir betrachten das kleinste solche j, sodass also $e_i = f_i$ und $c_i = d_i$ für alle $i \leq j$ gilt. Ist $e_i < f_i$ bzw. $e_i > f_i$, so ergibt sich $m < n$ bzw. $m > n$. Exemplarisch verdeutlicht wird dies durch

$$203049 < 203706.$$

Nehmen wir schließlich an, dass $e_j = f_j$ gilt. Ist nun $c_j < d_j$ bzw. $c_j > d_j$, so erhält man $m < n$ bzw. $m > n$. Anschaulich wird dies durch die Ungleichung

$$203653 < 203706.$$

Um diese Überlegungen kompakt zusammenzufassen, erklären wir, dass $(e, c) <_2 (f, d)$ für natürliche Zahlen c, d, e, f genau dann gilt, wenn man entweder $e = f$ und $c < d$ oder aber $e < f$ hat. Weiter schreiben wir $(e, c) = (f, d)$, um auszudrücken, dass $e = f$ und $c = d$ gilt. Wir sehen dann, dass Normalformen auf die folgende Weise lexikographisch verglichen werden.

Hilfssatz 2. *Für ganze Zahlen $b \geq 2$ und $m, n > 0$ mit b-Normalformen wie in $(\star)$ hat man*

$$m < n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k < l \text{ und } (e_i, c_i) = (f_i, d_i) \text{ für alle } i \leq k, \\ \text{oder es gibt ein } j \leq \min(k, l) \text{ mit } (e_j, c_j) <_2 (f_i, d_i) \\ \qquad \text{und } (e_i, c_i) = (f_i, d_i) \text{ für alle } i < j. \end{cases}$$

Da die Basis in einer Goodstein-Folge immer weiter erhöht wird, kann man auf die Idee kommen, als Limes eine unendliche Basis ω einzuführen. Formal wird dies durch die folgende Konstruktion erreicht. Es ist hier tatsächlich sinnvoll, ω als unendliche Zahl zu verstehen, da die übliche Bedingung $c_i < b$ an eine b-Normalform im Fall von $b = \omega$ für alle $c_i \in \mathbb{N}$ als erfüllt angesehen wird.

Definition 3. Sei ω^ω die Menge aller Ausdrücke der Form $\omega^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + \omega^{e_k} \cdot c_k$ mit beliebigen natürlichen Zahlen $c_0, \ldots, c_k > 0$ und $e_0 > \ldots > e_k$. Für $\alpha, \beta \in \omega$ mit

$$\alpha = \omega^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + \omega^{e_k} \cdot c_k \quad \text{und} \quad \beta = \omega^{f_0} \cdot d_0 + \ldots + \omega^{f_l} \cdot d_l$$

definieren wir

$$\alpha \prec \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k < l \text{ und } (e_i, c_i) = (f_i, d_i) \text{ für alle } i \leq k, \\ \text{oder es gibt ein } j \leq \min(k, l) \text{ mit } (e_j, c_j) <_2 (f_i, d_i) \\ \qquad\qquad\qquad \text{und } (e_i, c_i) = (f_i, d_i) \text{ für alle } i < j. \end{cases}$$

Die nächste Definition und der darauf folgende Hilfssatz bestätigen, dass ω^ω als Grenzwert der Normalformen mit endlicher Basis gelten kann.

Definition 4. Für jedes $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ sei die Funktion $\Omega_b : \mathbb{N} \backslash \{0\} \to \omega^\omega$ definiert durch

$$\Omega_b(n) = \omega^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + \omega^{e_k} \cdot c_k \quad \text{für} \quad n =_{b\text{-NF}} b^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + b^{e_k} \cdot c_k.$$

Da die Definition von $\prec$ genau dem Vergleich von b-Normalformen entspricht (siehe Hilfssatz 2 und Definition 3), erhält man das folgende.

Hilfssatz 5. *Für alle natürlichen Zahlen $b \geq 2$ und $m, n > 0$ gilt*

$$m < n \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_b(m) \prec \Omega_b(n).$$

Um die Goodstein-Folge mit Startwert n zu berechnen, haben wir einen Eintrag $G_n(i) > 0$ jeweils in $(i+2)$-Normalform geschrieben. Es bietet sich also an, die Funktion $\Omega_{i+2} : \mathbb{N} \to \omega^\omega$ zu verwenden, um ein zugehöriges Element von ω^ω zu finden.

Hilfssatz 6. *Für beliebige $n, i \in \mathbb{N}$ mit $G_n(i+1) > 0$ hat man $\Omega_{i+3}(G_n(i+1)) \prec \Omega_{i+2}(G_n(i))$.*

Beweis. Ein Blick auf Definition 1 liefert $\Omega_{i+3}(G_n(i+1)+1) = \Omega_{i+2}(G_n(i))$. Gemäß Hilfssatz 5 haben wir außerdem $\Omega_{i+3}(G_n(i+1)) \prec \Omega_{i+3}(G_n(i+1)+1)$, sodass das Ergebnis folgt. □

Der folgende Satz ist die entscheidende Zutat für unseren Beweis, dass jede Goodstein-Folge terminiert. Um das Ergebnis des Satzes auszudrücken, sagt man auch, dass $\prec$ wohlfundiert ist.

Satz 7. *Es gibt keine unendliche Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in ω^ω, sodass $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Wir definieren Funktionen $E, C : \omega^\omega \to \mathbb{N}$ durch

$$E(\alpha) = e_0 \quad \text{und} \quad C(\alpha) = c_0 \quad \text{für} \quad \alpha = \omega^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + \omega^{e_k} \cdot c_k.$$

Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass der Satz falsch ist. Wir wählen dann ein Gegenbeispiel $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ zu unserem Satz, bei dem $E(\alpha_0)$ so klein ist wie möglich. Dies entspricht einer Beweismethode, die als (vollständige) Induktion über die natürlichen Zahlen bekannt ist. Wir können schließen, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Wir haben $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $\beta_0, \beta_1, \ldots$ eine Folge in ω^ω mit $\beta_{j+1} \prec \beta_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so muss $E(\alpha_0) \leq E(\beta_0)$ gelten.

Aufgrund von Definition 3 impliziert Eigenschaft (i) zunächst $E(\alpha_i) \geq E(\alpha_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da keine Folge in $\mathbb{N}$ unendlich absteigen kann, muss es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $E(\alpha_i) = E(\alpha_N)$ für alle $i \geq N$ geben. Wir erhalten nun $C(\alpha_i) \geq C(\alpha_{i+1})$ für alle $i \geq N$. Dies liefert ein $I \geq N$ mit $C(\alpha_i) = C(\alpha_I)$ für alle $i \geq I$. Wir schreiben für $i \geq I$ nun

$$\alpha_i = \omega^{E(\alpha_I)} \cdot C(\alpha_I) + \omega^{e_{i,1}} \cdot c_{i,1} + \ldots + \omega^{e_{i,k(i)}} \cdot c_{i,k(i)}.$$

Hier muss $k(i) > 0$ gelten, weil sonst $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$ nicht erfüllt wäre. Für $j \in \mathbb{N}$ definieren wir $\beta_j \in \omega^\omega$ als den Ausdruck, der aus α_{I+j} entsteht, wenn man $\omega^{E(\alpha_I)} \cdot C(\alpha_I)$ weglässt. Es gilt also

$$\beta_j = \omega^{e_{I+j,1}} \cdot c_{I+j,1} + \ldots + \omega^{e_{I+j,k(I+j)}} \cdot c_{I+j,k(I+j)}.$$

Für alle $j \in \mathbb{N}$ erhalten wir $\beta_{j+1} \prec \beta_j$ aufgrund von $\alpha_{I+j+1} \prec \alpha_{I+j}$. Dies entspricht der Intuition, dass lexikographische Vergleiche unberührt bleiben, wenn wir gleiche Buchstaben am Anfang der beteiligten Wörter weglassen. Gemäß Definition 3 erhalten wir $E(\beta_0) = e_{I,1} < E(\alpha_I) \leq E(\alpha_0)$. In Anbetracht von Eigenschaft (ii) liefert dies den gewünschten Widerspruch. $\square$

Schließlich können wir das versprochene Ergebnis über Goodstein-Folgen herleiten.

Satz 8. *Die Goodstein-Folge für jeden Startwert $n \in \mathbb{N}$ terminiert, d.h. es gibt ein i mit $G_n(i) = 0$.*

Beweis. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass $G_n(i) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Gemäß Definition 4 erhalten wir eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ von Elementen $\alpha_i = \Omega_{i+2}(G_n(i))$ in ω^ω. Wegen Hilfssatz 6 gilt $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht aber Satz 7. $\square$

In dem soeben geführten Beweis kommen auf natürliche Weise Objekte ω und ω^ω vor, die mit guten Gründen als unendliche Zahlen aufgefasst werden können. Analysiert man die Terminierung von Goodstein-Folgen mit Mitteln der mathematische Logik, so sieht man – wie eingangs erwähnt –, dass diese unendlichen Objekte für den Beweis in einem gewissen Sinn unverzichtbar sind. Dies mag insofern erstaunen, als die Definition der Goodstein-Folgen selbst nur auf endliche Objekte Bezug nimmt. Etwas pathetisch gesprochen zeigt dies, dass das Unendliche sogar für die Mathematik des Endlichen essenziell ist.
Das Beispiel der Goodstein-Folgen mag hier nicht völlig überzeugen, da sich die benötigten Eigenschaften der lexikographischen Ordnung auf ω^ω durch Induktion über die natürlichen Zahlen einsehen lassen, ohne das man die höhere Theorie der unendlichen Mengen bemühen müsste. Die vorliegenden Ausführungen sind daher als Vorgeschmack auf sehr viel überzeugendere Ergebnisse zu verstehen. Wir erwähnen hier insbesondere das Minorentheorem über endliche Graphen, welches in der theoretischen Informatik eine zentrale Rolle spielt und als eines der tiefgreifendsten Ergebnisse der Mathematik bezeichnet worden ist.[4] Neil Robertson und Paul Seymour, die das Minorentheorem zuerst bewiesen haben, konnten zusammen mit Harvey Friedman auch eine logische Analyse liefern.[5] Diese zeigt, dass jeder Beweis des Minorensatzes auf außergewöhnlich starke Axiome zurückgreifen muss, die nur mithilfe von sehr komplexen unendlichen Mengen transparent gemacht werden können.

[4] In Kapitel 12 von R. Diestel, Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics 173. Springer, 2017.

[5] H. Friedman, N. Robertson und P. Seymour, The Metamathematics of the Graph Minor Theorem, S. 229-261 in: S. Simpson (Hg.), Logic and Combinatorics, Contemporary Mathematics 65, American Mathematical Society, 1987.