Mathe-Camp 2023
Prof. Dr. Anton Freund

04. September 2023

Mathematische Logik
Teil 2: Übungsaufgaben[1]

Übung 1. Berechnen Sie die Werte $G_n(i)$ der Goodstein-Folge für $n = 12$ und $i \leq 7$.

Übung 2. Beweisen Sie, dass

$$b^{n+1} - 1 = b^n \cdot (b-1) + \ldots + b^0 \cdot (b-1) \tag{$\star$}$$

für alle $b, n \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$ gilt. Wir rufen hier $b^0 = 1$ in Erinnerung.

Tipp: Gemäß der Beweismethode der Induktion genügt es, die folgende Aussage zu zeigen:

Die Gleichung $(\star)$ gilt für n wann immer sie für alle $m < n$ gilt.

Im vorliegenden Fall lässt sich dies in die folgenden beiden Aussagen aufteilen:

(i) Die Gleichung $(\star)$ gilt für $n = 0$.

(ii) Wann immer die Gleichung $(\star)$ für $n = m$ gilt, muss sie auch für $n = m + 1$ gelten.

Um einzusehen, dass $(\star)$ dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss, kann man wie folgt argumentieren: Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, welches $(\star)$ verletzt. Wir betrachten dann das kleinste solche n. Wegen (i) kann nicht $n = 0$ gelten. Im verbliebenen Fall können wir $n = m+1$ schreiben. Da wir n so klein wie möglich gewählt haben, muss die Gleichung $(\star)$ für alle $m < n$ gelten. Wegen (ii) gilt sie dann auch für n, was unserer Annahme widerspricht.

Übung 3. Zeigen Sie für beliebiges $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$, dass jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ eine b-Normalform

$$n =_{b\text{-NF}} b^{e_0} \cdot c_0 + \ldots + b^{e_k} \cdot c_k$$

mit natürlichen Zahlen $e_0 > \ldots > e_k$ und $c_0, \ldots, c_k > 0$ hat. Beweisen Sie dann Hilfssatz 2 aus der Einführungsvorlesung (Teil 1). Folgern Sie, dass jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ nur eine b-Normalform hat.

Tipp: Beweisen Sie die erste Aussage per Induktion über n (siehe den Tipp in der vorigen Übung). Wählen Sie dafür e_0 größtmöglich mit $b^{e_0} \leq n$. Wählen Sie dann c_0 größtmöglich mit $b^{e_0} \cdot c_0 \leq n$. Schreiben Sie nun $n = b^{e_0} \cdot c_0 + m$. Gilt $m > 0$, so erhalten wir wegen $m < n$ eine Normalform

$$m =_{b\text{-NF}} b^{e_1} \cdot c_1 + \ldots + b^{e_k} \cdot c_k.$$

Um hieraus eine Normalform für n zu gewinnen, müssen Sie $e_0 > e_1$ nachweisen. Beim Beweis von Hilfssatz 2 ist die vorige Übung hilfreich.

[1] Eine zugehörige Einführungsvorlesung (Teil 1) und ein Forschungsvortrag (Teil 3) sind online verfügbar über `https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/mathematicallogic/lehre/material/`.

Übung 4. Wir betrachten ω^ω und $\prec$ wie in Definition 3 der Einführungsvorlesung (oder auch eine beliebige andere Menge mit einer binären Relation). Leiten Sie jede der folgenden Charakterisierungen von Wohlfundiertheit aus jeder der anderen her:

(i) Es gibt keine unendliche Folge $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in ω^ω, sodass $\alpha_{i+1} \prec \alpha_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Jede nicht-leere Teilmenge $Q \subseteq \omega^\omega$ enthält ein $\prec$-kleinstes Element α, sodass also $\gamma \notin Q$ für alle $\gamma \prec \alpha$ gilt.

(iii) Das folgende Induktionsprinzip ist gültig: Betrachte eine Teilmenge $P \subseteq \omega^\omega$, sodass immer dann $\alpha \in P$ folgt, wenn $\gamma \in P$ für alle $\gamma \prec \alpha$ gegeben ist. Dann muss bereits $P = \omega^\omega$ gelten.

Bemerkung: Es genügt, wenn Sie (i)$\Leftrightarrow$(ii) und (ii)$\Leftrightarrow$(iii) zeigen.