



**Examensvorbereitung  
Gewöhnliche Differentialgleichungen  
für Lehramt Gymnasium**

Demo-Version (Kapitel 1)

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
<b>I Existenz- und Eindeutigkeitssätze</b>	<b>7</b>
1 Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme	7
2 Eindeutigkeit und lokale Existenz von Lösungen	22
2.1 Globale Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	22
2.2 Lokale Existenz von Lösungen . . . . .	30
3 Maximale Lösungen und ihr Randverhalten	41
<b>II Autonome Differentialgleichungen</b>	<b>60</b>
4 Flüsse, Trajektorien und Phasenporträts	60
4.1 Flüsse . . . . .	60
4.2 Trajektorien und Phasenporträts . . . . .	65
Weiterführende Betrachtungen: Typen von Trajektorien . . . . .	81
5 Erste Integrale und Hamilton-Systeme	88
<b>III Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>111</b>
6 Lösungsmengen linearer Differentialgleichungen	111
Weiterführende Betrachtungen: Das Reduktionsverfahren von d'Alembert und die Formel von Liouville . . . . .	125
7 Autonome lineare Differentialgleichungen	129
Weiterführende Betrachtungen: Die Jordan-Normalform . . . . .	149
8 Klassifikation ebener autonomer linearer Systeme	157
9 Skalare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	170
<b>IV Stabilitätstheorie</b>	<b>178</b>
10 Stabilität von Gleichgewichtspunkten	178
11 Eigenwertkriterien für Stabilität	190
11.1 Stabilität bei autonomen linearen Differentialgleichungen . . . . .	190
11.2 Das Prinzip der linearisierten Stabilität . . . . .	199

<b>12 Ljapunov-Funktionen</b>	<b>207</b>
<b>V Spezielle Lösungsmethoden und Anwendungen</b>	<b>227</b>
<b>13 Spezielle Lösungsmethoden und verschiedene Aufgaben</b>	<b>227</b>
13.1 Exakte Differentialgleichungen . . . . .	227
13.2 Bernoulli-Gleichungen . . . . .	233
13.3 Riccati-Gleichungen . . . . .	235
13.4 Lineare Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten . . . . .	235
<b>14 Einige Anwendungen</b>	<b>242</b>
14.1 Das $N$ -Körper-Problem und die Keplerschen Gesetze . . . . .	242
14.2 Das Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra . . . . .	253
14.3 Die logarithmische Spirale . . . . .	258
14.4 Oszillatoren . . . . .	260
14.4.1 Das mathematische Pendel mit Reibung . . . . .	260
14.4.2 Aperiodische Oszillatoren . . . . .	265
14.5 Lorenz-Gleichungen und Feigenbaumdiagramm . . . . .	266
<b>Literatur</b>	<b>279</b>
<b>Symbole</b>	<b>281</b>
<b>Index</b>	<b>283</b>
<b>Beispielaufgaben</b>	<b>287</b>
<b>Lösungen zu den Beispielaufgaben</b>	<b>297</b>
<b>Lösungen zu den Einsendaufgaben</b>	<b>344</b>



# Einleitung

Herzlich willkommen zu unserem Online-Kurs „Examensvorbereitung Gewöhnliche Differentialgleichungen für Lehramt Gymnasium“!

Dieser Kurs wendet sich an Lehramtsstudierende in höheren Semestern, die bereits eine einführende Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichung absolviert haben und sich nun auf die schriftliche Examensprüfung „Analysis“ vorbereiten wollen, in welcher Aufgaben aus dem Bereich Differentialgleichungen – neben der Funktionentheorie – bekanntlich einen wesentlichen Bestandteil bilden (im langjährigen Mittel knapp 40%). Er dient zur Ergänzung von Präsenzveranstaltungen zur Examensvorbereitung wie etwa den an vielen Universitäten üblichen Aufgabenseminaren („Repetitorien“). **Keinesfalls** ersetzt dieser Kurs den Besuch einer DGL-Vorlesung!

Bei der Konzeption dieses Kurses waren uns insbesondere die folgenden Aspekte wichtig:

- Dieser Kurs soll nicht nur als Examensvorbereitung dienen, sondern auch anhand von zahlreichen Beispielen die überragende Bedeutung von Differentialgleichungen zur Beschreibung unserer Welt illustrieren. Damit soll Ihnen als künftigen Lehrerinnen und Lehrern der nötige Hintergrund vermittelt werden, um später im Schulunterricht die Bedeutung der Mathematik für Technik, Wissenschaft, Kultur und Gesellschaft angemessen herausarbeiten zu können.
- Bei der Beschäftigung mit Differentialgleichungen ist Ihnen sicherlich alsbald aufgefallen, dass man (abgesehen von wichtigen Spezialfällen) i.Allg. keine expliziten Lösungen von Differentialgleichungen angeben kann. Dies sollte nicht als Makel, sondern als Ausdruck der Reichhaltigkeit dieses Gebiets der Mathematik begriffen werden. In diesem Kurs steht daher – über die Vermittlung der üblichen Lösungsstrategien und Rechen-techniken hinaus – die Frage im Vordergrund, wie man mithilfe theoretischer Resultate und geeigneter Abschätzungen das Verhalten von Lösungen *qualitativ* untersuchen kann.
- Solche qualitativen Betrachtungen des Lösungsverhaltens sind außerdem eine gute Gelegenheit, das für viele Bereiche der Analysis typische (und für den Schulunterricht insbesondere der Oberstufe essentielle!) Wechselspiel zwischen mathematischem Formalismus und mathematischer Vorstellung bzw. Anschauung zu trainieren: Beide sind wichtig, bleiben für sich genommen aber einseitig – bloßer Formalismus bleibt blutleer und degradiert die Mathematik zum Gespenst, vor dem man verständlicherweise Angst hat; bloße Anschauung ohne Formalismus bleibt vage und unpräzise und genügt den strengen logischen Ansprüchen der Mathematik nicht.
- Um Sie bei der besseren Vernetzung der einzelnen Aspekte des Stoffs zu unterstützen und das Verständnis von Zusammenhängen zu fördern, haben wir in großem Umfang Wiederholungen, Zusammenfassungen und vor allem Querverweise in das Skript eingearbeitet. Diese Verweise kann man in den meisten gängigen PDF-Betrachtern als Hyperlinks benutzen, d.h. durch Anklicken springt man direkt an die verlinkte Stelle. (Unter *Okular* muss man hierzu zunächst in den Navigations-Modus wechseln.) Zurück zur zuvor betrachteten Seite gelangt man z.B. unter *Adobe Reader* mit der Tastenkombination  $\text{Alt}+\leftarrow$ , unter *Okular* mittels  $\text{Alt}+\text{Umschalt}+\leftarrow$ . Damit ist nicht gesagt, dass das Skript hauptsächlich zum Lesen am Bildschirm gedacht ist: Sie können es ebenso ausdrucken und ganz „altmodisch“ zwischen den Verweisen hin- und herblättern 😊.

Für ein wirkliches Verständnis einer mathematischen Theorie ist es selbstverständlich unerlässlich, sich nicht nur mit den Resultaten, sondern auch mit deren Beweisen, ihrem „Innenleben“ gewissermaßen, zu beschäftigen. Da im Bereich der Gewöhnlichen Differentialgleichungen viele Beweise allerdings recht umfangreich und technisch sind – und auch angesichts des wiederholenden Charakters dieses Kurses – beschränken wir uns auf diejenigen Beweise, die uns als besonders wichtig für das Verständnis erscheinen oder die (auch im Hinblick auf Examensaufgaben) nützliche Ideen enthalten. Es ist in aller Regel sehr hilfreich, sich nach dem schrittweisen Nachvollziehen eines Beweises Rechenschaft darüber abzulegen, was denn die zentralen Ideen und Argumente darin waren; auch in dieser Richtung versuchen wir Ihnen einige Hilfestellungen zu geben.

Neben dem Nachvollziehen fremder Beweise ist es ebenso wichtig, das mathematische Argumentieren selbst aktiv zu üben. Zu diesem Zweck erhalten Sie dreimal pro Semester ein Übungsblatt mit jeweils 5 Aufgaben, von denen Sie jeweils 3 auswählen und schriftlich bearbeiten sollen, im Laufe des Semesters also insgesamt 9 von 15 Aufgaben. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Ihre Einreichungen werden von erfahrenen studentischen bzw. wissenschaftlichen Hilfskräften korrigiert. Für das Bestehen dieses Kurses ist es erforderlich, dass Sie mindestens 40% der maximal möglichen Punkte erreichen, also 36 von 90 Punkten. Kurz nach Ablauf der jeweiligen Einreichungsfrist werden wir Musterlösungen zu den jeweiligen Aufgaben freischalten. Auch wenn Sie keine ECTS-Punkte mehr benötigen, empfehlen wir Ihnen dringend, die Übungsblätter zu bearbeiten und Ihre Lösungen abzugeben: Dass die individuellen Rückmeldungen, die Sie dabei im Zuge der Korrektur erhalten, von unschätzbarem Wert im Hinblick auf Ihr Examen sein können, bedarf sicher keiner näheren Erläuterung.

Zusätzlich zu den Einsendeaufgaben enthält der Kurs 40 Beispielaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Es ist auch hier äußerst ratsam, dass Sie sich zumindest an einem Teil davon ernsthaft (insbesondere mit einer gewissen Hartnäckigkeit) selbst versuchen, bevor Sie in die Lösung schauen. Diese Aufgaben sind den bayerischen Staatsexamensklausuren seit 2000 entnommen, mit einem Schwerpunkt auf den Examina seit 2010; sie werden jedes Semester variiert und durch aktuelle Examensaufgaben ergänzt. Zugeordnet sind die Aufgaben den Kapiteln, zu denen sie thematisch am besten passen; gelegentlich kann es daher vorkommen, dass die Lösungen einzelne Resultate aus späteren Kapiteln benutzen. In den Haupttext sind weitere 40 Examensaufgaben mit Lösungen eingearbeitet.

Unser herzlicher Dank gilt Jochen Didam, Michael Heins, Janina Just, Marisa Schult, Kristin Weiser, Felix Weiß und Claudia Wiegmann, die mit großem Engagement einen Großteil der Graphiken in diesem Kurs erstellt, Fehler eliminiert und zahllose wertvolle Anregungen zur didaktischen und fachlichen Verbesserung des Textes beigesteuert haben. Ferner sind wir Christina Behrens, Caecilia Hepperle, Kaja Jurak und Larissa Lazarov für etliche Hinweise auf Schreibfehler und inhaltliche Inkonsistenzen sehr verbunden.

Und nun geht es endlich richtig los. Wir wünschen Ihnen viel Freude, Erfolg und inspirierende neue Einsichten bei der Beschäftigung mit unserem Kurs!

Würzburg, im August 2022

Johannes Stowasser und Jürgen Grahl

## Teil I

# Existenz- und Eindeutigkeitsätze

## 1 Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme

**Definition 1.1** Es seien ein  $n \in \mathbb{N}$ , ein echtes Intervall<sup>1</sup>  $J \subseteq \mathbb{R}$  und eine nicht-leere offene Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Die Punkte in  $J \times D$  werden in der Form  $(t, x)$  mit  $t \in J$  und  $x \in D$  geschrieben. Es sei  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung. Dann heißt die Gleichung

$$x' = f(t, x)$$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung** oder präziser ein **System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung**. Ausführlich schreibt es sich in der Form

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Systems ist eine differenzierbare Abbildung  $\varphi : I \rightarrow D$  auf einem in  $J$  enthaltenen, echten Intervall  $I$ , die

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt. Dabei ist die Ableitung  $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))^T$  der (Spalten-)Vektor aus den Ableitungen der Komponentenfunktionen von  $\varphi$ .

Ist überdies  $\varphi(t_0) = x_0$  für ein  $t_0 \in I$ , so nennt man  $\varphi : I \rightarrow D$  eine **Lösung des Anfangswertproblems**

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Die Abbildung  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird auch als **rechte Seite** der Differentialgleichung  $x' = f(t, x)$  bezeichnet.

Ist hierbei  $f$  von der ersten Variablen  $t$  unabhängig, also  $f(t, x) = g(x)$  mit einer stetigen Abbildung  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so nennt man die Differentialgleichung  $x' = f(t, x) = g(x)$  ein **autonomes System** oder eine **autonome Differentialgleichung**.

Es kann nützlich sein, sich  $t \in J$  als *Zeitvariable* und  $x \in D$  als *Ortsvariable* vorzustellen. Man denke beispielsweise an eine Differentialgleichung aus der klassischen Mechanik, bei der die Lösung  $\varphi : I \rightarrow D$  die Flugbahn eines Körpers unter dem Einfluss gewisser Kräfte darstellt. Besonders in der Physik wird oft  $\dot{\varphi}$  anstatt von  $\varphi'$  als Notation für die Ableitung von  $\varphi$  nach  $t$  benutzt, sofern  $t$  als Zeit interpretiert wird. Aufgrund ihrer schlechteren Lesbarkeit vermeiden wir diese Schreibweise weitgehend.

---

<sup>1</sup>Unter einem echten Intervall verstehen wir ein Intervall mit nicht-leerem Inneren, unabhängig davon, ob es offen, halb-offen oder abgeschlossen ist. Mit anderen Worten soll es nicht leer und nicht einelementig sein.

Autonome Differentialgleichungen sind diejenigen, bei denen die rechte Seite nicht explizit von der Zeit abhängt<sup>2</sup>. Diese Zeitinvarianz führt dazu, dass man aus Lösungen durch zeitliche Verschiebung neue Lösungen erhält.

**Proposition 1.2** *Es seien  $D$  eine nicht-leere offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung. Ist  $\varphi : I \rightarrow D$  eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

*auf einem echten Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , so ist für jedes  $s \in \mathbb{R}$  durch*

$$\psi : I + s \rightarrow D, \quad \psi(t) := \varphi(t - s)$$

*eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = f(x), \quad x(t_0 + s) = x_0$$

*gegeben. Hierbei ist  $I + s = \{t + s : t \in I\}$  das Translat von  $I$  um  $s$ .*

**Beweis.** Offenbar ist  $\psi$  wohldefiniert, und wegen  $\psi(t_0 + s) = \varphi(t_0 + s - s) = \varphi(t_0) = x_0$  sowie

$$\psi'(t) = \varphi'(t - s) = f(\varphi(t - s)) = f(\psi(t)) \quad \text{für alle } t \in I + s$$

gilt die Behauptung. Entscheidend für die Gültigkeit der Rechnung ist, dass  $f$  nicht von  $t$  abhängt. ■

Bei autonomen Systemen kann man also den „Zeitnullpunkt“ willkürlich wählen. Aus diesem Umstand ergeben sich einige Vereinfachungen und spezifische Phänomene, die wir in Teil II genauer unter die Lupe nehmen. Auch in unseren späteren Untersuchungen spielen autonome Systeme eine herausgehobene Rolle: Eine vollständige Lösungstheorie für lineare Differentialgleichungen existiert nur im autonomen Fall (siehe Kapitel 7), und in der in Teil IV behandelten Stabilitätstheorie beschränken wir uns ausschließlich auf autonome Systeme. In zahlreichen physikalisch bedeutsamen Differentialgleichungen kommen nicht nur erste, sondern auch höhere Ableitungen vor. Dies gibt Anlass zu einer weiteren Erklärung.

**Definition 1.3** *Es seien ein  $n \in \mathbb{N}$ , ein echtes Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  und eine nicht-leere offene Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Es sei  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige reellwertige Funktion. Dann heißt die Gleichung*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

*eine **gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung  $n$** . Unter einer Lösung dieser Differentialgleichung versteht man eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einem echten Intervall  $I \subseteq J$ , die*

$$\begin{aligned} &(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D \\ \text{und} \quad &\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \end{aligned} \quad \text{für alle } t \in I$$

*erfüllt. Ein **Anfangswertproblem** besteht hier in einer Vorgabe von Werten  $t_0 \in J$  und  $(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) \in D$ .*

---

<sup>2</sup>In der Physik unterscheidet man mitunter zwischen expliziter und impliziter Zeitabhängigkeit der rechten Seite einer Differentialgleichung. Mit letzterer ist eigentlich eine Trivialität gemeint, nämlich dass auch eine nicht explizit zeitabhängige rechte Seite  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach Einsetzen einer Lösung  $\varphi$  zeitabhängig wird, d.h. dass die Komposition  $t \mapsto g(\varphi(t))$  eine Funktion der Zeit ist. Strenggenommen werden hier also die Funktionen  $x \mapsto g(x)$  und  $t \mapsto g(\varphi(t))$  miteinander verwechselt – ein Vorgehen, das in der Physik auch in ähnlich gelagerten Fällen verbreitet ist und aus pragmatischen Gründen durchaus eine gewisse Berechtigung hat.



Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung der Gestalt (1.2) ist stets äquivalent zu einem System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung. Um dies einzusehen, führt man Variablen  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}$  ein und betrachtet das System

$$\begin{aligned} u_0' &= u_1 \\ u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= f(t, u_0, \dots, u_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ist  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung dieses Systems, so ist die reellwertige Funktion  $\psi := \varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (1.2). Ist umgekehrt  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (1.2), so ist  $\varphi := (\psi, \psi', \dots, \psi^{(n-1)})$  eine Lösung von (1.3).

Daher ist es in theoretischen Untersuchungen im Prinzip überflüssig, Differentialgleichungen höherer Ordnung zu betrachten: Man kann alles auf Systeme erster Ordnung zurückführen. Nur manchmal ist die besondere Gestalt des Systems (1.3) von Bedeutung, z.B. beim Studium *linearer* Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wir gehen hierauf in Kapitel 9 näher ein.

Man könnte nun noch *Systeme* von Differentialgleichungen höherer Ordnung einführen. Diese spielen für unsere Zwecke allerdings keine Rolle. Zudem liegt auf der Hand, wie sie sich – analog zum obigen Vorgehen – auf ein System erster Ordnung (mit größerer Variablenzahl) reduzieren lassen.

In den Definitionen 1.1 und 1.3 ist es wesentlich, dass die Differentialgleichung in nach der höchsten Ableitung aufgelöster Form vorliegt, und die gesamte weitere Theorie basiert entscheidend auf dieser Darstellung, die man auch eine **explizite Differentialgleichung** nennt. Differentialgleichungen wie etwa

$$x' + \sin x' = \arctan x + x^2 \tag{1.4}$$

werden durch die bisherigen Definitionen nicht abgedeckt. Allgemein nennt man eine Gleichung

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.5}$$

mit einer reellwertigen und stetigen Funktion  $F$  eine **implizite Differentialgleichung**.

Nach dem Satz über implizite Funktionen hat (1.5) in aller Regel zumindest „lokal“ eine explizite Darstellung der Gestalt (1.2): Die Funktion  $F$  sei stetig differenzierbar, und  $p^* = (t^*, q^*, x_n^*)$  mit  $t^*, x_n^* \in \mathbb{R}$ ,  $q^* \in \mathbb{R}^n$  sei eine Nullstelle von  $F$ . Wenn  $\frac{\partial F}{\partial x_n}(p^*) \neq 0$  ist, dann ist die Regularitätsvoraussetzung im Satz über implizite Funktionen [19, Satz 27.1] erfüllt<sup>3</sup>. Es gibt daher offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  von  $(t^*, q^*)$  und  $V \subseteq \mathbb{R}$  von  $x_n^*$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow V$ , so dass  $f(t^*, q^*) = x_n^*$  und alle in  $U \times V$  gelegenen Nullstellen  $(t, x_0, \dots, x_{n-1}, x_n)$  von  $F$  durch  $x_n = f(t, x_0, \dots, x_{n-1})$  gegeben sind.

Deswegen können wir uns im Folgenden weitestgehend auf das Studium expliziter Differentialgleichungen beschränken. (Eine wichtige Klasse von lediglich impliziten Differentialgleichungen, nämlich die sog. *exakten*, behandeln wir in Abschnitt 13.1.)

Die hier betrachteten Differentialgleichungen heißen *gewöhnlich*, weil ihre Lösungen Funktionen von nur einer reellen Variablen  $t$  sind. Hingegen nennt man eine Gleichung bzw. ein

---

<sup>3</sup>Im Beispiel der Differentialgleichung (1.4) ist  $n = 1$  und  $F(t, x_0, x_1) = x_1 + \sin(x_1) - \arctan(x_0) - x_0^2$ , also  $\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x_0, x_1) = 1 + \cos x_1$ . Die Regularitätsvoraussetzung ist daher außer für  $x_1 = (2k + 1)\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  immer erfüllt.

Gleichungssystem eine **partielle Differentialgleichung**, wenn in ihr partielle Ableitungen nach mehreren Variablen vorkommen und die Lösungen von diesen Variablen abhängen. Ein typisches Beispiel ist die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

für die Ausbreitung einer Welle im  $\mathbb{R}^n$ ; hierbei hängen die Lösungen  $u(t, x)$  sowohl von der Zeit  $t$  als auch vom Ort  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ab. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist ungleich komplizierter als die der gewöhnlichen und nicht Gegenstand dieses Kurses.

**Bemerkung 1.4** Ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung der Differentialgleichung  $x' = f(t, x)$  mit stetiger rechter Seite  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so liest man aus

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad (1.6)$$

ab, dass  $\varphi'$  stetig,  $\varphi$  also sogar *stetig* differenzierbar ist.

Setzt man  $f$  überdies als  $m$ -mal stetig differenzierbar (kurz: als von der Klasse  $C^m$ ) voraus, so ist  $\varphi$  von der Klasse  $C^{m+1}$ . Dies überlegt man sich wie folgt induktiv: Den Fall  $m = 0$  haben wir soeben behandelt. Ist die Behauptung für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  bereits gezeigt und ist  $f$  von der Klasse  $C^{m+1}$  (und damit insbesondere von der Klasse  $C^m$ ), so ist  $\varphi$  nach Induktionsvoraussetzung zumindest von der Klasse  $C^{m+1}$ . Nunmehr erkennt man aus (1.6), dass auch  $\varphi'$  von der Klasse  $C^{m+1}$ ,  $\varphi$  also von der Klasse  $C^{m+2}$  ist, womit der Induktionsschluss vollzogen ist.  $\square$

Bei der Betrachtung des Anfangswertproblems (1.1) stellen sich die folgenden (aufeinander aufbauenden) Fragen:

- (F1) Gibt es eine Lösung?
- (F2) Ist die Lösung eindeutig?
- (F3) Was ist das maximale Definitionsintervall der Lösung?
- (F4) Welche Eigenschaften hat die Lösung?
- (F5) Kann die Lösung durch eine explizite Formel dargestellt werden?

Hierbei bedürfen die Fragen (F2) und (F3) einer Präzisierung: Ist nämlich  $\varphi : I \rightarrow D$  eine Lösung von (1.1) auf einem Intervall  $I$  mit  $t_0 \in I$ , so ist für jedes Intervall  $I^* \subsetneq I$  mit  $t_0 \in I^*$  auch die Restriktion  $\varphi|_{I^*} : I^* \rightarrow D$  eine Lösung von (1.1), und diese ist trivialerweise von  $\varphi$  verschieden, da sie einen anderen Definitionsbereich hat. Die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung ist insofern erst dann sinnvoll, wenn man sie auf ein festes Definitionsintervall bezieht. A priori ist freilich oftmals nicht ersichtlich, wie groß das Definitionsintervall einer Lösung gewählt werden kann. Dieser Ungewissheit werden wir durch Einführung eines neuen Begriffs abhelfen: Wir legen kurzerhand das *maximale* Definitionsintervall zugrunde, auch dann, wenn wir dieses nicht konkret angeben können. Den Fragen, was „maximal“ hier genau bedeutet und warum ein solches maximales Definitionsintervall überhaupt existiert, wenden wir uns zu Beginn von Kapitel 3 zu.

Die Antworten auf (F1) bis (F5) hängen natürlich von den Eigenschaften der rechten Seite der Differentialgleichung ab. Wir werden einige Arbeit aufwenden, um die „richtigen“ Voraussetzungen zu finden, unter denen sich aussagekräftige Resultate formulieren lassen. Für eine spezielle, aber wichtige Klasse von skalaren Differentialgleichungen liefert der folgende Satz Antwort auf (F1), (F2) und (F5).

**Satz 1.5 (Trennung der Variablen)** Es seien  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf offenen, nicht-leeren Intervallen  $J, D \subseteq \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$x' = g(t) \cdot h(x)$$

eine **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

Für alle  $(t_0, x_0) \in J \times D$  mit  $h(x_0) \neq 0$  gibt es ein offenes Teilintervall  $I \subseteq J$  mit  $t_0 \in I$ , auf dem das Anfangswertproblem

$$x' = g(t) \cdot h(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.7}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung  $x : I \rightarrow D$  besitzt. Man erhält sie durch Auflösen von

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta = \int_{t_0}^t g(s) ds \tag{1.8}$$

nach  $x(t)$ .

Anstelle von „Trennung der Variablen“ ist auch der Begriff „Separation der Variablen“ gebräuchlich.

**Beweis. (Examensaufgabe)** Aufgrund der Stetigkeit von  $h$  dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$  gilt. Denn nach dem Permanenzprinzip ist  $h$  in einer gewissen offenen Umgebung von  $x_0$  nullstellenfrei, und man kann  $D$  durch diese Umgebung ersetzen. Dabei ändert sich nichts an der Gültigkeit der Behauptung, da nur die lokale Existenz einer Lösung gefordert wird: Zwar wird sich i.Allg. mit  $D$  auch das Definitionsintervall  $I$  der Lösung verkleinern, damit  $x(I) \subseteq D$  gewährleistet bleibt, dies ist hier jedoch unproblematisch, da nicht  $I = J$  verlangt wird, sondern nur  $I \subseteq J$ .

Nunmehr sind die Funktionen

$$G : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds, \quad H : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{h(\xi)} d\xi$$

wohldefiniert und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) stetig differenzierbar mit  $G' = g$  und  $H' = \frac{1}{h}$ . Als stetige und nullstellenfreie Funktion hat  $h$  nach dem Zwischenwertsatz keine Vorzeichenwechsel, und gleiches gilt daher für  $H'$ . Folglich ist  $H$  streng monoton und besitzt somit eine Umkehrfunktion  $H^{-1}$ , die wegen der Nullstellenfreiheit von  $H'$  selbst differenzierbar ist mit der Ableitung

$$(H^{-1})'(u) = \frac{1}{H'(H^{-1}(u))} = h(H^{-1}(u))$$

für alle  $u \in H(D) =: D^*$ . Nach dem Zwischenwertsatz ist  $D^*$  ein Intervall, und weil  $D^* = (H^{-1})^{-1}(D)$  das Urbild der offenen Menge  $D$  unter der stetigen Funktion  $H^{-1}$  ist, ist  $D^*$  offen<sup>4</sup>. Ebenso ist  $G^{-1}(D^*)$  offen. Wegen  $G(t_0) = 0 = H(x_0) \in D^*$  ist  $t_0 \in G^{-1}(D^*)$ . Daher können wir ein offenes Intervall  $I$  so wählen, dass  $t_0 \in I \subseteq G^{-1}(D^*) \subseteq J$  ist.

---

<sup>4</sup>Zur Erinnerung: Die Stetigkeit einer beliebigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen  $X$  und  $Y$  ist äquivalent dazu, dass für alle offenen Teilmengen  $V \subseteq Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist. Diese Charakterisierung der Stetigkeit ist so grundlegend, dass man sie sogar zur Definition des Stetigkeitsbegriffs in beliebigen topologischen Räumen heranzieht.

Zur Existenz der Lösung: Nach Konstruktion ist die Funktion

$$x : I \longrightarrow D, \quad x(t) := H^{-1}(G(t))$$

wohldefiniert. Es gilt sowohl

$$x'(t) = (H^{-1})'(G(t)) \cdot G'(t) = h(H^{-1}(G(t))) \cdot g(t) = g(t) \cdot h(x(t))$$

für alle  $t \in I$  als auch

$$x(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(H(x_0)) = x_0,$$

d.h.  $x$  ist eine Lösung von (1.7).

Zur Eindeutigkeit: Es sei nun  $\tilde{x} : I \longrightarrow D$  eine beliebige Lösung von (1.7). Dann gilt  $\tilde{x}(t_0) = x_0$  und

$$\frac{\tilde{x}'(s)}{h(\tilde{x}(s))} = g(s) \quad \text{für alle } s \in I.$$

Durch Integration und nachfolgende Substitution erhalten wir

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{t_0}^t g(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{\tilde{x}'(s)}{h(\tilde{x}(s))} ds \\ &= \int_{\tilde{x}(t_0)}^{\tilde{x}(t)} \frac{1}{h(\xi)} d\xi = \int_{x_0}^{\tilde{x}(t)} \frac{1}{h(\xi)} d\xi = H(\tilde{x}(t)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

für alle  $t \in I$ , und wegen

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) = H^{-1}(H(\tilde{x}(t))) = \tilde{x}(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

bedeutet dies  $\tilde{x} = x$ . Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, und die Gleichungskette in (1.9) enthält insbesondere auch (1.8). ■

Angenommen, in der Situation von Satz 1.5 gilt  $h(x_0) = 0$ . Offenbar hat (1.7) dann zumindest die konstante Lösung  $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x(t) = x_0$ . Diese ist aber im Allgemeinen in keiner Umgebung von  $t_0$  eindeutig. Manchmal kann man (1.8) auch in dieser Situation benutzen, um eine weitere Lösung zu ermitteln.

Die Rechnung (1.9) im obigen Beweis der Eindeutigkeit lässt sich geradezu als Blaupause für die praktische Durchführung der Methode der Trennung der Variablen verwenden, wie das folgende Beispiel illustriert.

**Beispiel 1.6 (Examensaufgabe)** Es sei  $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$\gamma = \sup_{t \geq 0} \int_0^t p(s) ds \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie für  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Lösungen  $x(t)$  des Anfangswertproblems

$$x'(t) = p(t) \cdot e^{x(t)} \quad \text{für } t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

(b) Beweisen Sie: Ist  $1 > \gamma e^{x_0}$ , so existiert die Lösung in (a) für alle Zeiten  $t \geq 0$ .

### Lösung:

- (a) Es sei  $x$  eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems. Mittels Trennung der Variablen erhält man für alle zulässigen  $t \geq 0$

$$\int_0^t p(s) ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{e^{x(s)}} ds = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{e^u} du = e^{-x_0} - e^{-x(t)},$$

also

$$x(t) = -\log \left( e^{-x_0} - \int_0^t p(s) ds \right). \quad (1.10)$$

Dass es sich dabei tatsächlich um eine Lösung handelt, ist klar. Sie ist definiert für alle  $t \geq 0$  mit  $\int_0^t p(s) ds < e^{-x_0}$ .

- (b) Es sei  $\gamma e^{x_0} < 1$ . Dann ist für alle  $t \geq 0$

$$e^{-x_0} - \int_0^t p(s) ds > \gamma - \int_0^t p(s) ds \geq 0$$

nach Definition von  $\gamma$ . Also existiert die Lösung aus (a) für alle  $t \geq 0$ , denn das Argument des Logarithmus in (1.10) ist stets positiv.  $\square$

**Warnung:** Eine häufige Fehlerquelle (gerade auch im Examen) bei der Anwendung der Trennung der Variablen resultiert aus einem unreflektierten und missbräuchlichen Umgang mit dem Leibnizschen Differentialkalkül: Dabei wird  $x' = \frac{dx}{dt}$  geschrieben und die Differentialgleichung  $\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x)$  durch „Multiplikation“ mit  $dt$  und Division durch  $h(x)$  formal in die Gestalt

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t) dt \quad (1.11)$$

gebracht, woraus dann durch unbestimmte Integration

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt + C$$

mit einer Integrationskonstanten  $C$  gefolgert wird. Während die letzte Gleichung korrekt ist (gegenüber (1.8) allerdings den Nachteil hat, dass man die Integrationskonstante noch an die jeweiligen Anfangswerte anpassen muss), sind Schreibweisen wie (1.11) (jedenfalls im Rahmen der elementaren Analysis) mathematisch unsinnig und sollten unbedingt vermieden werden: Wir können das Symbol  $\frac{dx}{dt}$  nur als Ganzes benutzen; die Differentiale  $dx$  und  $dt$  haben keine eigenständige Bedeutung und können insbesondere nicht naiv „multipliziert“ oder „gekürzt“ werden. – Der von Leibniz eingeführten Notation  $\frac{dx}{dt}$  lag ursprünglich die Vorstellung „infinitesimal kleiner“, aber dennoch von Null verschiedener Größen  $dx$  und  $dt$  zugrunde. Diese genügt natürlich nicht den Ansprüchen der modernen Mathematik an logische Klarheit und formale Exaktheit, weswegen für sie in der von Weierstraß begründeten heutigen Analysis kein Platz ist<sup>5</sup>. Es ist im Gegenteil deren Verdienst, durch Einführung der Epsilontik solch vage,

<sup>5</sup>Im Rahmen der von Abraham Robinson (1918–1974) in den 1960er Jahren begründeten *Nicht-Standard-Analysis* kann man formale Definitionen für die Differentiale  $dx$  und  $dt$  geben, ebenso in der Theorie der Differentialformen. In letzterer haben diese Differentiale allerdings mit „unendlich kleinen“ Größen (zunächst) nichts zu tun.

unausweichlich in logische Widersprüche führende Vorstellungen obsolet gemacht zu haben. Schreibweisen wie in (1.11) (und analog bei der Ketten- und der Substitutionsregel, welche ja der Methode der Trennung der Variablen zugrundeliegen) sind daher zwar suggestiv und insofern möglicherweise als Merkhilfe nützlich, sie sind aber ohne Beweiswert. Dass sie dennoch das „richtige“ Ergebnis liefern, liegt daran, dass die Notationen entsprechend geschickt eingerichtet worden sind.

Nur die wenigsten Typen von Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe von „Rezepten“ systematisch lösen. Dies wird oft dadurch verschleiert, dass man sich mit diesen weit überproportional oft beschäftigt – auch weil zu ihnen viele physikalisch bedeutsame zählen. Das wohl wichtigste Beispiel neben den Differentialgleichungen mit getrennten Variablen sind die linearen autonomen Differentialgleichungen; wir behandeln sie ausführlich in den Kapiteln 7 bis 9. In den meisten anderen Fällen hingegen ist es völlig aussichtslos, Lösungen in Form einer expliziten Formel angeben zu wollen<sup>6</sup>. Dies gilt bereits für Systeme von nicht-autonomen linearen Differentialgleichungen und erst recht für nicht-lineare Differentialgleichungen, wenn nicht zufällig spezielle Methoden (wie eben die Trennung der Variablen) oder Tricks (z.B. geschickte Substitutionen) greifen. Deswegen ist es so wichtig, die Existenz von Lösungen abstrakt nachzuweisen, ohne sie konkret ausrechnen zu müssen. Einem ähnlichen Zweck dient ein Großteil der in den folgenden Kapiteln entwickelten Theorie mit ihren Eindeutigkeitsaussagen, Erhaltungsgrößen (Ersten Integralen), Stabilitätsbetrachtungen usw.: Stets geht es darum, zumindest qualitative Aussagen über Lösungen zu gewinnen, die man nicht explizit bestimmen kann.

Der nächste Satz kommt mit besonders schwachen Voraussetzungen aus.

**Satz 1.7 (Existenzsatz von Peano<sup>7</sup>)** *Es sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes, nicht-leeres Intervall,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen und nicht-leer, und  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

für jeden Punkt  $(t_0, x_0) \in J \times D$  eine Lösung  $x : I \rightarrow D$  auf einem gewissen offenen Teilintervall  $I \subseteq J$  mit  $t_0 \in I$ .

Der Beweis beruht auf dem Satz von Arzelà-Ascoli und ist relativ tiefgehend. Daher verzichten wir auf ihn.

Der Satz von Peano hat den großen Nachteil, dass er nicht die Eindeutigkeit einer Lösung eines Anfangswertproblems auf einem *festen* Intervall garantieren kann.

**Beispiel 1.8** Das Anfangswertproblem

$$x' = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0 \tag{1.12}$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.7, da die rechte Seite  $(t, x) \mapsto 2\sqrt{|x|}$  der Differentialgleichung stetig auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist. Offenbar ist die konstante Funktion 0 eine Lösung. Mittels

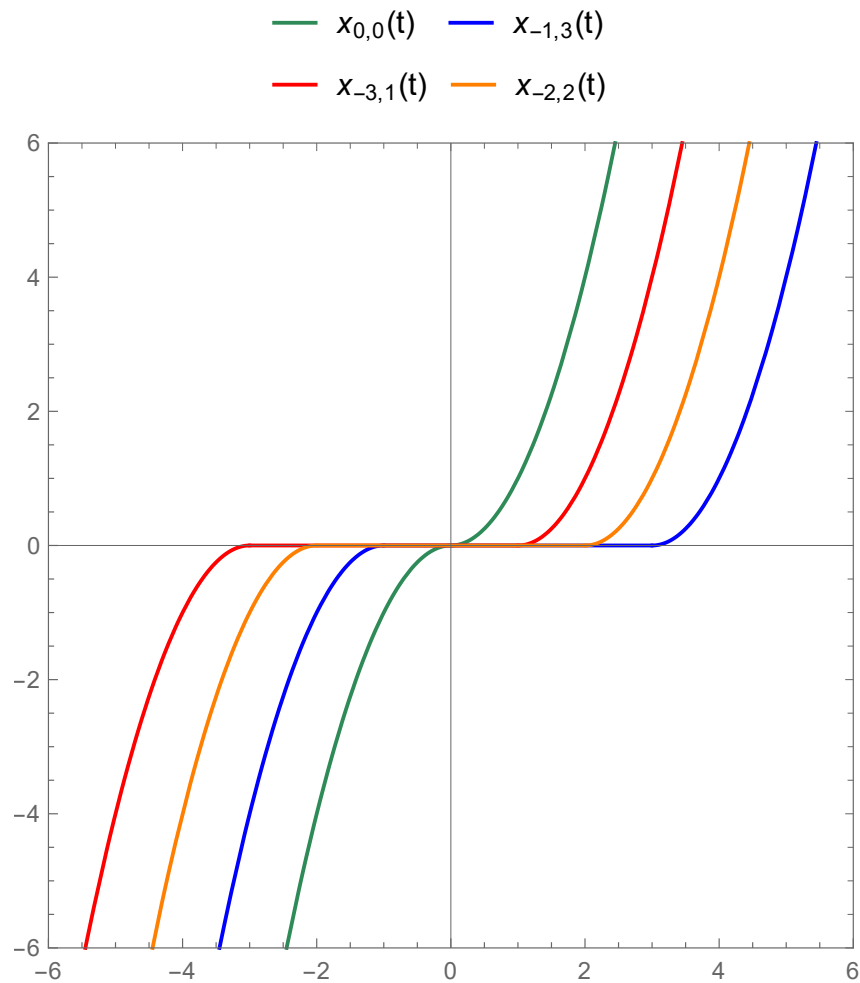
<sup>6</sup>Man kann natürlich numerisch Lösungen bestimmen, z.B. mittels des `Mathematica`-Befehls `NDSolve`, und diese graphisch darstellen.

<sup>7</sup>Nach Giuseppe Peano (1858–1932), der sich vor allem durch seine Beiträge zur mathematischen Logik und Mengenlehre und insbesondere durch die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen (Peano-Axiome) einen Namen gemacht hat, aber auch durch die Entdeckung raumfüllender Kurven, d.h. stetiger surjektiver Abbildungen von  $[0, 1]$  auf  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Trennung der Variablen (oder durch geschicktes Raten) ermittelt man die unendlich vielen weiteren Lösungen  $x_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die definiert sind durch

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t-a)^2, & \text{falls } t < a, \\ 0, & \text{falls } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^2, & \text{falls } t > b, \end{cases} \quad (1.13)$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq 0 \leq b$  beliebig gewählt werden können und (bei sinngemäßer Abwandlung der Definition) auch  $a = -\infty$  bzw.  $b = +\infty$  möglich ist. Dies ist ein Beispiel für „spontanes Wachstum“ (Abb. 1).



**Abb. 1:** Einige Funktionen der Familie (1.13)

Um mit der Methode der Trennung der Variablen besser vertraut zu werden, skizzieren wir, wie sich mit ihrer Hilfe alle Lösungen ergeben: Ist  $x$  eine in einer Umgebung  $J$  von  $t_0$  definierte Lösung mit  $x_0 = x(t_0) \neq 0$  und ist  $J$  o.B.d.A. so klein gewählt, dass auch  $x(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$  ist, so ist

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t 1 dt = \int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{2\sqrt{|x(t)|}} dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{2\sqrt{|u|}} = \pm \left( \sqrt{|x(t)|} - \sqrt{|x_0|} \right)$$

für alle  $t \in J$ ; welches der beiden Vorzeichen vorliegt, hängt davon ab, ob  $x$  auf  $J$  positiv oder negativ ist, ob also  $|x| = x$  oder  $|x| = -x$  ist. (Im letzteren Fall wechselt die Stammfunktion aufgrund der Kettenregel ihr Vorzeichen!) Damit ergibt sich

$$x(t) = \pm \left( t - t_0 \pm \sqrt{|x_0|} \right)^2.$$

Die o.g. Parameter  $a$  und  $b$  entsprechen also  $t_0 \mp \sqrt{|x_0|}$ . Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, hat man auf diese Weise allerdings nur eine notwendige Bedingung dafür hergeleitet, wie die Lösung aussieht. Einige Möglichkeiten scheiden deswegen aus, weil sie streng monoton fallen, während jede Lösung aufgrund der nicht-negativen rechten Seite der Differentialgleichung monoton steigen muss. Damit ergeben sich die o.g. Lösungen. Die Bedingung  $a \leq 0 \leq b$  rührt daher, dass  $x(0) = 0$  gelten soll. Zwar erhält man auch für  $a \leq b < 0$  bzw. für  $0 < a \leq b$  Lösungen, diese erfüllen aber nicht die Anfangsbedingung.

Nachteil dieses formalen Zugangs ist, dass er recht schwerfällig und aufgrund der Fallunterscheidungen für die Vorzeichen möglicherweise verwirrend ist. In konkreten Examensaufgaben genügt es in Fällen wie diesem völlig, die Lösungen einfach anzugeben, da ja offensichtlich ist, dass sie die Differentialgleichung erfüllen. Dafür reicht im Kern die Beobachtung, dass die „steigenden Äste“ von  $t \mapsto t^2$  (mit  $t \geq 0$ ) bzw.  $t \mapsto -t^2$  (mit  $t \leq 0$ ) Lösungen sind (dies ist offensichtlich); wenn man dann noch berücksichtigt, dass Lösungen zeitlich verschoben werden können (weil die Differentialgleichung autonom ist, siehe Proposition 1.2) und dass es außerdem die Nulllösung gibt, dann wird in natürlicher Weise klar, wie man diese drei Typen von Lösungen zu einer Lösung „verkleben“ kann, indem man die Stellen  $a$  und  $b$  vorgibt, an denen der eine Typ in den anderen übergeht.

Anfangswertprobleme vom Typ (1.12) haben auch eine physikalische Relevanz: Ein mit Wasser gefüllter zylinderförmiger Eimer vom Radius  $R > 0$  habe im Boden ein kreisförmiges Loch des Durchmessers  $r > 0$ , durch welches das Wasser herausfließt. Dessen Geschwindigkeit hängt von der Höhe  $x(t)$  des im Eimer verbliebenen Wassers ab. Die Wassermenge, die mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  durch das Loch fließt, ist natürlich gleich der Wassermenge, die den Eimer verlässt, d.h. es gilt

$$r^2 \pi \cdot v(t) = -R^2 \pi \cdot x'(t). \quad (1.14)$$

Weiterhin ist die potentielle Energie, die verloren geht, wenn eine kleine Menge an Wasser der Masse  $\Delta m$  den Eimer verlässt, gleich der kinetischen Energie der gleichen Menge an Wasser, die durch das Loch fließt. Für hinreichend kleine  $\Delta m$  gilt also näherungsweise

$$\Delta m \cdot g \cdot x \approx \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2,$$

wobei  $g$  die Fallbeschleunigung ist, die in Meeresspiegelhöhe den Wert  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  hat. Für  $\Delta m \rightarrow 0$  geht dies in eine Gleichheit über, was uns auf  $v^2 = 2gx$  führt. Hieraus und aus (1.14) erhalten wir die Differentialgleichung

$$x'(t) = -C \sqrt{|x(t)|} \quad \text{mit} \quad C = \sqrt{2g} \cdot \frac{r^2}{R^2} > 0.$$

Dies ist das sog. **Gesetz von Torricelli**<sup>8</sup>. Machen wir die Vorgabe, dass der Eimer zum Zeitpunkt  $T$  leer ist, also  $x(T) = 0$  gilt, so ergibt sich das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -C \sqrt{|x(t)|}, \quad x(T) = 0.$$

<sup>8</sup>Nach Evangelista Torricelli (1608–1647), der auch als Erfinder des Quecksilber-Barometers und als einer der Wegbereiter der Infinitesimalrechnung in die Annalen der Wissenschaftsgeschichte eingegangen ist.



Die Tatsache, dass dieses unendlich viele Lösungen auf  $\mathbb{R}$  hat, spiegelt die Möglichkeit wider, dass der Eimer bereits zu jedem früheren Zeitpunkt als  $T$  leergelaufen sein kann.  $\square$

**Beispiel 1.9 (Examensaufgabe)** Wir wollen Existenz und Eindeutigkeit globaler Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Anfangswertprobleme

$$x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \cdot \cos t, \quad x(0) = c$$

für  $c \geq 0$  diskutieren. Unter einer globalen Lösung verstehen wir dabei stets eine Lösung, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

- Bestimmen Sie für jedes  $c > 1$  eine globale Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems. Warum ist diese dessen einzige globale Lösung?
- Geben Sie für jedes  $c \in [0, 1]$  jeweils zwei verschiedene globale Lösungen des Anfangswertproblems an.

**Lösung:**

- Es sei ein  $c > 1$  fixiert. Es sei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung unseres Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall  $I$  um 0 mit  $x(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Wegen  $x(0) = c > 0$  ist dann aufgrund des Zwischenwertsatzes auch  $x(t) > 0$  und somit  $|x(t)| = x(t)$  für alle  $t \in I$ . Mittels Trennung der Variablen erhält man daher für alle  $t \in I$

$$\sin t = \int_0^t \cos s \, ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{2\sqrt{x(s)}} \, ds = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{x(t)} - \sqrt{c},$$

also

$$x(t) = (\sin t + \sqrt{c})^2.$$

Offensichtlich ist hierdurch tatsächlich eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung des Anfangswertproblems gegeben. Diese Betrachtung zeigt zudem die Eindeutigkeit *nullstellenfreier* Lösungen.

Nun sei auch  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine globale Lösung des Anfangswertproblems. Falls  $y$  nullstellenfrei ist, folgt mit dem bereits Gezeigten  $y \equiv x$ . Es bleibt also noch der Fall zu betrachten, dass  $y$  eine Nullstelle hat. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass diese positiv ist. Aus Stetigkeitsgründen hat  $y$  dann auch eine kleinste positive Nullstelle  $t_0$ .

Die Menge der Nullstellen von  $y$  ist nämlich – als Urbild der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  unter der stetigen Funktion  $y$  – abgeschlossen. Da zudem  $y(0) = c \neq 0$  ist, besitzt sie ein kleinstes positives Element.

Es ist also  $y(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, t_0)$ , so dass wir mit unseren obigen Überlegungen auf  $y(t) = x(t)$  für alle  $t \in [0, t_0)$  schließen können. Wiederum aus Stetigkeitsgründen folgt dann aber auch  $x(t_0) = y(t_0) = 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $x(t) \geq (\sqrt{c} - 1)^2 > 0$ .

Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung  $x$  gezeigt.

- Nun sei  $0 \leq c \leq 1$ . Zur Abkürzung setzen wir  $a := \arcsin \sqrt{c} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Dann sind zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems gegeben durch

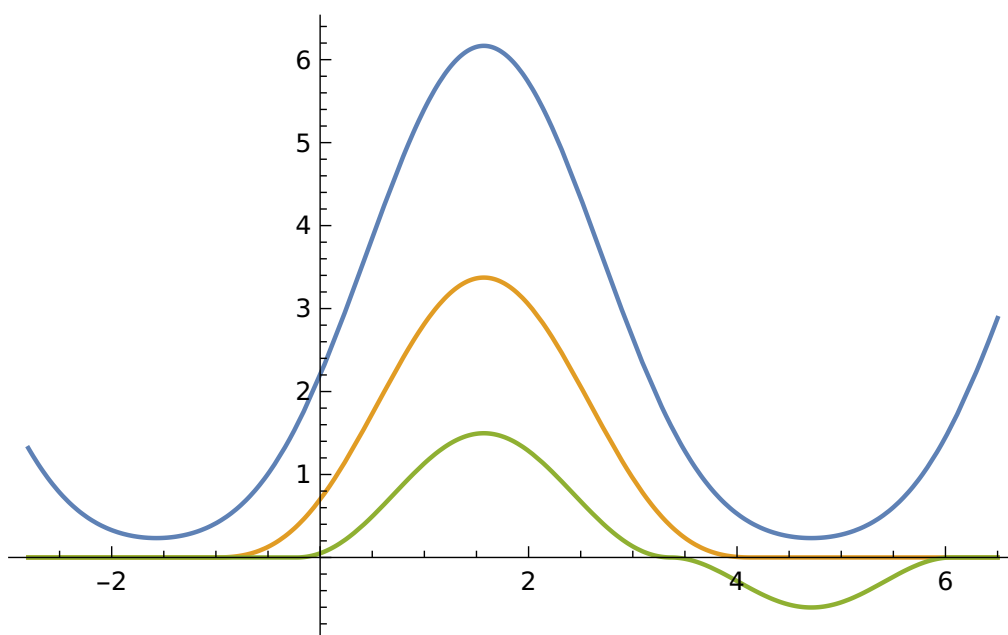
$$x_1(t) := \begin{cases} (\sin t + \sqrt{c})^2 & \text{für } -a \leq t \leq \pi + a, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$x_2(t) := \begin{cases} (\sin t + \sqrt{c})^2 & \text{für } -a \leq t \leq \pi + a, \\ -(\sin t + \sqrt{c})^2 & \text{für } \pi + a < t \leq 2\pi - a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Begründung:** Dass die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt sind, prüft man direkt nach. Dabei ist zu beachten, dass  $\sin t + \sqrt{c} \leq 0$  für  $\pi + a \leq t \leq 2\pi - a$  ist, so dass für diese  $t$

$$\sqrt{|-(\sin t + \sqrt{c})^2|} = -(\sin t + \sqrt{c})$$

gilt. Dass  $x_1$  und  $x_2$  überall differenzierbar sind, ist dadurch gesichert, dass  $t \mapsto (\sin t + \sqrt{c})^2$  an den „Nahtstellen“  $t = -a$ ,  $t = \pi + a$  und  $t = 2\pi - a$  den Wert 0 und die Ableitung 0 hat.



**Abb. 2:** Zu Beispiel 1.9: die Graphen der Lösungen  $x$  aus (a) für  $c = 2,2$  (blau) und  $x_1$  bzw.  $x_2$  aus (b) für  $c = 0,7$  (orange) bzw.  $c = 0,05$  (grün)

Die Wahl von  $x_1$  und  $x_2$  ist natürlich durch die Ergebnisse aus (a) inspiriert. Man kann auch im Fall  $0 \leq c \leq 1$  Lösungen mittels Trennung der Variablen bestimmen, gerät dabei allerdings aufgrund der durch den Absolutbetrag verursachten Vorzeichenproblematik in recht unangenehme Fallunterscheidungen. Da es nicht verlangt ist, *sämtliche* Lösungen zu bestimmen, empfiehlt es sich, dies zu vermeiden und stattdessen die in (a) gefundene Lösung  $x$  an den Fall  $0 \leq c \leq 1$  „anzupassen“.

Wie sich die Lösungen in Abhängigkeit von  $c$  verändern, illustriert das interaktive GeoGebra-Applet in Lektion 1.

□

Warum stellt es eine Komplikation dar, wenn es zu einem gegebenen Anfangswertproblem mehrere Lösungen gibt? Warum ist Eindeutigkeit so wichtig bzw. wünschenswert? Um ein Gefühl für diese Problematik zu bekommen, lohnt es sich, zwei Beispiele zu betrachten.

**Beispiel 1.10** In der Physik tauchen Differentialgleichungen zur Beschreibung von Naturgesetzen auf (siehe hierzu ausführlich Kapitel 14). Wir betrachten ein  $(x, y)$ -Koordinatensystem, in dem die Gravitation (mit konstanter Fallbeschleunigung  $g > 0$ ) in negativer  $y$ -Richtung wirkt. Dann lässt sich ein schiefer Wurf nach den Newtonschen Gesetzen durch das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = p_0, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}(0) = v_0 \quad (1.15)$$

beschreiben. Experimente zeigen, dass die Flugbahn durch den Anfangspunkt  $p_0$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vorherbestimmt ist. Damit die mathematische Theorie diese Beobachtung abbildet, ist es entscheidend, dass (1.15) auf jedem Intervall um 0 eindeutig lösbar ist.  $\square$

**Beispiel 1.11** Differentialgleichungen sind in der Mathematik ein wichtiges Werkzeug, um neue Funktionen mit interessanten Eigenschaften zu konstruieren. Ein sehr einfaches Beispiel ist die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die man statt über die Exponentialreihe auch als Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x, \quad x(0) = 1 \quad (1.16)$$

definieren könnte. Dies ist aber nur dann zielführend, wenn (1.16) auf  $\mathbb{R}$  eindeutig lösbar ist: Man möchte, dass die Differentialgleichung charakteristisch für die neue Funktion ist. Weniger triviale Beispiele für dieses Vorgehen liefern verschiedene Klassen von orthogonalen Polynomen, die u.a. für die theoretische Physik bedeutsam sind, wie etwa die Lagrange-, Hermite- Laguerre- und Tschebyschew-Polynome: Sie alle lassen sich als Lösungen spezieller Differentialgleichungen beschreiben bzw. definieren.  $\square$

**Bemerkung 1.12 (Eulersches Polygonzugverfahren)** Da man Differentialgleichungen i.Allg. nicht explizit lösen kann, muss man sich oft damit begnügen, mittels numerischer Verfahren zumindest eine (mehr oder minder stark fehlerbehaftete) Näherungslösung zu berechnen. Das einfachste und älteste solche Verfahren ist das 1768 von Euler eingeführte Polygonzugverfahren. Um seine Grundidee zu verstehen, fassen wir die Differentialgleichung als Bewegungsgleichung für ein Objekt (ein Teilchen, Auto, Flugzeug etc.) auf. Sie gibt dann zu jedem Zeitpunkt an, in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sich das Objekt bewegt (sofern es der Differentialgleichung gehorcht). Genauer: Ist  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit zumindest stetigem  $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so gibt  $x'(t_*) = f(t_*, x(t_*))$  den Tangentialvektor an die Bahn von  $x$  zur Zeit  $t_*$  und im Punkt  $x(t_*)$  an, und dieser enthält die Information über Betrag und Richtung des Vektors der Momentangeschwindigkeit zur Zeit  $t_*$ . (Eingehender werden wir diese Vorstellung in Abschnitt 4.2 diskutieren.) Um das Anfangswertproblem approximativ zu lösen, starten wir zur Zeit  $t_0$  im Punkt  $x_0$  und „laufen“ ein kurzes Stückchen, bis zum Zeitpunkt  $t_1$ , geradlinig in die durch  $f(t_0, x_0)$  gegebene Richtung, mit der Geschwindigkeit  $\|f(t_0, x_0)\|$ . Am dann erreichten Endpunkt  $x_1$  korrigieren wir die Laufrichtung: Wir laufen in Richtung  $f(t_1, x_1)$  weiter (und mit der durch die Norm dieses Vektors gegebenen Geschwindigkeit), bis zum Zeitpunkt  $t_2$ , in dem wir in einem Punkt  $x_2$  angelangt sind. Dort aktualisieren wir den Geschwindigkeitsvektor erneut, zu  $f(t_2, x_2)$  usw.

Man kann hoffen, auf diese Weise eine brauchbare Approximation an die tatsächliche Lösung zu gewinnen. Diese Hoffnung ist um so eher berechtigt, je kleiner wir die Schrittweite wählen. In gewisser Weise kommt das Polygonzugverfahren dem (nicht zu empfehlenden!) Versuch gleich, mit geschlossenen Augen Auto zu fahren, wobei man die Augen in regelmäßigen Abständen kurz öffnet, um die Richtung zu korrigieren: Je kürzer die Zeitintervalle zwischen diesen einzelnen Korrekturen sind, desto leichter lässt es sich vermeiden, in Schlangenlinien zu fahren oder gar völlig von der Straße abzukommen.

Ganz treffend ist diese Analogie freilich nicht: Beim Autofahren ist in aller Regel der „richtige“ Weg durch den Straßenverlauf vorgegeben; wenn man sich ein wenig von ihm entfernt hat, kann man dies durch geeignete Korrekturmanöver, die in Richtung Fahrbahnmitte zurückführen, ausgleichen. Beim Polygonzugverfahren hingegen kennt man die korrekte Lösung nicht und kann daher auch nicht zu ihr hinlenken<sup>9</sup>. Vielmehr muss man hier damit rechnen, dass einmal eingetretene Abweichungen Bestand haben und sich im Laufe der Zeit immer weiter vergrößern. Man muss also gewissermaßen darauf hoffen, dass die Straße sehr breit ist und dadurch auch größere Abweichungen zu keinem Unglück führen.

Konkret umsetzen lässt sich das Polygonzugverfahren wie folgt: Ist  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine exakte Lösung des Anfangswertproblems mit  $I = [a, b]$  und  $a < t_0 < b$ , so zerlegen wir das Intervall  $I_+ := [t_0, b]$  durch die Einführung von Teilpunkten  $t_1, \dots, t_m$  mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  in  $m$  Teilintervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k = 0, \dots, m-1$ ). (Für  $I_- := [a, t_0]$  kann man analog vorgehen.) Es seien  $h_k := t_{k+1} - t_k$  die Längen dieser Teilintervalle. Für  $h \rightarrow 0$  gilt

$$x(t_k + h) = x(t_k) + h \cdot x'(t_k) + o(h) = x(t_k) + h \cdot f(t_k, x(t_k)) + o(h)$$

mit dem **Landau-Symbol**  $o(\cdot)$ ; hierbei stellt „ $r(s) = o(\varphi(s))$  für  $s \rightarrow 0$ “ eine Kurzschreibweise für  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(s)}{\varphi(s)} = 0$  dar.

Damit können wir die unbekanntenen Werte  $x(t_k)$  wie folgt annähern: Haben wir – ausgehend von  $x(t_0) = x_0$  – bereits Approximationen  $x_j \approx x(t_j)$  für  $j = 0, \dots, k$  gefunden, so approximieren wir

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) = x(t_k + h_k) &\approx x(t_k) + h_k \cdot f(t_k, x(t_k)) \\ &\approx x_k + h_k \cdot f(t_k, x_k). \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} := x_k + h_k \cdot f(t_k, x_k) \quad \text{für alle } k = 0, \dots, m-1.$$

Die gesuchte Näherungslösung  $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ergibt sich hieraus durch lineare Interpolation der Werte  $x_k$  und  $x_{k+1}$  auf den Intervallen  $[t_k, t_{k+1}]$ , d.h. indem man

$$x^*(t) := x_k + \frac{t - t_k}{h_k} \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}]$$

setzt. Mathematisch läuft das Polygonzugverfahren also auf (stückweise) lineare Approximationen (d.h. Taylor-Approximationen erster Ordnung) von Lösungen der Differentialgleichung hinaus.

<sup>9</sup>In der Terminologie der Kybernetik: Beim Autofahren liegt – entgegen der landläufigen Sprechweise – eine *Regelung* vor, die durch eine Rückkopplungsschleife charakterisiert ist: Der Ist-Wert wird ständig mit dem Soll-Wert verglichen, und in Abhängigkeit von der Differenz zwischen beiden werden geeignete Ausgleichsmaßnahmen ergriffen. Das Polygonzugverfahren hingegen entspricht lediglich einer *Steuerung*, bei der es keine solchen Ausgleichsmaßnahmen gegen Störungen gibt. – Die mathematische Modellierung von Regelungsvorgängen ist Gegenstand der *Kontrolltheorie*.

Wie wir oben festgestellt haben, müssen die Schrittweiten  $h_k$  hinreichend klein gewählt werden, um brauchbare Ergebnisse zu erhalten. Eine sehr einfache Umsetzung des Verfahrens besteht darin, die Teilpunkte  $t_k$  äquidistant zu wählen, so dass alle  $h_k$  gleich sind. Wesentlich geschickter ist es, die Schrittweite an die aktuellen „Gegebenheiten“ anzupassen. So liegt es nahe,  $h_k$  kleiner zu wählen, wenn  $\|f(t_k, x_k)\|$  groß ist oder wenn  $f(t_k, x_k)$  gegenüber  $f(t_{k-1}, x_{k-1})$  stark variiert hat – so wie man beim Autofahren die Lenkradstellung um so engmaschiger und feinfühlicher kontrollieren und ggf. korrigieren muss, je schneller man fährt und je kurviger der Fahrbahnverlauf ist. Diese sog. *Schrittweitensteuerung* stellt eine wichtige Aufgabe der numerischen Mathematik dar.

Das Eulersche Polygonzugverfahren ist mehr von didaktischer als von praktischer Relevanz. Sein Nachteil ist, dass es lediglich ein Verfahren der Ordnung 1 und damit vergleichsweise grob ist: Der globale Fehler, d.h. die Differenz zwischen exakter Lösung und Näherungslösung (gemessen z.B. in der Maximumsnorm, vgl. (2.5)), ist ungefähr proportional zur Schrittweite, wird also nur mit deren *erster* Potenz klein. Auf der Suche nach genaueren Verfahren bieten sich zweierlei Verfeinerungen an:

- Man kann für die Berechnung des jeweils nächsten Näherungswertes  $x_{k+1}$  nicht nur den letzten Näherungswert  $x_k$  heranziehen, sondern auch die davor bestimmten. (Solche Verfahren bezeichnet man als **Mehrschrittverfahren**, während das Euler-Verfahren ein **Einschrittverfahren** darstellt.) Anschaulich gesprochen erhält man auf diese Weise Informationen, wie sich die „Fahrtrichtung“ zuletzt verändert hat, wie stark also der „Straßenverlauf“ aktuell gekrümmt ist, welche man dann ein Stückchen in die Zukunft extrapolieren kann.
- Wir haben oben  $f(t_k, x_k)$  als Näherung für den Tangentialvektor im Punkt  $x_k$  verwendet. Dies hat den Nachteil, dass dieser Tangentialvektor sehr schnell „veraltet“. Geschickter ist es, auch hier ein wenig „in die Zukunft zu blicken“ – so wie man sich beim Autofahren auch von den nächsten 10 bis 100 Metern des Straßenverlaufs leiten lässt: Beispielsweise könnte man auf dem Zeitintervall  $[t_k, t_{k+1}]$  als näherungsweise Tangentialvektor  $f(t_k + \frac{h_k}{2}, \xi_k)$  verwenden, wobei  $\xi_k$  eine grobe Näherung an  $x(t_k + \frac{h_k}{2})$  ist – etwa die, die man mit dem ursprünglichen Euler-Verfahren für die halbe Schrittweite  $\frac{h_k}{2}$  erhält. Diese Grundidee lässt sich noch wesentlich verallgemeinern und führt auf die sog. **Runge-Kutta-Verfahren**.

Selbstverständlich lassen sich diese beiden Ansätze auch miteinander kombinieren. Auf diese Weise gelangt man zu Verfahren höherer Ordnung, bei denen sich der globale Fehler durch höhere Potenzen der Schrittweite abschätzen lässt und die folglich wesentlich leistungsfähiger sind.  $\square$