



**Examensvorbereitung  
Funktionentheorie für Lehramt  
Gymnasium**

Demo-Version (Kapitel 1-2)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>5</b>
<b>1 Die komplexen Zahlen und die Gaußsche Zahlenebene</b>	<b>10</b>
1.1 Komplexe Zahlen . . . . .	10
1.2 Die Gaußsche Zahlenebene . . . . .	12
1.3 Veranschaulichung von Abbildungen der komplexen Ebene . . . . .	19
1.4 Aufgaben . . . . .	23
<b>2 Wiederholungen und Ergänzungen zur Analysis</b>	<b>25</b>
2.1 Topologische Grundbegriffe . . . . .	25
2.2 Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	29
2.3 Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	32
2.4 Potenzreihen und Taylor-Reihen . . . . .	34
2.5 Elementare transzendente Funktionen . . . . .	40
2.6 Aufgaben . . . . .	44
<b>3 Holomorphe Funktionen</b>	<b>45</b>
3.1 Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	45
3.2 Der Zusammenhang von komplexer Differenzierbarkeit mit Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	49
3.3 Lokal konforme Abbildungen . . . . .	54
3.4 Beweise . . . . .	59
3.5 Aufgaben . . . . .	62
<b>4 Wege, Wegintegrale und Umlaufszahlen</b>	<b>64</b>
4.1 Wege . . . . .	64
4.2 Wegzusammenhang und Zusammenhang . . . . .	66
4.3 Komplexe Wegintegrale . . . . .	70
4.4 Die komplexe Version des HDI . . . . .	78
4.5 Die Umlaufszahl . . . . .	79
4.6 Nullhomologe Wege und einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	82
4.7 Beweise und Ergänzungen . . . . .	84
4.8 Beispieldurchgangen . . . . .	92

<b>5 Die Integralsätze der Funktionentheorie</b>	<b>93</b>
5.1 Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel . . . . .	93
5.2 Der Residuensatz . . . . .	99
5.3 Beweise und Ergänzungen . . . . .	102
5.4 Aufgaben . . . . .	115
<b>6 Taylor- und Laurent-Reihen</b>	<b>117</b>
6.1 Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen . . . . .	117
6.2 Laurent-Reihen . . . . .	124
6.3 Beweise . . . . .	131
6.4 Aufgaben . . . . .	135
<b>7 Das Argumentprinzip und der Satz von Rouché</b>	<b>137</b>
7.1 Das Argumentprinzip . . . . .	137
7.2 Der Satz von Rouché . . . . .	141
7.3 Beweise . . . . .	145
7.4 Aufgaben . . . . .	146
<b>8 Grundprinzipien der Funktionentheorie</b>	<b>147</b>
8.1 Das Identitätsprinzip . . . . .	147
8.2 Das Maximum- und das Offenheitsprinzip . . . . .	150
8.3 Lokal injektive Abbildungen . . . . .	155
8.4 Beweise . . . . .	161
8.5 Aufgaben . . . . .	165
<b>9 Riemannsche Sphäre und Möbius-Transformationen</b>	<b>168</b>
9.1 Die Riemannsche Sphäre . . . . .	168
9.2 Möbius-Transformationen und Automorphismengruppen . . . . .	171
9.3 Holomorphe Abbildungen des Einheitskreises in sich . . . . .	178
9.4 Beweise und Ergänzungen . . . . .	179
9.5 Aufgaben . . . . .	188
<b>10 Ganze Funktionen und isolierte Singularitäten</b>	<b>189</b>
10.1 Ganze Funktionen . . . . .	189
10.2 Isolierte Singularitäten . . . . .	194
10.3 Beweise . . . . .	202
10.4 Aufgaben . . . . .	207

<b>11 Holomorphe Logarithmen und Wurzeln</b>	<b>210</b>
11.1 Beweise . . . . .	217
11.2 Aufgaben . . . . .	218
<b>12 Grenzprozesse bei holomorphen Funktionen</b>	<b>219</b>
12.1 Die Sätze von Weierstraß und Hurwitz . . . . .	219
12.2 Die Sätze von Montel und Vitali . . . . .	221
12.3 Beweise und Ergänzungen . . . . .	223
12.4 Aufgaben . . . . .	229
<b>13 Der Riemannsche Abbildungssatz und konforme Abbildungen</b>	<b>230</b>
13.1 Der Riemannsche Abbildungssatz . . . . .	230
13.2 Charakterisierung einfach zusammenhängender Gebiete . . . . .	234
13.3 Beweise . . . . .	237
13.4 Aufgaben . . . . .	244
<b>14 Die „Residuenmethode“ zur Berechnung reeller Integrale</b>	<b>246</b>
14.1 Aufgaben . . . . .	254
<b>15 Diverses</b>	<b>256</b>
15.1 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip . . . . .	256
15.2 Harmonische Funktionen . . . . .	258
15.3 Einige anspruchsvollere, aber lehrreiche Aufgaben . . . . .	261
15.4 Beweise . . . . .	273
15.5 Aufgaben . . . . .	278
<b>Literatur</b>	<b>280</b>
<b>Index</b>	<b>280</b>
<b>Lösungen zu den Beispielaufgaben</b>	<b>284</b>
<b>Lösungen zu den Einsendeaufgaben</b>	<b>345</b>

# Einleitung und Motivation

*Fremder in New York: „Können Sie mir sagen, wie ich zur Carnegie Hall komme?“ Antwort: „Üben, üben, üben“.<sup>1</sup>*

Herzlich willkommen zu unserem Online-Kurs „Examensvorbereitung Funktionentheorie für Lehramt Gymnasium“!

Dieser Kurs wendet sich an Lehramtsstudierende in höheren Semestern, die bereits eine einführende Vorlesung zur Funktionentheorie absolviert haben und sich nun auf die schriftliche Examensprüfung „Analysis“ vorbereiten wollen, in welcher Aufgaben zur Funktionentheorie bekanntlich einen wesentlichen Bestandteil bilden (im langjährigen Mittel etwas mehr als 50%). Er dient zur Ergänzung von Präsenzveranstaltungen zur Examensvorbereitung wie etwa den an vielen Universitäten üblichen Aufgabenseminaren („Repetitorien“). **Keinesfalls** ersetzt dieser Kurs den Besuch einer Funktionentheorie-Vorlesung!

Die Funktionentheorie wird (neben der Algebra) weithin als einer der anspruchsvollsten Bestandteile des gymnasialen Lehramtsstudiums empfunden; selbst Examenskandidaten haben oftmals spürbar Berührungsängste gegenüber dem Umgang mit komplexen Zahlen und den (differenzierbaren) Abbildungen zwischen ihnen (was vielleicht nicht zuletzt an der leicht einschüchternden Begriffsbildung „komplexe Zahlen“ liegt, die zugegebenermaßen unter Marketing-Aspekten nicht die allerglücklichste ist 😊). Daher zunächst, bevor wir richtig loslegen, ein paar Worte zur Ermutigung und zum Abbau der Berührungsängste:

- Vom *algebraischen* Standpunkt aus mag man einem Körper, in dem man Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen kann, mit einem gewissen Misstrauen begegnen – das bis zu einem gewissen Grad durchaus verständlich ist (und auch eine lange historische Tradition hat, insofern als die Verwendung komplexer Zahlen über Jahrhunderte hinweg durchaus umstritten war). Vom *geometrischen* Standpunkt sollten die komplexen Zahlen und die komplex differenzierbaren Funktionen aber alsbald ihren Schrecken verlieren – dank des Modells der Gaußschen Zahlenebene, welches von unschätzbarem Wert für die rasante Entwicklung der Funktionentheorie<sup>2</sup> im 19. Jahrhundert war: In diesem Modell ist der Körper  $\mathbb{C}$  letztlich nichts anderes als die Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die man allerdings mit einer zusätzlichen multiplikativen Struktur versieht; die Addition lässt sich damit als gewöhnliche Vektoraddition veranschaulichen, und auch die Multiplikation bekommt eine geometrische Bedeutung, sobald man Polarkoordinaten eingeführt hat.

In gewissem Sinne knüpft die Funktionentheorie daher an die in der Schule geometrie der Mittelstufe behandelten Ähnlichkeitstransformationen (Translationen, Drehstreckungen und Spiegelungen) der Ebene an: Komplex differenzierbare Abbildungen verhalten sich „lokal“, im Kleinen, tatsächlich „fast überall“ (genauer: abseits ihrer Ableitungsnullstellen) wie Ähnlichkeitstransformationen, unter Ausschluss allerdings von Spiegelungen. Anders als in der Schule geometrie werden jedoch bei etwas globalerer Betrachtung

<sup>1</sup>entnommen aus dem nicht nur für Musikliebhaber lesenswerten Buch *C. Drösser: Der Musikverführer - Warum wir alle musikalisch sind, Rowohlt, Reinbek 2011*

<sup>2</sup>Der Begriff „Funktionentheorie“ ist eigentlich irreführend; es handelt sich natürlich nicht um eine allgemeine Theorie völlig beliebiger Funktionen, sondern „nur“ um die Theorie der differenzierbaren komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Verzerrungseffekte relevant; diese röhren von den nichtlinearen Termen in den Taylor-Entwicklungen dieser Funktionen her.

Dieser geometrische Aspekt der Funktionentheorie wird leider oft übersehen. Wir werden ihn daher in diesem Kurs sehr in den Mittelpunkt stellen.

- Der komplexe Differenzierbarkeitsbegriff ist deutlich stärker als der reelle, was dazu führt, dass viele aus dem Reellen bekannten „pathologischen“ Phänomene in der komplexen Analysis überhaupt nicht auftreten. Ganz anders als bei der reellen Differenzierbarkeit gilt beispielsweise, dass Funktionen, die auf einer offenen Menge einmal komplex differenzierbar sind, dort bereits unendlich oft differenzierbar sind. Zwischen den Funktionswerten komplex differenzierbarer Funktionen bestehen starke innere Bindungen, die es in dieser Form im Reellen nicht gibt. Sie sind es, die die eigentliche Faszination der Funktionentheorie ausmachen.
- Die Funktionentheorie benötigt kaum Methoden aus der mehrdimensionalen Analysis, sondern ist vom Flair eher eine eindimensionale Theorie: Es wird „lediglich“ der eindimensionale reelle Vektorraum  $\mathbb{R}$  durch den eindimensionalen komplexen Vektorraum  $\mathbb{C}$  ersetzt.

An einigen wenigen Stellen werden wir zwar (hoffentlich erhellende) Querverbindungen zur mehrdimensionalen reellen Differentialrechnung kennenlernen, diese stehen aber nicht im Vordergrund.

- Da die in der Funktionentheorie betrachteten komplex differenzierbaren Funktionen insbesondere stetig sind, können wir uns völlig auf den (hoffentlich wohlvertrauten) Riemannschen Integralbegriff beschränken. Kenntnisse der Lebesgue-Theorie sind nicht erforderlich (wenngleich die starken Konvergenzsätze der Lebesgue-Theorie gelegentlich die Chance böten, die Argumentation zu vereinfachen.)

Dieser Kurs ist in 15 Lektionen gegliedert, die den gesamten examensrelevanten Funktionentheorie-Stoff abdecken. Die Stoffanordnung unterscheidet sich spürbar von dem in Vorlesungsskripten und den meisten Lehrbüchern üblichen: Während sie dort primär von der Notwendigkeit bestimmt ist, die Theorie streng logisch aufzuziehen und dabei nur auf bereits bewiesene Resultate zurückzugreifen, steht in unserem Kurs das Bestreben im Vordergrund, die funktionentheoretischen Phänomene aus verschiedenen Blickwinkeln zu beleuchten und die tiefen Zusammenhänge zwischen ihnen herauszuarbeiten; daher greifen wir nicht nur auf die Resultate aus früheren Lektionen zurück, sondern auch auf die aus nachfolgenden Lektionen voraus, so dass manche Themen in mehreren Lektionen (in unterschiedlicher Ausführlichkeit) behandelt werden<sup>3</sup>. Dieses Vorgehen trägt auch der Tatsache Rechnung, dass dieser Kurs ja primär wiederholenden Charakter hat. Besonders wichtig ist uns dabei das Wechselspiel zwischen mathematischem Formalismus und mathematischer Vorstellung bzw. Anschauung, welches gerade in der Funktionentheorie entscheidend für das mathematische Verständnis ist: Beide sind wichtig, bleiben für sich genommen aber einseitig – bloßer Formalismus bleibt blutleer und degradiert die Mathematik zum Gespenst, vor dem man verständlicherweise Angst hat; bloße Anschauung ohne Formalismus bleibt vage und unpräzise und genügt den strengen logischen Ansprüchen der Mathematik nicht.

Um Sie bei der besseren Vernetzung der einzelnen Aspekte der Funktionentheorie zu unterstützen, haben wir in großem Umfang Querverweise in das Skript eingearbeitet, so dass

---

<sup>3</sup>Auch unsere Beweise machen an einigen wenigen Stellen von Resultaten aus späteren Kapiteln Gebrauch. Natürlich können Sie versichert sein, dass es dabei nicht zu Zirkelschlüssen kommt.

Sie dieses bis zu einem gewissen Grade auch wie ein Online-Lexikon benutzen können. Diese Verweise kann man in den meisten gängigen PDF-Betrachtern als Hyperlinks benutzen, d.h. durch Anklicken springt man direkt an die verlinkte Stelle. (Unter *Okular* muss man hierzu zunächst in den Navigations-Modus wechseln.) Zurück zur zuvor betrachteten Seite gelangt man z.B. unter *Adobe Reader* mit der Tastenkombination **Alt+←**, unter *Okular* mittels **Alt+Umschalt+←**. Damit ist nicht gesagt, dass das Skript hauptsächlich zum Lesen am Bildschirm gedacht ist: Sie können es ebenso ausdrucken und ganz „altmodisch“ zwischen den Verweisen hin- und herblättern ☺.

Bitte erschrecken Sie nicht angesichts des (Seiten-)Umfangs des vorliegenden Kurses: Dieser erklärt sich weniger durch die Stofffülle, sondern primär durch die Ausführlichkeit der Darstellung und die vielen Motivationen, Wiederholungen und Zusammenfassungen, die in den Kurs eingebaut sind; im Interesse einer möglichst flüssigen Lesbarkeit ist die Informationsdichte also möglicherweise geringer, als Sie es von anderen mathematischen Texten gewohnt sind.

Für ein wirkliches Verständnis der Funktionentheorie (wie jeder anderen mathematischen Disziplin) ist es absolut unerlässlich, sich nicht nur mit den Resultaten, sondern auch mit deren Beweisen, ihrem „Innenleben“ gewissermaßen, zu beschäftigen. Daher stellen wir die Beweise auch im Rahmen dieses Kurses zur Verfügung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese großenteils jeweils in einen eigenen Abschnitt am Ende der einzelnen Lektionen (vor den Aufgaben) ausgelagert – mit einigen Ausnahmen, in denen uns ein Beweis entweder als besonders wichtig für das Verständnis oder als potentiell „examenstauglich“ erscheint oder bereits als Examensaufgabe gestellt worden ist. Es ist in aller Regel sehr hilfreich, sich nach dem schrittweisen Nachvollziehen eines Beweises Rechenschaft darüber abzulegen, was denn die zentralen Ideen und Argumente darin waren; auch in dieser Richtung versuchen wir Ihnen einige Hilfestellungen zu geben<sup>4</sup>.

Bei der Beschäftigung mit einer komplexen Materie wie der Funktionentheorie sollte man sich aber auch bewusst sein, dass sich ein umfassendes Verständnis nicht über Nacht einstellt, sondern wie alle geistigen Entwicklungs- und Reifungsprozesse seine Zeit braucht, und man sollte sich diese nehmen, ohne mit sich selbst ungeduldig zu sein: Gras wächst nicht schneller, wenn man daran zieht<sup>5</sup>. Allerdings reicht der Faktor Zeit alleine natürlich nicht – ein vertieftes Verständnis, die Einsicht in größere Zusammenhänge erfordert vor allem auch eine beständige

---

<sup>4</sup>Letztlich ist die Herausforderung, sich mathematische Beweise sinnvoll einzuprägen, mit dem Problem der effizienten Datenkompression vergleichbar: Man kann ein Bild, das z.B. ein schwarzes Dreieck auf weißem Grund zeigt, pixelweise abspeichern und wird hierfür vielleicht 1 MB Speicherplatz benötigen. Man kann aber auch, wenn man sich der Struktur des Dreiecks bewusst ist, lediglich die Koordinaten der Eckpunkte abspeichern zusammen mit der Information, dass diese drei Punkte die Eckpunkte eines Dreiecks sind, dass dessen Inneres Schwarz und dessen äußeres Weiß ist. Auf diese Weise wird man mit einem Bruchteil des Speicherplatzes auskommen. Ähnlich verhält es sich mit mathematischen Beweisen: Man kann einen Beweis Schritt für Schritt auswendig lernen – was sehr aufwändig und fehleranfällig ist, sicher nicht zur Freude an der Mathematik und schon gar nicht zu einem tieferen Verständnis beiträgt. Sinnvoller ist es, die Grundstruktur eines Beweises herauszudestillieren, sich nur diese einzuprägen und sich die zusätzlich benötigten, oftmals rein technischen Details bei Bedarf selbst wieder abzuleiten.

<sup>5</sup>Leider gehen die gesellschaftlichen Erwartungen derzeit oftmals in genau die entgegengesetzte Richtung. Tanjev Schultz hat es in dem Artikel „*Generation der Lebenslauf-Optimierer*“ (Süddeutsche Zeitung vom 26.08.2011) treffend auf den Punkt gebracht: „*Politiker, Manager und Eltern schärfen den Jugendlichen gerne ein, dass sie bloß nicht den Anschluss verlieren dürfen. So haben sie eine Generation von Getriebenen geschaffen, die unvereinbare Erwartungen erfüllen und möglichst wenig nach links und rechts schauen sollen. Der Bildungsweg folgt streng den vorgegebenen Bahnen. Immer mehr Eindrücke und Wissensschnipsel in immer kürzerer Zeit zu sammeln – das gelingt nur akademischen Pauschaltouristen.*“ Um der eigenen Lebensqualität willen stellt sich die Frage, ob es wirklich sinnvoll ist, diesen kollektiven Beschleunigungswahn mitzumachen.

aktive Beschäftigung mit der Materie. Dies lässt sich damit vergleichen, wie man sich in einer neuen, unbekannten Stadt schrittweise orientiert: Als erstes wird man sich die täglich benutzten Routen einprägen – und vielleicht ängstlich bemüht sein, von diesen möglichst wenig abzuweichen; nach einer Weile wird man sicherer und mutiger werden und auch einmal andere Wege erkunden, wird sich in bisher unbekannte Stadtviertel vorwagen, bis man nach einigen Jahren die meisten Winkel kennt – und vor allem eine Übersichtskarte der Stadt vor dem geistigen Auge hat, die einen davor bewahrt, sich hoffnungslos zu verlaufen, wenn man doch einmal in eine unbekannte Ecke der Stadt gerät. Aus dem anfänglichen „geronnenen Wissen“, einem kargen Vorrat an wenigen, mühsam einstudierten Rezepten, wie man gewisse Routinewege zurücklegen kann, ist ein „*fluides Wissen*“ geworden, das es ermöglicht, sich auch in neuen und unerwarteten Situationen flexibel zurechtzufinden. Sich im Laufe dieses Orientierungsprozesses auch einmal so richtig verlaufen zu haben, hilft oft entscheidend dabei, sich künftig besser zurechtzufinden, denn aus den Fehlern, die man selber begeht, lernt man gewöhnlich am besten. Wichtig ist dabei natürlich, sich überhaupt erst einmal dem Risiko des Verlaufens auszusetzen; niemand käme auf die Idee, Orientierung in einer Stadt zu erlangen, indem er Abend für Abend den Stadtplan auswendig lernt, ohne dabei sein Haus zu verlassen. Genauso muss man auch in der Mathematik erst einmal manche geistigen Irr- und Umwege gehen, Rückschläge und Frustrationen überstehen, bis sich nach und nach die Erfolge in Form eines sich zunehmend vertiefenden Verständnisses einstellen.

Konkret bedeutet das, dass es neben dem Nachvollziehen fremder Beweise ebenso wichtig ist, das mathematische Argumentieren selbst aktiv zu üben<sup>6</sup>. Zu diesem Zweck sind zahlreiche Beispielaufgaben mit ausführlichen Lösungen in den Kurs eingearbeitet. Wir empfehlen Ihnen dringend, dass Sie sich zumindest an einem Teil davon ernsthaft (insbesondere mit einer gewissen Hartnäckigkeit) selbst versuchen, bevor Sie in die Lösung schauen. Außerdem erhalten Sie dreimal pro Semester ein Übungsblatt mit jeweils 5 bis 8 Aufgaben, von denen Sie etwa die Hälfte (insgesamt 10 von 20 Aufgaben im gesamten Semester) auswählen und schriftlich bearbeiten sollen. Ihre Einreichungen werden von erfahrenen studentischen oder wissenschaftlichen Hilfskräften korrigiert. Für das Bestehen dieses Kurses ist es erforderlich, dass Sie 40% der erreichbaren Punkte erzielen. Die Beispiel- und Einsende-Aufgaben sind fast ausschließlich den bayerischen Analysis-Staatsexamensklausuren seit 2000 entnommen, mit einem Schwerpunkt auf den Examina seit 2010. Die Aufgaben werden von Semester zu Semester variiert und um die jeweils aktuellen Examensaufgaben ergänzt. Zugeordnet sind die Aufgaben den Lektionen, zu denen sie thematisch am besten passen; gelegentlich kann es daher vorkommen, dass die Lösungen einzelne Resultate aus späteren Lektionen benutzen.

Zuletzt noch ein nicht-mathematischer Rat: Bei der Examensvorbereitung sollten Sie neben der fachlichen die mentale Vorbereitung nicht vernachlässigen; dazu gehören insbesondere ausgiebige Erholungspausen. Erinnern Sie sich also auch während Ihrer Examenszeit daran, dass es neben der Mathematik viele andere schöne und interessante Dinge im Leben gibt, viele weitere Möglichkeiten der persönlichen Entwicklung und Entfaltung, die nicht zu kurz kommen sollten. Entscheidend ist auch hier natürlich die richtige Balance; Richard David Precht drückt es in seinem Bestseller „*Wer bin ich – und wenn ja, wie viele?*“ wie folgt aus: „*Lernen und Genießen sind das Geheimnis eines erfüllten Lebens: Lernen ohne Genießen verhärmst, Genießen ohne Lernen verblödet.*“

---

<sup>6</sup>ebenso wie man Klavierspielen nur durch beharrliches üben und nicht durch Zuhören lernt – und es dabei als unvermeidlich in Kauf nimmt, dass sich das erste Herantasten an das und Herumtasten auf dem Klavier oft grauenhaft oder zumindest sehr holprig anhört. In beiden Fällen – beim Klavierspielen wie in der Mathematik – bedarf es einiger Frustrationstoleranz, nicht gleich vor den ersten Schwierigkeiten zu kapitulieren, sondern sich diesen zu stellen und an ihrer Bewältigung zu arbeiten.

Mein herzlicher Dank gilt unseren studentischen Hilfskräften Barbara Brems, David Pfrang, Amelie Roth, Christina Schädel und Johannes Stowasser. Sie haben mit unermüdlichem Engagement einen Großteil der Graphiken in diesem Kurs erstellt, Fehler eliminiert und zahllose wertvolle Anregungen zur didaktischen und fachlichen Verbesserung des Textes beigesteuert.

Und nun geht es endlich richtig los. Wir wünschen Ihnen viel Freude, Erfolg und inspirierende neue Einsichten bei der Beschäftigung mit der Funktionentheorie!

Würzburg, im Februar 2016,      Jürgen Grahl

# 1 Die komplexen Zahlen und die Gaußsche Zahlen-ebene

## 1.1 Komplexe Zahlen

Eine der wesentlichen Motivationen zur Einführung komplexer Zahlen besteht darin, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

keine Lösung in  $\mathbb{R}$  besitzt. Diesem Missstand hilft man durch Einführung der sog. **imaginären Einheit  $i$**  ab, die diese Gleichung löst. Allerdings kann man  $i$  nicht kurzerhand als Lösung dieser Gleichung „definieren“, sondern man muss zeigen, dass eine solche Lösung in einer geeigneten Obermenge von  $\mathbb{R}$  – in der man zudem „vernünftig“ rechnen können soll, die also möglichst die Struktur eines Körpers tragen soll – existiert.

Formal kann das dadurch geschehen, dass man den Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  mit einer zusätzlichen multiplikativen Struktur versieht, indem man nämlich

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \quad \text{für alle } (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

setzt. Man kann dann nachweisen, dass  $\mathbb{R}^2$  hiermit zu einem Körper wird. Er heißt der **Körper der komplexen Zahlen** und wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

In diesem Körper „findet“ man die reellen Zahlen wieder, wenn man das Element  $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$  mit der reellen Zahl  $a$  identifiziert. Wesentlich hierbei ist, dass die Rechenoperationen in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  miteinander **verträglich** sind: Es gilt

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ . In diesem Sinne ist  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$  enthalten, und  $\mathbb{R}$  wird zu einem Teilkörper von  $\mathbb{C}$ . Setzen wir nun

$$i := (0, 1),$$

so folgt  $i^2 = (-1, 0) = -1$ . Damit haben wir in  $\mathbb{C}$  die gewünschte Lösung  $i$  der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  gefunden. Wir nennen  $i$  die **imaginäre Einheit**. Selbstverständlich gilt auch  $(-i)^2 = -1$ . Für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  folgt nun

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \stackrel{?}{=} a + bi.$$

Das rechtfertigt die übliche Notation

$$a + bi$$

für komplexe Zahlen, die von jetzt an anstelle der (für konkrete Rechnungen wenig praktikablen) Schreibweise  $(a, b)$  benutzt wird. (In diesen beiden unterschiedlichen Schreibweisen  $a + bi$  und  $(a, b)$  für dasselbe Objekt deutet sich übrigens bereits das für die Funktionentheorie typische Zusammenfließen von geometrischen und algebraischen Aspekten an.)

Auf den ersten Blick mag man sich die Frage stellen, was mit einer solchen Erweiterung von  $\mathbb{R}$ , die zunächst nur die Lösung einer ganz speziellen Gleichung erlaubt, gewonnen ist. Denn natürlich kann man sich viele andere Gleichungen ausdenken, von denen a priori zu befürchten ist, dass sie in  $\mathbb{C}$  ebenso unlösbar sind wie in  $\mathbb{R}$ , so dass man  $\mathbb{C}$  immer weiter vergrößern müsste, um auch diese Gleichungen lösen zu können. Tatsächlich stellt sich jedoch heraus, dass in  $\mathbb{C}$  bereits *alle* Polynomgleichungen lösbar sind, so dass solche zusätzlichen

Erweiterungsschritte unnötig sind. Dies ist der Inhalt des berühmten *Fundamentalsatzes der Algebra* (Satz 10.5), für den als erster Carl Friedrich Gauß einen vollständigen Beweis vorgelegt hat (1799, im Rahmen seiner Dissertation). Dank der Methoden der im 19. Jahrhundert entwickelten Funktionentheorie lässt sich dieser Satz heute sehr elegant in wenigen Zeilen beweisen, nämlich durch Rückführung auf den Satz von Rouché (Satz 7.5) oder den Satz von Liouville (Satz 10.4) oder das Maximumprinzip (Satz 8.8).

Auch außerhalb der Funktionentheorie, insbesondere für die reelle Analysis, erweist sich die Kenntnis komplexer Zahlen und Funktionen als außerordentlich gewinnbringend:

1. Die (durch den Fundamentalsatz der Algebra gewährleistete) Existenz komplexer Lösungen von Polynomgleichungen benötigt man z.B. in der Linearen Algebra für die Eigenwerttheorie von linearen Abbildungen und in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. – Es sei hier z.B. an das grundlegende Stabilitätskriterium erinnert, wonach die Ruhelage 0 der linearen Differentialgleichung  $x' = Ax$  (mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) genau dann stabil ist, wenn alle Eigenwerte von  $A$  Realteil  $\leq 0$  haben und zusätzlich für die Eigenwerte mit Realteil 0 die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
2. Zwischen den elementaren transzendenten Funktionen  $\exp(x) = e^x$ ,  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  besteht die von Leonhard Euler (1707 – 1783) entdeckte wundervolle Identität

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Sie ist u.a. in der Elektrotechnik bei der Berechnung von Wechselstromkreisen und allgemeiner zur Beschreibung von Schwingungsvorgängen außerordentlich nützlich. Ein Spezialfall der Eulerschen Identität ist die Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

die fünf der wichtigsten mathematischen Konstanten (0, 1,  $i$ ,  $e$  und  $\pi$ ) miteinander in Zusammenhang bringt.

3. Manche Beweise funktionieren im Komplexen genauso wie im Reellen. Dann muss man sie nur einmal führen, nämlich im Komplexen. Dies gilt insbesondere für das Studium von Potenzreihen.
4. Die Verteilung der Primzahlen steht in engem Zusammenhang mit der Lage der komplexen Nullstellen der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion, welche eine zentrale Rolle in der analytischen Zahlentheorie spielt. Die **Riemannsche Vermutung**, wonach die nicht-reellen Nullstellen dieser Funktion allesamt Realteil  $\frac{1}{2}$  haben, zählt zu den größten ungelösten Problemen der Mathematik.

Der Preis für die Lösbarkeit der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  besteht allerdings darin, dass  $\mathbb{C}$  nicht zu einem *geordneten* Körper gemacht werden kann, denn für jeden geordneten Körper  $K$  und jedes  $x \in K$  gilt ja  $x^2 \geq 0$ , also  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ , also insbesondere  $x^2 + 1 \neq 0$ .

Wir verzichten darauf, die in den Körperaxiomen enthaltenen „Rechenregeln“ für komplexe Zahlen in ermüdender Vollständigkeit aufzulisten. Hingegen lohnt es sich, einige für  $\mathbb{C}$  eigentümliche Begriffe und die zugehörigen Rechenregeln zu notieren:

**Definition 1.1** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $z = a + bi$ . Dann heißt  $a = \operatorname{Re}(z)$  der **Realteil** und  $b = \operatorname{Im}(z)$  der **Imaginärteil** der komplexen Zahl  $z$ . Man setzt

$$\bar{z} := a - bi$$

und nennt  $\bar{z}$  die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**. Es ist

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

eine reelle Zahl und nicht negativ, und für  $z \neq 0$  ist  $z \cdot \bar{z} > 0$ . Man definiert

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$

und nennt diese reelle Zahl  $|z| \geq 0$  den (**Absolut-**)**Betrag** der komplexen Zahl  $z$ .

**Satz 1.2 (Rechenregeln in  $\mathbb{C}$ )** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z), \quad z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z},$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, \quad |zw| = |z| \cdot |w|, \quad |\bar{z}| = |z|.$$

Das Inverse  $z^{-1} = \frac{1}{z}$  einer komplexen Zahl  $z \neq 0$  ist

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

## 1.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Gemäß der Konstruktion von  $\mathbb{C}$  kann man sich die komplexe Zahl  $z = a + bi$  (mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ) als Punkt  $(a, b)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  veranschaulichen. In diesem Zusammenhang nennt man  $\mathbb{R}^2$  auch die **komplexe Zahlenebene** bzw. zu Ehren von Gauß die **Gaußsche Zahlenebene**. Die Darstellung  $z = a + bi$  für komplexe Zahlen ist dann die aus dem  $\mathbb{R}^2$  vertraute Darstellung von Vektoren in **kartesischen Koordinaten**.

Die komplexe Konjugation lässt sich geometrisch als Achsenspiegelung an der reellen Achse interpretieren (Abbildung 1).

Auch der Betrag  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  von  $z$  hat in der Zahlenebene eine einfache anschauliche Bedeutung: Er ist aufgrund des Satzes von Pythagoras der euklidische Abstand des Punktes  $z$  vom Nullpunkt.

Die Addition komplexer Zahlen  $z$  und  $w$  entspricht der vertrauten Vektoraddition im  $\mathbb{R}^2$  (Abbildung 2 (a)).

Die geometrische Bedeutung der Multiplikation komplexer Zahlen ist weniger augenfällig. Sie erschließt sich jedoch durch die Einführung von **Polarkoordinaten**: Man kann jede komplexe Zahl  $z$  in der Form

$$z = re^{it}$$

mit einem  $r \geq 0$  und einem  $t \in [0, 2\pi]$  darstellen. Aufgrund der **Formel von Euler**

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

erweist sich  $t$  hierbei als der Winkel, den  $z$  (als Vektor im  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst) mit der positiven reellen Achse einschließt (vgl. Abbildung 3). Man nennt  $t$  auch das **Argument** von  $z$  und

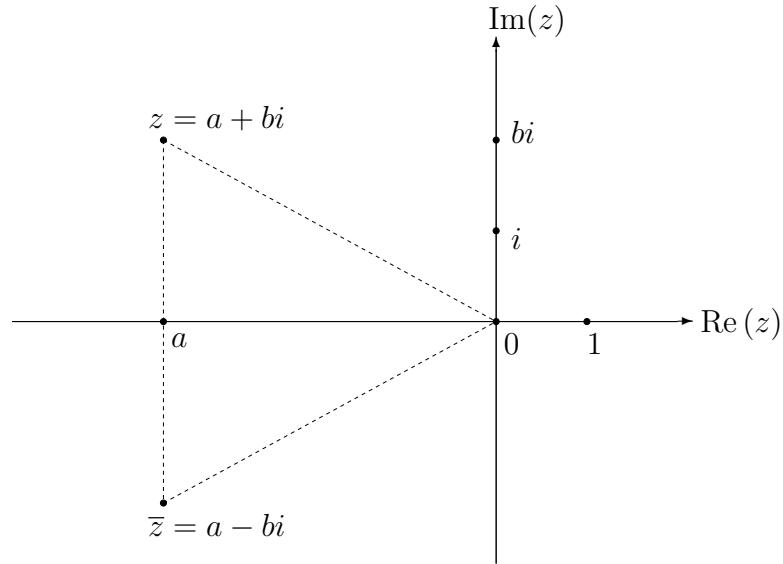


Abbildung 1: Geometrische Interpretation der komplexen Konjugation

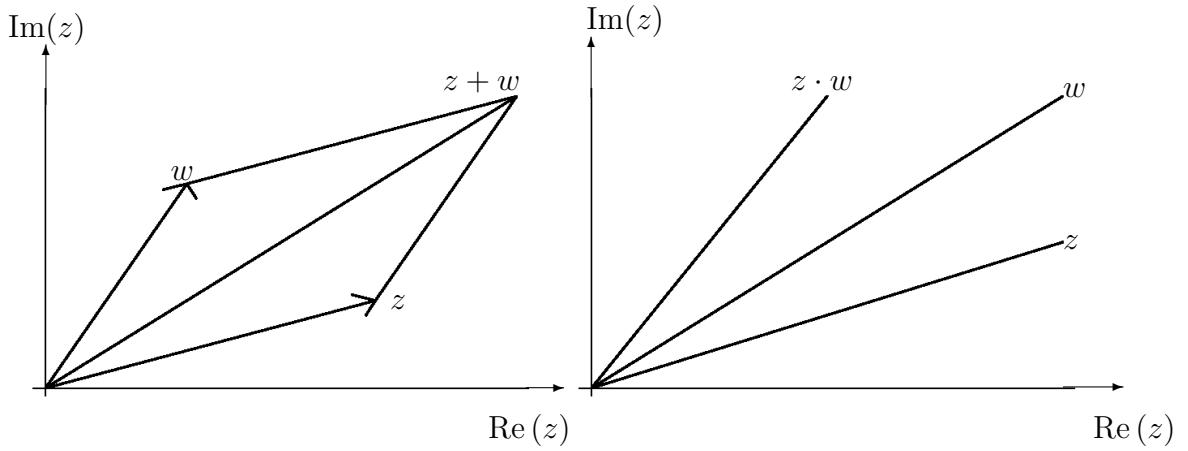


Abbildung 2: Geometrische Interpretation der (a) Addition und (b) Multiplikation in  $\mathbb{C}$

schreibt  $t = \arg(z)$ ; hierbei ist zu beachten, dass das Argument nur modulo  $2\pi$ , d.h. bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig ist (d.h. es ist  $e^{it} = e^{i(t+2k\pi)}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ). Aufgrund des „trigonometrischen Pythagoras“  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  ist weiter<sup>7</sup>

$$|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1.$$

Daher ist  $r = |re^{it}| = |z|$  der Betrag von  $z$ .

Nun gilt nach dem Additionstheorem der Exponentialfunktion

$$e^{is} e^{it} = e^{i(s+t)}$$

<sup>7</sup> **Warnung:** Für die nachstehende Rechnung ist es entscheidend, dass  $t \in \mathbb{R}$ . Für nicht-reelle  $z \in \mathbb{C}$  kann man **nicht** auf  $|e^{iz}| = 1$  schließen; für diese gilt zwar immer noch  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  (nach Definition des Sinus bzw. Cosinus, siehe S. 40) und auch  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ , aber  $\cos z$  bzw.  $\sin z$  sind i.Allg. nicht mehr reell und daher nicht mehr der Real- bzw. Imaginärteil von  $e^{iz}$ . Tatsächlich ist  $|e^{iz}| = e^{\text{Re}(iz)} = e^{-\text{Im}(z)}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , was offensichtlich genau für  $z \in \mathbb{R}$  den Wert 1 hat.

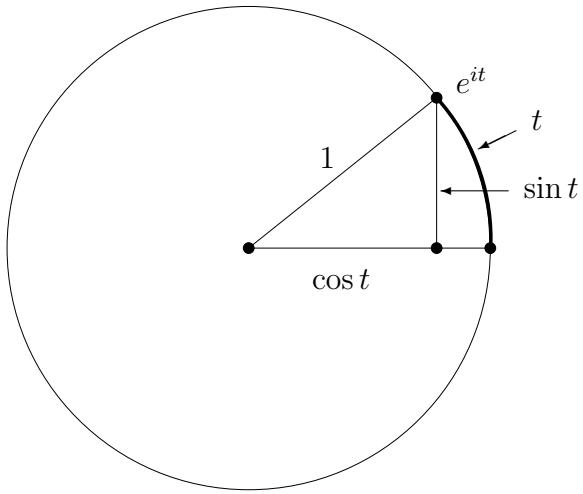


Abbildung 3: Zur Formel von Euler

für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ . Für das Produkt zweier komplexer Zahlen  $z = r_1 e^{it_1}$  und  $w = r_2 e^{it_2}$  ergibt sich damit

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) \cdot e^{i(t_1 + t_2)}.$$

Hierbei ist  $r_1 r_2$  der Betrag und  $t_1 + t_2$  das Argument von  $zw$ . Dies kann man so interpretieren: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge, und die Winkel addieren sich (Abbildung 2 (b)).

Insbesondere kann man also z.B. eine Linksdrehung um 90 Grad durch Multiplikation mit  $i = e^{i\pi/2}$  beschreiben.

Auch eine geometrische Interpretation der Inversion (Reziprokenbildung)  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ist nun möglich: Schreibt man wie oben  $z \neq 0$  in Polarkoordinaten  $z = r e^{it}$ , so ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-it} = \frac{1}{r} \cdot \overline{e^{it}}.$$

Hierbei beschreibt die Zuordnung  $r e^{it} \mapsto \frac{1}{r} \cdot e^{it}$  eine Spiegelung an der Einheitskreislinie: Der Radius wird invertiert und das Argument wird nicht verändert. Berücksichtigt man noch die sich anschließende komplexe Konjugation, so lässt sich die Inversion insgesamt also als Spiegelung an der Einheitskreislinie mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse interpretieren (vgl. Abbildung 4). Dabei werden das Innere und das äußere der Einheitskreislinie miteinander vertauscht. – Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall einer Möbius-Transformation, mit denen wir uns in Abschnitt 9.2 genauer beschäftigen werden.

Im Lichte dieser Betrachtungen kann man die wichtigsten Rechenregeln für komplexe Zahlen in verbaler Form wie folgt zusammenfassen:

- Addition (und damit auch Subtraktion) komplexer Zahlen geschieht (in kartesischen Koordinaten) komponentenweise: Man addiert die Real- und die Imaginärteile getrennt – ganz wie bei der Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^2$  oder allgemeiner im  $\mathbb{R}^n$ .
- Für die Multiplikation komplexer Zahlen ist die Polarkordinatendarstellung vorteilhaft: In dieser multiplizieren sich die Beträge, und die Argumente (Winkel mit der positiven reellen Achse) addieren sich.

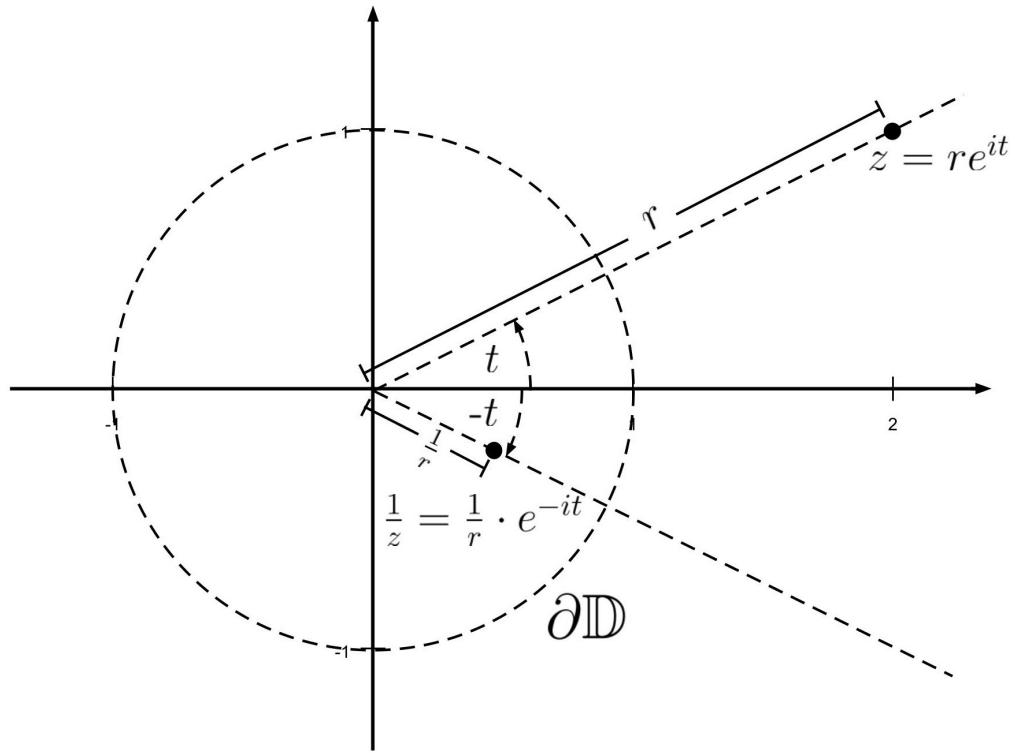


Abbildung 4: Geometrische Interpretation der Inversion  $z \mapsto \frac{1}{z}$

In kartesischen Koordinaten lässt sich die Multiplikation wie folgt beschreiben: Den Realteil des Produkts zweier komplexer Zahlen erhält man als Differenz aus dem Produkt der Real- und dem Produkt der Imaginärteile der beiden Faktoren; den Imaginärteil des Produkts erhält man, indem man den Realteil des ersten mit dem Imaginärteil des zweiten Faktors multipliziert und umgekehrt und beide Teilergebnisse addiert. – Diese Regel ist nützlich, aber nicht unbedingt nötig: Man kann sich auch einfach merken, dass man ein Produkt  $(a + ib)(c + id)$  (mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) wie aus dem Reellen gewohnt ausmultipliziert und dabei jeden auftretenden Term  $i^2$  durch  $-1$  ersetzt.

- Bei der Division komplexer Zahlen werden in Polarkoordinaten ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert. In kartesischen Koordinaten führt man die Division auf die Multiplikation zurück, indem man mit dem konjugierten Nenner erweitert und dadurch den Nenner reell macht: Sind  $a + ib$  und  $c + id \neq 0$  (mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) komplexe Zahlen, so ist

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}.$$

- Beim Potenzieren einer komplexen Zahl mit einem ganzzahligen (oder auch allgemeiner reellen<sup>8</sup>) Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument mit dem Exponenten multipliziert:

$$(re^{it})^a = r^a e^{iat} \quad \text{für alle } r \geq 0, t, a \in \mathbb{R}.$$

In kartesischen Koordinaten könnte man den binomischen Satz heranziehen, was aber eher selten sinnvoll ist.

---

<sup>8</sup>Zur exakten Definition allgemeiner Potenzen in  $\mathbb{C}$  siehe Definition 11.11.

- Eine  $n$ -te Wurzel ( $n \in \mathbb{N}$ ) aus einer komplexen Zahl erhält man, indem man die  $n$ -te Wurzel aus dem Betrag nimmt und ihr Argument durch  $n$  dividiert.

Diese Wurzel ist keinesfalls eindeutig; vielmehr hat jede komplexe Zahl  $\neq 0$  genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln, die sich um  $n$ -te **Einheitswurzeln** als Faktoren unterscheiden<sup>9</sup>: Aus einer  $n$ -ten Wurzel erhält man die übrigen, indem man sie sukzessive um den Winkel  $2\pi/n$  um den Ursprung weiterdreht (d.h. mit der  $n$ -ten Einheitswurzel  $e^{2\pi i/n}$  multipliziert – siehe hierzu Lemma 2.33). Die  $n$ -ten Wurzeln einer komplexen Zahl  $re^{it}$  mit  $r \geq 0, t \in \mathbb{R}$  sind also genau die Zahlen

$$\sqrt[n]{r} \cdot e^{i(t+2k\pi)/n} \quad \text{mit } k = 0, \dots, n-1.$$

Die  $n$  verschiedenen  $n$ -ten Wurzeln bilden somit die Ecken eines regulären  $n$ -Ecks mit Mittelpunkt im Ursprung.

Etwas näher beschäftigen wir uns mit komplexen Wurzeln in Kapitel 11. Schon hier sei die Warnung erlaubt, dass im Komplexen generell große Umsicht beim Wurzelziehen ratsam ist (eine Aussage, die übrigens so ähnlich auch in einem Lehrbuch der Zahnmedizin stehen könnte 😊).

Noch einige Worte zur topologischen Struktur von  $\mathbb{C}$ : Sie stimmt mit der topologischen Struktur des  $\mathbb{R}^2$ , d.h. der uns wohlvertrauten Ebene überein; der Betrag  $|z - w|$  ist gerade der **(euklidische) Abstand** der Punkte  $z$  und  $w$  (aufgefasst als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ ). Durch

$$d(z, w) := |z - w|$$

ist dann eine Metrik  $d$  auf  $\mathbb{C}$ , die **euklidische Metrik**, definiert. Bezuglich dieser ist  $\mathbb{C}$  (ebenso wie der  $\mathbb{R}^2$ ) vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$  ist konvergent.

Dabei lässt sich die Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen prinzipiell auf die Konvergenz reeller Folgen zurückführen: Eine Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen  $(\operatorname{Re} z_n)_n$  und  $(\operatorname{Im} z_n)_n$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n.$$

**Definition 1.3** Ist  $z \in \mathbb{C}$  und  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , so setzen wir

$$\operatorname{dist}(z, A) := \inf \{|z - a| : a \in A\}$$

und nennen  $\operatorname{dist}(z, A)$  den **Abstand des Punktes  $z$  von der Menge  $A$** . Analog definieren wir den **Abstand zweier nichtleerer Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{C}$**  durch

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf \{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Man beachte, dass  $\operatorname{dist}(A, B) = 0$  sein kann, auch wenn  $A$  und  $B$  zueinander disjunkt sind; selbst zwei abgeschlossene disjunkte Mengen können den Abstand 0 voneinander haben (zum Beispiel die Spuren zweier Wege, die beide ins Unendliche gehen und sich dort beliebig annähern). Falls jedoch  $A$  abgeschlossen und  $B$  kompakt ist (oder umgekehrt), so kann man aus  $A \cap B = \emptyset$  auf  $\operatorname{dist}(A, B) > 0$  schließen.

<sup>9</sup>Im Grunde ist dieses Phänomen bereits aus dem Reellen bekannt: Jede positive reelle Zahl hat genau zwei Quadratwurzeln, eine positive und eine negative – man entscheidet sich aber in aller Regel dafür, nur die positive zu betrachten.

Wir führen noch einige Notationen ein, die wir im Folgenden sehr häufig benötigen.

**Notationen:** Die offene bzw. abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $a \in \mathbb{C}$  und Radius  $r \geq 0$  bezeichnen wir stets mit

$$U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad \text{bzw.} \quad B_r(a) := \overline{U_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Für  $r = \infty$  ist hierbei unter  $U_r(a)$  bzw.  $B_r(a)$  die gesamte komplexe Ebene zu verstehen.

Von besonderer Bedeutung in der Funktionentheorie ist die **offene Einheitskreisscheibe** (kurz: der **Einheitskreis**)

$$\mathbb{D} := U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Eine wichtige Rolle als Definitionsbereiche holomorpher Funktionen spielen außerdem die offene **linke, rechte, obere und untere Halbebene**, die wir mit  $LH$ ,  $RH$ ,  $OH$  und  $UH$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} LH &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}, & RH &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}, \\ OH &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, & UH &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}. \end{aligned}$$

Schließlich ist es gelegentlich bequem, die Intervallschreibweise auf beliebige Strecken in  $\mathbb{C}$  zu übertragen und

$$[z, w] := \{(1 - \lambda)z + \lambda \cdot w : 0 \leq \lambda \leq 1\} = \{z + \lambda(w - z) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

für beliebige  $z, w \in \mathbb{C}$  zu setzen. Es ist dann  $[z, w]$  die Strecke in  $\mathbb{C}$  von  $z$  nach  $w$ .

**Warnung:** Diese Notationen sind in der Literatur und auch in Examensaufgaben alles andere als einheitlich; so ist für offene Kreisscheiben beispielsweise auch die Schreibweise  $K_r(a)$  üblich,  $B_r(a)$  bezeichnet bei manchen Autoren eine abgeschlossene, bei anderen hingegen eine offene Kreisscheibe, und anstelle  $\mathbb{D}$  wird oft  $\Delta$  oder  $\mathbb{E}$  als Symbol für die offene Einheitskreisscheibe verwendet.

**Ausblick:** Für viele Zwecke ist es sinnvoll, zur komplexen Ebene einen „unendlich fernen“ Punkt  $\infty$  hinzuzunehmen - insbesondere beim Umgang mit Polstellen meromorpher Funktionen. Dazu setzen wir

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und nennen  $\overline{\mathbb{C}}$  die **kompaktifizierte Ebene**. Sie hat ein sehr anschauliches Modell, nämlich das der **Riemannschen Sphäre** oder **Riemannschen Zahlenkugel**. Dabei handelt es sich um die Einheitssphäre  $S^2$  des  $\mathbb{R}^3$  (also eine gewöhnliche Kugeloberfläche mit willkürlich auf 1 normiertem Radius); deren „Nordpol“ entspricht dabei dem Punkt  $\infty$ , während der Rest der Sphäre (ohne den Nordpol) mittels der stereographischen Projektion mit der komplexen Ebene identifiziert wird. Wir werden uns in Lektion 9.1 ausführlicher damit beschäftigen.

Für die Beschreibung von Kreislinien wie auch von Geraden ist mitunter die folgende Beobachtung nützlich.

**Proposition 1.4** *Es seien  $a, c \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{C}$  mit  $ac - |b|^2 < 0$  gegeben. Dann ist die Menge*

$$K := \{z \in \mathbb{C} : az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0\}$$

*eine Kreislinie oder Gerade, und umgekehrt lässt sich jede Kreislinie und jede Gerade in dieser Form darstellen. Hierbei liegt der Fall einer Geraden genau dann vor, wenn  $a = 0$  ist.*

**Beweis.** Wir betrachten zunächst den Fall  $a \neq 0$ . Unser Ziel ist es hier, die Gleichung  $az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$  durch Äquivalenzumformungen in die Form  $|z - m| = r$  zu bringen, bei welcher es sich offensichtlich um eine Kreisgleichung handelt.

Mittels einer quadratischen Ergänzung erhält man für alle  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c &= a \cdot \left( |z|^2 + 2 \operatorname{Re} \frac{bz}{a} + \frac{|b|^2}{a^2} \right) - \frac{|b|^2}{a} + c \\ &= a \left| z + \frac{\bar{b}}{a} \right|^2 + c - \frac{|b|^2}{a} = a \left( \left| z + \frac{\bar{b}}{a} \right|^2 - \frac{|b|^2 - ac}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Also ist  $az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$  genau dann, wenn  $\left| z + \frac{\bar{b}}{a} \right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{|a|^2}$  gilt. Da nach Voraussetzung  $|b|^2 - ac > 0$  ist, folgt

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{\bar{b}}{a} \right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} \right\}.$$

Somit stellt  $K$  eine Kreislinie mit Radius  $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|} > 0$  und Mittelpunkt  $-\bar{b}/a$  dar.

Nun sei  $a = 0$ . Dann ist insbesondere  $b \neq 0$  (wegen  $|b|^2 = |b|^2 - ac > 0$ ), und es gilt

$$\begin{aligned} K &= \{ z \in \mathbb{C} \mid bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \} \\ &= \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(zb) = -\frac{c}{2} \} \\ &= \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid x \operatorname{Re}(b) - y \operatorname{Im}(b) = -\frac{c}{2}, x, y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $b \neq 0$ , also entweder  $\operatorname{Re} b \neq 0$  oder  $\operatorname{Im} b \neq 0$ , beschreibt dies eine Gerade in der komplexen Ebene.

Ist umgekehrt  $K$  eine Kreislinie, so gibt es ein  $m \in \mathbb{C}$  und ein  $r > 0$  mit  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| = r\}$ . Aufgrund von  $|z - m|^2 - r^2 = z\bar{z} - m\bar{z} - \bar{m}z + m\bar{m} - r^2$  folgt also

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : z\bar{z} - m\bar{z} - \bar{m}z + m\bar{m} - r^2 = 0 \},$$

so dass  $K$  die gewünschte Darstellung mit  $a := 1$ ,  $b := -m$  und  $c := m\bar{m} - r^2 \in \mathbb{R}$  hat; hierbei ist  $|b|^2 - ac = |m|^2 - (|m|^2 - r^2) = r^2 > 0$  wie verlangt.

Schließlich sei  $K$  eine Gerade. Dann findet man  $p, w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$  mit  $K = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}$ . Setzt man  $b := i\bar{w}$  und  $c := -2 \operatorname{Re}(i\bar{w}p)$ , so erhält man für  $z \in \mathbb{C}$  die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} z \in K &\iff \frac{z - p}{w} \in \mathbb{R} \iff \frac{\bar{w}z - \bar{w}p}{|w|^2} \in \mathbb{R} \iff \bar{w}z - \bar{w}p \in \mathbb{R} \\ &\iff \operatorname{Im}(\bar{w}z - \bar{w}p) = 0 \iff 2 \operatorname{Re}(i\bar{w}z - i\bar{w}p) = 0 \\ &\iff 2 \operatorname{Re}(bz) + c = 0 \iff bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0. \end{aligned}$$

Es ist also  $K = \{z \in \mathbb{C} : bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0\}$  mit der angegebenen Wahl von  $b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$  und  $c \in \mathbb{R}$ . ■

Man subsumiert sowohl gewöhnliche Kreislinien als auch Geraden gerne unter dem vereinheitlichenden Begriff des *verallgemeinerten Kreises* (Definition 9.7). Geraden kann man dabei als Grenzfälle von Kreislinien mit unendlich großem Radius und Mittelpunkt im Unendlichen ansehen. Auch dies wird anhand des Modells der Riemannschen Sphäre einleuchtender werden: In diesem sind die verallgemeinerten Kreislinien genau die Kreislinien auf der Kugel, wobei den Geraden diejenigen Kreise entsprechen, die durch den „Nordpol“ verlaufen.

### 1.3 Veranschaulichung von Abbildungen der komplexen Ebene

Wie sich im letzten Abschnitt bereits angedeutet hat, sind erhebliche Teile der komplexen Analysis geometrisch gut interpretierbar. Dabei muss man sich freilich vor Verwechslungen und falschen Analogien mit der vertrauten „Kurvendiskussion“ von Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hüten: Es ist so gut wie unmöglich, sich den Graphen einer Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vernünftig vorzustellen, geschweige denn ihn zu zeichnen – dieser ist ja eine Teilmenge von  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , und das Denken in vier Dimensionen fällt den allermeisten Menschen nun einmal sehr schwer, wovon bereits der verzweifelte Appell „Marty, du musst endlich lernen, vierdimensional zu denken!“ des Zeitmaschinen-Konstrukteurs Dr. Emmett Brown in „Zurück in die Zukunft“ zeugt.

Anders als für Zeitreisen sind für die Beschäftigung mit der Funktionentheorie solche Künste aber auch gar nicht erforderlich: Wie in der Einleitung bereits angesprochen, ist die korrekte Analogie nicht die zur „Kurvendiskussion“, sondern vielmehr zur Geometrie der Ebene mit ihren Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen: Man kann das Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen auch ohne Verwendung ihrer Graphen gut veranschaulichen, auf exakt die gleiche Weise wie das Abbildungsverhalten von Ähnlichkeitstransformationen (Drehstreckungen, Translationen und Spiegelungen) des  $\mathbb{R}^2$  in der Schuleometrie, indem man nämlich gewisse Figuren und daneben oder darunter deren Bilder unter der Abbildung zeichnet. Die genaue Information über die punktweise Zuordnung, die der Graph zur Verfügung stellt, wird dabei aufgegeben, was aber eher einen Gewinn an Übersichtlichkeit darstellt. Stattdessen ist es hilfreich, die abzubildenden Mengen (typischerweise oft Kreise oder Rechtecke) mit einem Koordinatengitter (entweder in kartesischen oder Polarkoordinaten) zu versehen und dieses mitabzubilden. Wir betrachten vorerst zwei sehr einfache und ein etwas komplizierteres Beispiel.

#### Beispiel 1.5

- (1) Es seien  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Dann ist  $a = re^{i\varphi}$  mit gewissen  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$ . Durch

$$f(z) := az + b$$

wird eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Geometrisch gesehen liegt eine **affine Abbildung** vor; sie stellt die Verkettung einer Drehstreckung (mit dem Streckungsfaktor  $r$  und dem Drehwinkel  $\varphi$ ) mit einer Translation um den „Vektor“  $b$  dar. Abbildung 5 illustriert, wie Quadrate und Kreise um 0 durch  $f$  abgebildet werden. Offensichtlich ist  $f$  winkel- und orientationserhaltend. Es handelt sich hier um den einfachsten Fall einer konformen (d.h. injektiven und holomorphen) Abbildung (siehe hierzu ausführlich die Abschnitte 3.3 und 8.3 sowie Lektion 13).

- (2) Es sei  $m \geq 2$  eine natürliche Zahl. Das Abbildungsverhalten der Potenzfunktion

$$g(z) := z^m$$

wird am einfachsten in Polarkoordinaten einsichtig: Für alle  $r > 0$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  ist

$$g(re^{i\varphi}) = r^m e^{im\varphi}.$$

Durch  $g$  werden Winkel mit 0 als Scheitelpunkt also um den Faktor  $m$  vergrößert (während Winkel mit anderem Scheitelpunkt invariant bleiben). Zudem werden Punkte „nahe“ bei 0 (mit  $|z| < 1$ ) zur 0 „hingezogen“, während Punkte mit  $|z| > 1$  von der

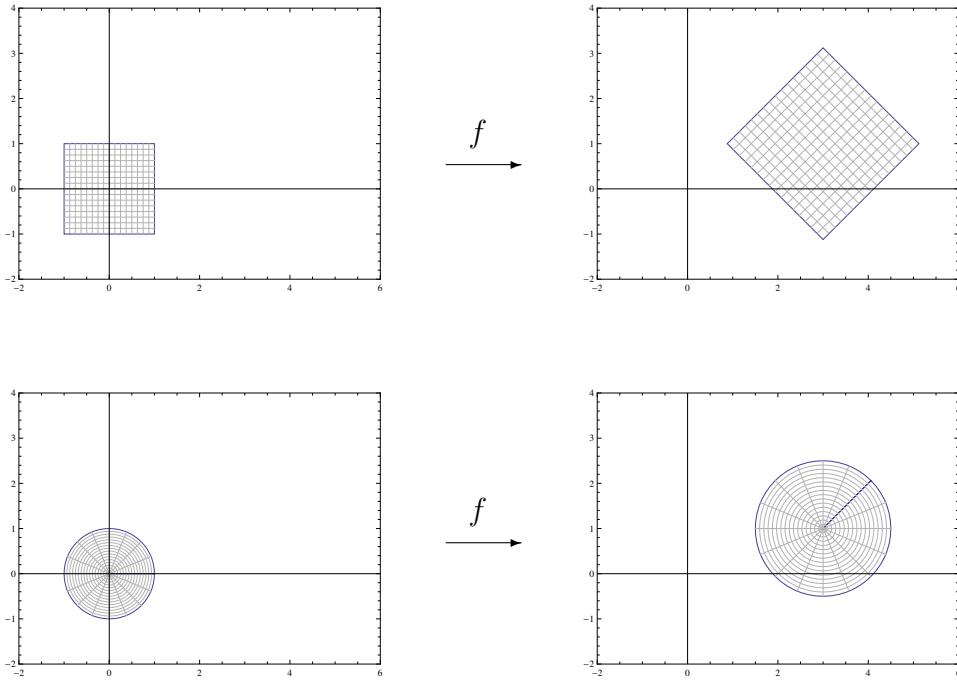


Abbildung 5: Die Abbildung  $f(z) := az + b$  mit  $a = 1.5 \cdot e^{\pi i/4}$ ,  $b = 3 + i$

Null „abgestoßen“ werden. „Kleine“ Kreise mit Radius  $< 1$  werden also noch weiter verkleinert, „große“ Kreise mit Radius  $> 1$  hingegen vergrößert. Abbildung 6 zeigt die Abbildung eines Sektors des Einheitskreises durch  $g$  im Fall  $m = 4$ .

In keiner Umgebung der 0 ist  $g$  injektiv: Eine kleine Kreisscheibe  $U_\varepsilon(0)$  um 0 wird auf die Kreisscheibe  $U_{\varepsilon^m}(0)$  abgebildet, aber so, dass jeder Wert im Bild  $m$ -mal angenommen wird.

- (3) Abbildung 7 zeigt, wie der Einheitskreis  $\mathbb{D}$  (und die Kreise  $U_r(0)$  für 15 weitere Werte von  $r$  zwischen 0 und 1) durch die holomorphe Funktion

$$h(z) := 5z + z^2 + iz^3 - 2z^5$$

abgebildet werden.

Man kann gut erkennen, wie kleine Kreise um 0 fast exakt auf (um den Faktor 5 gestreckte) Kreise um Null abgebildet werden, wie aber bei wachsendem Kreisradius zunehmend Verzerrungseffekte ins Spiel kommen. Sie röhren daher, dass mit wachsendem  $|z|$  die nichtlinearen Anteile  $z^2$ ,  $iz^3$  und  $-2z^5$  gegenüber dem linearen Anteil  $5z$  (der für „kleine“  $z$  der dominante Anteil ist) zunehmend ins Gewicht fallen. Wir kommen auf diese spezielle Funktion (die natürlich prototypisch für beliebige holomorphe Funktionen steht) in Beispiel 8.17 (3) zurück.  $\square$

Die ersten beiden Beispiele sind von entscheidender Bedeutung für das Verständnis des lokalen Abbildungsverhaltens holomorpher Funktionen: Diese kann man lokal immer durch Taylorreihen darstellen; für das lokale Verhalten in der Nähe des Entwicklungspunktes kommt es dabei *näherungsweise* nur auf die Anfangsterme der Taylor-Entwicklung an. Und hier gibt es nun einen grundlegenden Unterschied zwischen den beiden Fällen, dass der lineare Term in der Taylorentwicklung verschwindet bzw. nicht verschwindet; die beiden soeben betrachteten Beispiele sind geradezu prototypisch für diese beiden Fälle. In der folgenden heuristischen

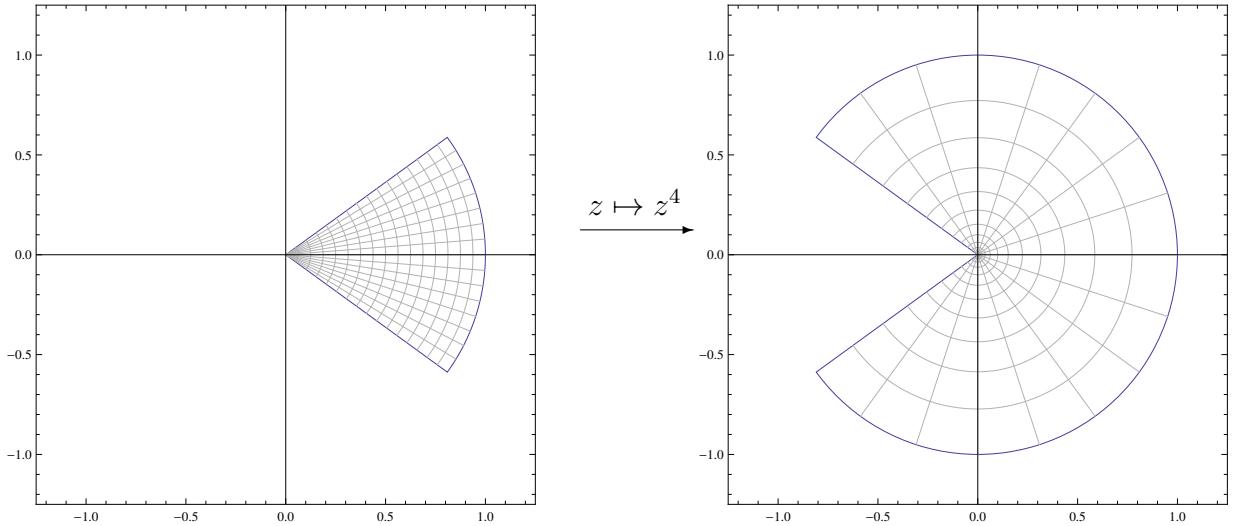


Abbildung 6: Die Abbildung eines Kreissektors mit Öffnungswinkel  $2\pi/5$  durch  $g(z) := z^4$

Betrachtung wollen wir diesen Gedanken etwas konkretisieren (aber noch nicht mathematisch präzisieren):

**Heuristische Betrachtung:** Ist  $f$  eine holomorphe Funktion in einem Gebiet<sup>10</sup>  $G$  und  $z_0$  ein beliebiger Punkt in  $G$ , so gibt es eine Kreisumgebung  $U_r(z_0)$  von  $z_0$ , die komplett in  $G$  liegt; in dieser ist  $f$  dann durch eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

darstellbar (Satz 6.6). Wir richten unsere Aufmerksamkeit nun auf den ersten nicht-verschwindenden Term (nach  $a_0$ ) in der Taylor-Entwicklung:

**Fall 1:** Ist  $a_1 \neq 0$ , so verhält sich  $f$  „genügend nahe“ bei  $z_0$ , sagen wir in einer Kreisscheibe  $U_\varepsilon(z_0)$  (mit  $0 < \varepsilon \leq r$ ) näherungsweise wie die Linearisierung  $z \mapsto a_0 + a_1(z - z_0)$ , also wie das erste Taylorpolynom von  $f$  in  $z_0$ ; je näher man dabei an  $z_0$  bleibt, d.h. je kleiner  $\varepsilon$  ist, desto genauer ist diese Approximation<sup>11</sup>. Diese Linearisierung  $z \mapsto a_0 + a_1(z - z_0)$  beschreibt aber gerade eine Drehstreckung mit anschließender Translation wie in Beispiel 1.5 (1).

**Fall 2:** Ist  $a_1 = 0$ , so ist die Approximation von  $f$  durch die Linearisierung  $z \mapsto a_0 + a_1(z - z_0) = a_0$  zu grob, denn diese ist ja konstant. Sofern  $f$  nicht gerade konstant ist, gibt es ein minimales  $m \geq 2$  mit  $a_m \neq 0$ ; hiermit hat die Taylor-Entwicklung von  $f$  um  $z_0$  dann die Form

$$f(z) = a_0 + a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

Auch hier verhält sich  $f$  in einer genügend kleinen Kreisscheibe  $U_\varepsilon(z_0)$  näherungsweise wie der Anfang der Taylor-Entwicklung, d.h. wie  $z \mapsto a_0 + a_m(z - z_0)^m$ ; das Weglassen der Terme höherer Ordnung (die bei Annäherung an  $z_0$  ja schneller klein werden als der Term

<sup>10</sup>Unter einem Gebiet verstehen wir eine offene, zusammenhängende, nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , siehe Definition 4.8.

<sup>11</sup>Dieser Gedanke der linearen Approximation ist uns aus der reellen Analysis wohlvertraut: Die Tangente an den Graphen einer differenzierbaren Funktion stellt gerade eine lineare Approximation der betreffenden Funktion dar. – Im Komplexen versagt die Vorstellung einer Tangente an den Graphen natürlich!

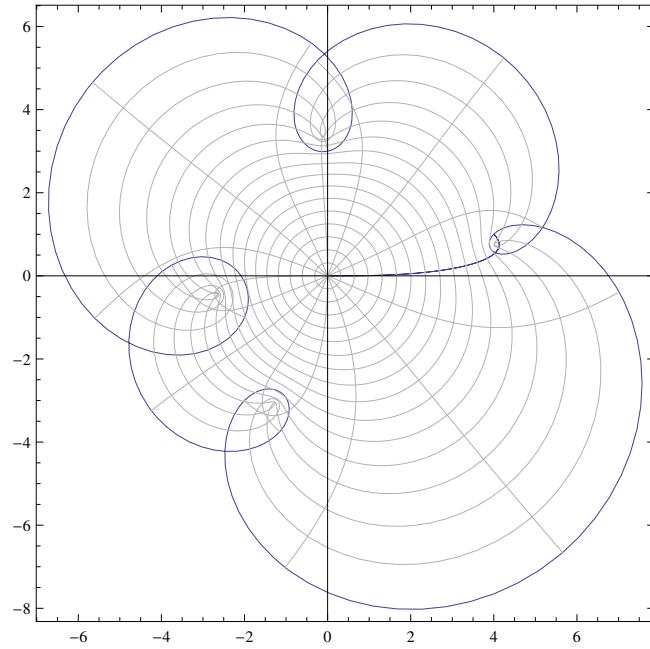


Abbildung 7: Die Abbildung von  $\mathbb{D}$  durch  $h(z) := 5z + z^2 + iz^3 - 2z^5$

$a_m(z - z_0)^m$  wirkt sich nahe genug bei  $z_0$  nicht „allzu gravierend“ aus. Das Verhalten von  $z \mapsto a_0 + a_m(z - z_0)^m$  entspricht aber im Kern (bis auf die Verschiebungen um  $-z_0$  bzw.  $a_0$  und bis auf die erneute Drehstreckung mit dem Faktor  $a_m$ ) dem der Abbildung  $z \mapsto z^m$  aus Beispiel 1.5 (2); Winkel mit Scheitel in  $z_0$  werden dabei um den Faktor  $m$  vergrößert, und in keiner Umgebung von  $z_0$  ist diese Abbildung injektiv. Diese Eigenschaften übertragen sich auf  $f$ .

Fassen wir zusammen: Im Falle  $a_1 \neq 0$  verhält sich  $f$  nahe beim Entwicklungspunkt  $z_0$  näherungsweise wie eine affine Abbildung (Verkettung von Drehstreckung und Translationen) und ist dort insbesondere winkel- und orientierungstreu und lokal injektiv. Im Falle  $a_1 = 0$  hingegen gehen die Winkelstreue und die lokale Injektivität verloren. Wenn wir noch bedenken, dass  $a_1 = f'(z_0)$  ist, so bekommen wir einen ersten Hinweis darauf, dass Ableitungsnullstellen einer holomorphen Funktion eine Sonderstellung hinsichtlich des Abbildungsverhaltens einnehmen: Abseits der Ableitungsnullstellen verhält sich eine holomorphe Funktion winkelstreue und lokal injektiv, in den Ableitungsnullstellen hingegen nicht. Wir kommen auf diese Phänomene u.a. in den Abschnitten 3.3 und 8.3 zurück.

Im dritten Beispiel sieht man schön, wie sich eine holomorphe Abbildung lokal näherungsweise wie eine Drehstreckung verhält (Kleine Kreise um die 0 werden fast exakt auf Kreise abgebildet), wie aber global gesehen Verzerrungseffekte immer wichtiger werden, je größer die Mengen werden, die man abbildet.

Die obigen Beispiele liefern uns ferner einen Vorgeschmack auf ein weiteres wichtiges funktionentheoretisches Prinzip, nämlich das **Offenheitsprinzip**: Die in den beiden ersten Beispielen behandelten Typen von Abbildungen, die affinen  $z \mapsto az + b$  wie die Potenzfunktionen  $z \mapsto z^n$ , erhalten offensichtlich die Offenheit, d.h. sie bilden offene Mengen auf offene Mengen ab; man sagt hierfür auch, dass sie dem Offenheitsprinzip genügen. Die Tatsache, dass sich jede nicht-konstante holomorphe Abbildung auf die soeben beschriebene Weise lokal durch eine Abbildung von einem der beiden Typen approximieren lässt, macht es plausibel, dass das Offenheitsprinzip sogar für beliebige nicht-konstante holomorphe Abbildungen  $f$  gilt (wie es

auch im dritten Beispiel der Fall zu sein scheint); denn zu jedem Punkt  $z_0$  in einer gegebenen offenen Menge  $U$  findet man ja eine kleine Kreisumgebung  $U_\varepsilon(z_0)$ , die zum einen in  $U$  enthalten ist und in der sich zum anderen  $f$  näherungsweise wie eine der beiden obigen Abbildungen verhält; man kann daher erwarten, dass  $f(U_\varepsilon(z_0))$  näherungsweise eine Kreisscheibe um  $f(z_0)$  ist, womit die Offenheit von  $f(U)$  nachgewiesen wäre. Eingehender und mathematisch präziser werden wir uns in Abschnitt 8.2 und Satz 8.18 mit dem Offenheitsprinzip beschäftigen.

**Ausblick:** Noch einmal hervorheben möchten wir einen Gedanken, der nicht nur in den voranstehenden Überlegungen, sondern für die gesamte Funktionentheorie grundlegend ist und der bereits einige erst in späteren Lektionen behandelte Resultate plausibilisiert: *In der Nähe des Entwicklungspunktes ist das Verhalten einer Potenzreihe „fast ausschließlich“ durch die ersten nicht-verschwindenden Terme bestimmt.* Je weiter man sich vom Entwicklungspunkt entfernt, desto mehr fallen die Terme höherer Ordnung ins Gewicht, während die Anfangsterme immer irrelevanter werden. (Die Situation wird dann typischerweise zunehmend unübersichtlicher, wie es sich in Abbildung 7 bereits andeutet, wenn man diese vom Entwicklungspunkt ausgehend von „innen“ nach „außen“ betrachtet.) Bei Polynomen stoppt dieser Prozess beim Term mit dem höchsten Exponenten: Weitab vom Entwicklungspunkt verhält sich das Polynom „fast genauso“ wie dieser führende Term; gegenüber der unmittelbaren Umgebung des Entwicklungspunktes hat sich die Situation also komplett umgedreht! Dies kommt z.B. im Wachstumslemma für Polynome (Lemma 10.2) zum Ausdruck, und dieser Gedanke lässt sich auch zu einem (auf dem Satz von Rouché beruhenden) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ausbauen (Variante 1 im Beweis von Satz 10.5). Bei ganz-transzendenten Funktionen hingegen stoppt dieser Prozess naturgemäß nie: Darum wachsen sie in gewissem Sinne schneller als jedes Polynom (siehe die Verallgemeinerung des Satzes von Liouville in Satz 10.3), und man kann im Rahmen der sog. Wiman-Valiron-Theorie (die freilich den Rahmen dieses Kurses bei weitem sprengen würde) beweisen, dass sich ganz-transzendenten Funktionen in gewissen Bereichen der komplexen Ebene „immer wieder einmal“ lokal wie Monome verhalten, deren Grad mit wachsender Entfernung zum Ursprung gegen Unendlich strebt.

## 1.4 Aufgaben

### Beispielaufgaben

1.1 Es sei  $\zeta \neq 1$  eine  $n$ -te Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass dann

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0$$

gilt. Interpretieren Sie dieses Resultat für den Fall  $\zeta = e^{2\pi i/n}$  geometrisch.

### Einsendeaufgabe

1.2 Ein Piratenhauptmann vergrub einst seine Beute auf einer einsamen Insel vor Riemannsland. Lange nachdem er auf seinen wilden Abenteuern verschollen war, fand man seine Schatzkarte. Auf dieser standen folgende Anweisungen:

- *Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach links; stecke dort die erste Fahne.*

- *Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach rechts; stecke dort die zweite Fahne.*
- *Der Schatz liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.*

Ein Suchtrupp mit besagter Schatzkarte erreichte nun die Insel. Ihm gehörte auch ein Gelehrter an, der mit komplexen Zahlen umgehen konnte. Die Palme und der Felsbrocken waren noch da, der Galgen aber war längst verschwunden. Nach kurzer Überlegung und einer kleinen Rechnung mit komplexen Zahlen gab der Gelehrte einen Punkt an, ab dem die Anweisungen der Karte befolgt wurden. Tatsächlich fand der Suchtrupp exakt an der von der Karte vorhergesagten Stelle den Schatz, obwohl man (wie sich viel später erst herausstellte) die Schritte vom falschen Punkt aus gezählt hatte. Wie hat der Gelehrte dies bewerkstelligt und wo - relativ gesehen zur Palme und zum Felsbrocken - lag der Schatz?

## 2 Wiederholungen und Ergänzungen zur Analysis

Nach unserer Erfahrung haben viele Schwierigkeiten mit der Funktionentheorie ihre tiefere Ursache in mangelnden Grundkenntnissen aus der elementaren Analysis. Daher wiederholen wir in dieser Lektion einige Themen aus den Analysis-Grundvorlesungen, die für die Funktionentheorie von besonderer Bedeutung sind, insbesondere topologische Grundbegriffe, die Konzepte der gleichmäßigen Konvergenz und gleichmäßigen Stetigkeit sowie Potenz- und Taylor-Reihen. Außerdem beschäftigen wir uns mit einigen – über Potenzreihen definierten – elementaren transzendenten Funktionen: der Exponentialfunktion, den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sowie den Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus.

### 2.1 Topologische Grundbegriffe

Ohne nähere Erläuterung stellen wir hier die wichtigsten topologischen Begriffsbildungen und Resultate zusammen, die aus den Analysis-Grundvorlesungen vertraut sein sollten:

**Definition 2.1** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt **offen (in  $X$ )**, falls es zu jedem Punkt  $a \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass die offene Kugel  $U_\varepsilon(a) = \{p \in X \mid d(p, a) < \varepsilon\}$  vollständig in  $U$  enthalten ist. In Quantorenschreibweise:

$$\forall_{a \in U} \exists_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(a) \subseteq U.$$

Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt eine **Umgebung** eines Punktes  $a \in X$ , falls es eine offene Kugel um  $a$  gibt, die ganz in  $U$  enthalten ist, falls also ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $U_\varepsilon(a) \subseteq U$ . Wenn  $U$  eine Umgebung von  $a$  ist, dann nennen wir  $U \setminus \{a\}$  eine **punktierte Umgebung** von  $a$ . Insbesondere ist  $\dot{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$  die **punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung** von  $a$ .

Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen (in  $X$ )**, falls ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

Die Umgebungen eines Punktes müssen keine offenen Mengen sein. In jeder Umgebung  $U$  von  $a$  ist jedoch eine offene Umgebung von  $a$  enthalten, nämlich eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(a)$ .

**Definition 2.2** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- (1) Eine Teilmenge  $K \subseteq X$  heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in  $K$  liegt.
- (2) Eine Teilmenge  $K \subseteq X$  heißt **überdeckungskompakt**, falls jede (!) offene Überdeckung  $(U_j)_{j \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt (d.h. es gibt endlich viele  $U_j$ , die bereits  $K$  überdecken). In diesem Fall sagt man auch, dass  $K$  die **Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft** hat.

**Warnung:** Jede Menge  $K \subseteq X$  besitzt eine endliche offene Überdeckung – z.B. durch  $X$  selbst. In der Definition von Überdeckungskompaktheit wird jedoch gefordert, dass eine *beliebig vorgegebene* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält. – Als „vertrauensbildende Maßnahme“ hier drei Beispiele zur Illustration des recht unanschaulichen Begriffs der Überdeckungskompaktheit:

- Der offene Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ist nicht überdeckungskompakt: Eine offene Überdeckung von  $\mathbb{D}$ , zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt, wird durch die Folge der offenen Kreisscheiben  $U_{1-\frac{1}{n}}(0)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gegeben.

- Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  ist nicht überdeckungskompakt: Zu der offenen überdeckung  $(U_1(z))_{z \in \mathbb{C}}$  von  $\mathbb{C}$  mit Kreisscheiben vom Radius 1 gibt es nämlich keine endliche Teilüberdeckung.
- Die Menge  $K := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  ist überdeckungskompakt: Ist nämlich  $(U_j)_{j \in I}$  eine beliebige offene Überdeckung von  $K$ , so gibt es ein  $j_0 \in I$  mit  $0 \in U_{j_0}$ . Da  $U_{j_0}$  offen ist, also eine ganze  $\varepsilon$ -Kugel um 0 enthält, liegen alle bis auf endlich viele der Punkte  $\frac{1}{n}$  in  $U_{j_0}$  (nämlich alle mit  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ). Also genügen die Menge  $U_{j_0}$  und endlich viele weitere  $U_j$ , um  $K$  zu überdecken.

**Satz 2.3** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:*

- (1) *Eine Teilmenge von  $X$  ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie folgenkompakt ist.*
- (2) *Jede überdeckungs- bzw. folgenkompakte Teilmenge von  $X$  ist abgeschlossen und beschränkt.*

Angesichts von Satz 2.3 (1) können wir die Unterscheidung zwischen Überdeckungs- und Folgenkompaktheit aufgeben. Fortan nennen wir eine Menge **kompakt**, wenn sie folgenkompakt und damit auch überdeckungskompakt ist.

Die Umkehrung der Implikation in (2) ist i.Allg. nicht richtig, d.h. in beliebigen metrischen Räumen müssen abgeschlossene und beschränkte Mengen nicht kompakt sein. (So kann man beispielsweise zeigen, dass in *unendlich*-dimensionalen normierten Vektorräumen die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist.) Für Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$  oder  $\mathbb{C}^m$  gilt allerdings die Äquivalenz in (2):

**Satz 2.4 (Satz von Heine-Borel)** *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  oder  $\mathbb{C}^m$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind stets offen. Umgekehrt sind endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, und eine analoge Aussage gilt für kompakte Mengen. Außerdem sind die leere Menge und der gesamte Raum sowohl offen als auch abgeschlossen.

**Definition 2.5** *Es sei  $D$  eine Teilmenge eines metrischen Raumes  $X$ , und es sei  $a \in X$ . Man nennt  $a$  einen **Häufungspunkt** der Menge  $D$ , falls eine (und folglich jede) der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.*

- (a) *Zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Punkt  $x \in D$  mit  $x \neq a$  und  $x \in U_\varepsilon(a)$ .*
- (b) *In jeder punktierten Umgebung von  $a$  gibt es einen Punkt von  $D$ .*
- (c) *In jeder Umgebung von  $a$  gibt es unendlich viele Punkte von  $D$ .*
- (d) *Es gibt eine Folge  $(x_n)_n$  in  $D \setminus \{a\}$ , die gegen  $a$  konvergiert.*

Ein Punkt  $a \in D$  heißt ein **isolierter Punkt** von  $D$ , falls er kein Häufungspunkt von  $D$  ist, falls es also ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$D \cap U_\delta(a) = \{a\}, \quad \text{d.h.} \quad D \cap \dot{U}_\delta(a) = \emptyset.$$

Eine Teilmenge  $N \subseteq X$  heißt **isoliert in  $X$**  oder **diskret in  $X$** , falls  $N$  keine Häufungspunkte in  $X$  hat, falls es also zu jedem  $x \in X$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $\dot{U}_\delta(x) \cap N = \emptyset$  ist.

**Warnung:** Eine Menge, die nur aus isolierten Punkten besteht, muss trotzdem keine isolierte Menge sein, wie das Beispiel der Menge  $D := \left\{ \frac{i}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  im metrischen Raum  $\mathbb{C}$  zeigt: Hier ist 0 ein Häufungspunkt von  $D$ , d.h. die Menge  $D$  ist nicht isoliert in  $\mathbb{C}$ .

Häufungspunkte und isolierte Mengen spielen in der Funktionentheorie u.a. im Identitätsprinzip bzw. im Satz von der Isoliertheit der Nullstellen (Satz 8.3 und Korollar 8.4) eine wichtige Rolle: Zwei holomorphe Funktionen in einem Gebiet, die auf einer Menge übereinstimmen, welche einen Häufungspunkt **in** diesem Gebiet hat, sind identisch; insbesondere liegen die Nullstellen einer nicht-konstanten holomorphen Funktion isoliert im Definitionsbereich (können sich allerdings gegen den Rand des Gebietes häufen).

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist i. Allg. weder offen noch abgeschlossen. Man kann eine solche beliebige Teilmenge jedoch durch Hinzunahme „fehlender“ Punkte zu einer abgeschlossenen und durch Wegnahme von Randpunkten zu einer offenen Teilmenge machen. Dies gibt Anlass zu folgenden Definitionen, die recht abstrakt aussehen, aber zumindest in  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  gut zu veranschaulichen sind.

**Definition 2.6** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq X$  eine beliebige Teilmenge.

Ein Punkt  $x \in M$  heißt ein **innerer Punkt** von  $M$ , wenn es ein (von  $x$  abhängiges)  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $U_\varepsilon(x) \subseteq M$  ist. Die Menge

$$M^\circ := \{x \in X \mid \exists_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x) \subseteq M\}$$

der inneren Punkte von  $M$  nennt man das **Innere** (oder den **offenen Kern**) von  $M$ .

Weiter nennt man

$$\overline{M} := \{x \in X \mid \forall_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

die **abgeschlossene Hülle** oder kurz den **Abschluss** von  $M$  in  $X$  und

$$\partial M := \{x \in X \mid \forall_{\varepsilon > 0} (U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset) \wedge (U_\varepsilon(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset)\}$$

den **Rand** von  $M$ .

Die Definition von  $\partial M$  bedeutet anschaulich: Ein Punkt  $x$  ist genau dann ein Randpunkt von  $M$ , wenn sich in jeder beliebig kleinen Umgebung von  $x$  sowohl Punkte aus  $M$  selbst als auch aus dem Komplement  $X \setminus M$  finden.

Der folgende Satz stellt einige wichtige Eigenschaften dieser Objekte zusammen.

**Satz 2.7** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $M \subseteq X$  eine beliebige Teilmenge.

(a) Es gilt

- (1)  $M^\circ \subseteq M \subseteq \overline{M}$ ,
- (2)  $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$  und  $\overline{M} = M \cup \partial M = M^\circ \cup \partial M$ ,
- (3)  $\partial M = \partial(X \setminus M)$ ,
- (4)  $X \setminus \overline{M} = (X \setminus M)^\circ$ ,  $X \setminus M^\circ = \overline{X \setminus M}$ .

(b) Die Menge  $M^\circ$  ist offen; die Mengen  $\overline{M}$  und  $\partial M$  sind abgeschlossen.

(c) Ist  $M \subseteq N \subseteq X$ , so gilt  $\overline{M} \subseteq \overline{N}$  und  $M^\circ \subseteq N^\circ$ .

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\overline{M} &= \{x \in X \mid \text{Es gibt eine Folge } (x_n)_n \text{ in } M \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.\} \\ &= \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abgeschlossen mit } M \subseteq A\}.\end{aligned}$$

Der Abschluss von  $M$  ist also die Menge aller Grenzwerte von Folgen in  $M$  und auch die kleinste abgeschlossene Menge, die  $M$  enthält<sup>12</sup>. Ebenso ist

$$M^\circ = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen mit } U \subseteq M\}.$$

Das Innere von  $M$  ist also die größte offene Menge, die in  $M$  enthalten ist.

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}M \text{ abgeschlossen} &\iff M = \overline{M} \\ M \text{ offen} &\iff M = M^\circ.\end{aligned}$$

**Satz 2.8 (Abgeschlossenheit)** Für Teilmengen  $A$  eines metrischen Raumes  $X$  sind die vier folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) Die Menge  $A$  ist abgeschlossen, d.h. das Komplement  $X \setminus A$  ist offen.
- (b) Die Menge  $A$  enthält alle ihre Häufungspunkte.
- (c) Für jede Folge  $(a_n)_n$  in  $A$  gilt: Falls  $(a_n)_n$  in  $X$  konvergiert, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$ .
- (d) Es ist  $\overline{A} = A$ .

**Definition 2.9** Eine Teilmenge  $D$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt **dicht** in  $X$ , falls für jedes  $x \in X$  und jedes  $\varepsilon > 0$  der Schnitt  $D \cap U_\varepsilon(x)$  nicht leer ist.

Beispielsweise liegen die rationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{R}$  – ebenso die irrationalen Zahlen. Die Menge  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  der komplexen Zahlen mit rationalem Real- und rationalem Imaginärteil liegt dicht in  $\mathbb{C}$ .

Man sieht leicht, dass eine Teilmenge  $D$  eines metrischen Raumes  $X$  genau dann dicht in  $X$  ist, falls  $\overline{D} = X$  gilt, falls also ihr Abschluss der gesamte Raum ist.

In der Funktionentheorie taucht der Begriff der Dichtheit u.a. im Zusammenhang mit dem Satz von Casorati-Weierstraß (Satz 10.7 und Satz 10.20) auf: Eine ganz-transzendente Funktion bildet das Komplement einer beliebig großen Kreisscheibe auf eine in  $\mathbb{C}$  dichte Menge ab. Ebenso bildet eine holomorphe Funktion mit einer wesentlichen Singularität beliebig kleine punktierte Umgebungen dieser Singularität auf eine in  $\mathbb{C}$  dichte Menge ab.

Abschließend noch zwei Bemerkungen zur Anwendung der in diesem Abschnitt behandelten topologischen Begriffe und Resultate im Kontext der Funktionentheorie:

---

<sup>12</sup>Diese letzte Aussage ist wie folgt zu verstehen: Ist  $A$  eine beliebige abgeschlossene Menge, die  $M$  enthält, so kann man auf  $A \supseteq \overline{M}$  schließen.

- Die typischen Definitionsbereiche holomorpher Funktionen sind offene Mengen, denn zur Erklärung komplexer Differenzierbarkeit (über den Grenzwert des Differenzenquotienten) ist es höchst sinnvoll, dass die betreffende Funktion stets in einer ganzen Umgebung eines gegebenen Punktes definiert ist, dass jeder Punkt des Definitionsbereichs also ein innerer Punkt (und kein Randpunkt) ist. Da in der Funktionentheorie die inneren Bindungen zwischen den Funktionswerten holomorpher Funktionen von besonderem Interesse sind, betrachtet man allerdings meist nicht beliebige offene Mengen, sondern zusammenhängende (siehe Abschnitt 4.2); besteht der Definitionsbereich einer holomorphen Funktion nämlich aus mehreren nicht miteinander verbundenen „Teilen“ (offiziell: Zusammenhangskomponenten), so kann man natürlich nicht erwarten, dass es zwischen den Funktionswerten in den verschiedenen Komponenten irgendwelche Bindungen gibt.
- Bei der Anwendung von für allgemeine metrische Räume formulierten Resultaten auf die komplexe Ebene sollte man sich bewusst sein, dass der betrachtete metrische Raum oftmals nicht ganz  $\mathbb{C}$  (mit der euklidischen Metrik) ist, sondern eine (glücklicherweise meist offene und zusammenhängende und insofern relativ harmlose) Teilmenge  $G$  (und glücklicherweise immer noch mit der euklidischen Metrik). Man muss dann korrektweise mit der **Relativtopologie** auf  $G$  operieren; in ihr gilt:
  - Eine Teilmenge  $U \subseteq G$  ist genau dann offen **in  $G$** , wenn es eine in  $\mathbb{C}$  offene Menge  $U_0$  gibt, so dass  $U = U_0 \cap G$ .
  - Eine Teilmenge  $A \subseteq G$  ist genau dann abgeschlossen **in  $G$** , wenn es eine in  $\mathbb{C}$  abgeschlossene Menge  $A_0$  gibt, so dass  $A = A_0 \cap G$ .

Ist  $G$  selbst offen (z.B. ein Gebiet), so besteht keinerlei Unterschied zwischen „offen in  $G$ “ und „offen in  $\mathbb{C}$ “ – wohl aber zwischen „abgeschlossen in  $G$ “ und „abgeschlossen in  $\mathbb{C}$ “: Ist beispielsweise  $G = \mathbb{D}$  die offene Einheitskreisscheibe, so ist  $A := \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $G$ <sup>13</sup>, jedoch ist  $A$  offensichtlich nicht abgeschlossen in  $\mathbb{C}$ .

## 2.2 Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

**Definition 2.10** Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume mit den Metriken  $d_X$  bzw.  $d_Y$ . Es sei  $a \in X$ . Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig im Punkt  $a$** , falls folgende Bedingung gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \left( d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \right).$$

Die Funktion  $f$  heißt **stetig**, falls sie in jedem Punkt  $a \in X$  stetig ist.

Eine große Rolle in vielen Beweisen spielt das Folgenkriterium für Stetigkeit:

**Satz 2.11 (Folgenkriterium)** Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume, und es sei  $a \in X$ . Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Die Funktion  $f$  ist stetig im Punkt  $a$ .

---

<sup>13</sup>Drei mögliche Begründungen hierfür sind: (1) Ihr Komplement  $G \setminus A = \{z \in \mathbb{D} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$  ist offen, (2) Für jede Folge in  $A$ , die in  $G$  konvergiert, liegt auch der Grenzwert in  $A$ , denn die  $A$  definierende Bedingung  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  bleibt unter Grenzübergängen erhalten. (3) Es ist  $A = G \cap A_0$  mit der in  $\mathbb{C}$  abgeschlossenen Menge  $A_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ .

- (b) Für jede (!) Folge  $(x_n)_{n \geq 1}$  von Punkten  $x_n \in X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ist die Folge der Funktionswerte  $f(x_n)$  konvergent mit dem Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Die in (b) beschriebene Eigenschaft bezeichnet man manchmal auch als **Folgenstetigkeit**. Das Folgenkriterium besagt also, dass Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind.

Die nächsten Sätze geben Aufschluss darüber, wie sich topologische Eigenschaften von Mengen (nämlich Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit) unter der Einwirkung von stetigen Abbildungen verhalten:

**Satz 2.12** Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$ . Dann gilt:

- (a) Das Bild  $f(K)$  ist kompakt in  $Y$ .
- (b) (**Satz vom Maximum**) Falls  $Y = \mathbb{R}$  ist, so besitzt  $f$  auf  $K$  ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

**Satz 2.13** Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume. Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- (a) Die Funktion  $f$  ist stetig.
- (b) Für jede offene Menge  $V$  in  $Y$  ist das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$ .
- (c) Für jede abgeschlossene Menge  $B$  in  $Y$  ist das Urbild  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen in  $X$ .

Ein weiteres wichtiges Resultat über das Abbildungsverhalten stetiger Funktionen ist der Zwischenwertsatz, wonach eine stetige *reellwertige* Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Intervall  $I$  alle  $y$  zwischen zwei Funktionswerten  $f(a)$  und  $f(b)$  ebenfalls als Funktionswerte annimmt. Dieser Satz hat zunächst keine direkte Entsprechung im Komplexen; er ist ein typischer Satz der „eindimensionalen“ Analysis und für Abbildungen in den  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  (und damit insbesondere auch für komplexwertige Abbildungen) nicht ohne Weiteres anwendbar<sup>14</sup>. Dies ist auch nicht überraschend: Anschaulich besagt der Zwischenwertsatz ja, dass es z.B. nicht möglich ist, auf der Brennerautobahn von Österreich nach Italien zu fahren, ohne die Brenner-Mautstation an der Grenze zu passieren. Wenn man hingegen *alle* Möglichkeiten in Betracht zieht, von Österreich nach Italien zu gelangen (auch abseits der Straßen, evtl. sogar auf dem Luftweg), so sind darunter auch Wege, die die Mautstation vermeiden<sup>15</sup>. – Trotz dieser Ausführungen ist es möglich, den Gehalt des Zwischenwertsatzes so zu abstrahieren, dass er sich ins „Höherdimensionale“ verallgemeinern lässt; man gelangt dann zu der Aussage, dass stetige Funktionen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden. Siehe hierzu Satz 4.5.

In obiger Definition der Stetigkeit hängt  $\delta$  nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern auch von dem betrachteten Punkt  $a$  ab. Oft ist die Situation interessant, in der man für alle Punkte  $a$  mit einem „universellen“, nur von  $\varepsilon$  abhängigen  $\delta$  auskommt. Dies führt auf den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit.

<sup>14</sup>allein schon weil der Begriff des „Dazwischenliegens“ im Höherdimensionalen keinen Sinn mehr ergibt: Liegt Erlangen zwischen Würzburg und Bamberg? Oder Würzburg zwischen Bamberg und Erlangen? Oder Bamberg zwischen Würzburg und Erlangen?

<sup>15</sup>Dieses Beispiel zeigt übrigens auch die Unverzichtbarkeit der Stetigkeitsvoraussetzung, denn wenn man sich von Österreich nach Italien beamen könnte, wäre der Mautstation ebenfalls leicht auszuweichen.

**Definition 2.14** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall_{x_1, x_2 \in X} \left( d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \right).$$

Offensichtlich folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion die Stetigkeit. Die Umkehrung gilt i.Allg. nicht, wie z.B. die auf  $\mathbb{C}$  stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion  $z \mapsto z^2$  illustriert (siehe hierzu Beispiel 2.16).

Auf kompakten Mengen fallen Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit jedoch zusammen; anschaulich: Auf einem Kompaktum kann die Stetigkeit einer Funktion nicht „beliebig schlecht“ werden:

**Satz 2.15** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume, und  $X$  sei kompakt. Dann ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig.

Diese Beobachtung macht man sich in der reellen Analysis u.a. beim Nachweis zunutze, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen Riemann-integrierbar sind.

**Beispiel 2.16** Um den Unterschied zwischen stetiger und gleichmäßiger Stetigkeit besser zu verstehen, betrachten wir noch einmal die bereits erwähnte Funktion  $z \mapsto f(z) := z^2$ . Setzt man zu gegebenem  $\varepsilon > 0$

$$\delta(z_0) := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1 + 2|z_0|}, 1 \right\} > 0,$$

so gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \delta(z_0)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |z^2 - z_0^2| = |z - z_0| \cdot |z + z_0| \\ &\leq \delta(z_0) \cdot (2|z_0| + |z - z_0|) \leq \frac{\varepsilon}{1 + 2|z_0|} \cdot (2|z_0| + \delta(z_0)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von  $f$  in  $z_0$ . Man sieht aber, dass  $\delta(z_0)$  von  $z_0$  abhängt: Für  $|z_0| \rightarrow \infty$  gilt  $\delta(z_0) \rightarrow 0$ .

Schränkt man hingegen  $f$  auf ein Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{C}$  ein, so findet man ein von  $z_0 \in K$  unabhängiges  $\delta > 0$  mit  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  für alle  $z, z_0 \in K$  mit  $|z - z_0| < \delta$ : Es gibt dann nämlich ein  $R > 0$  mit  $|z| < R$  für alle  $z \in K$ ; setzt man nun

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1 + 2R}, 1 \right\} > 0,$$

so leistet  $\delta > 0$  aufgrund der obigen Überlegungen das Gewünschte.  $\square$

Umkehrfunktionen von stetigen, injektiven Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem reellen Intervall  $I$  sind automatisch stetig. In allgemeinerem Kontext ist dies allerdings nicht gültig: Die Umkehrabbildung einer stetigen, injektiven Abbildung zwischen zwei beliebigen metrischen Räumen muss nicht stetig sein<sup>16</sup>. Abbildungen, für die dies doch der Fall ist, tragen einen eigenen Namen:

<sup>16</sup>Beispielsweise bildet  $t \mapsto e^{it}$  das halboffene Intervall  $]0; 2\pi]$  stetig und bijektiv auf die Einheitskreislinie  $\partial\mathbb{D}$  ab. (Anschaulich: Das Intervall  $]0; 2\pi]$  wird auf den Einheitskreisrand abgewickelt.) Jedoch ist die Umkehrabbildung im Punkt 1 unstetig: Sie springt dort, wenn man die Einheitskreislinie im mathematisch positiven Sinn durchläuft, von  $2\pi$  nach 0.

**Definition 2.17** Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt ein **Homöomorphismus**, falls  $f$  stetig und bijektiv und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist.

Mittels Satz 2.13 sieht man leicht, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen  $X$  und  $Y$  genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn sie stetig und bijektiv ist und offene (bzw. abgeschlossene) Mengen auf ebensolche abbildet.

## 2.3 Gleichmäßige Konvergenz

Das Studium der Frage, wann das Vertauschen zweier Grenzprozesse möglich ist, ist eines der zentralen Themen der Analysis. Zu beachten ist dabei, dass auch die Stetigkeit über das Folgenkriterium eng mit Grenzprozessen zu tun hat und dass es sich auch bei der Differentiation und der Integration letztlich um Grenzprozesse handelt.

Wie einfache Beispiele zeigen, genügt die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge nicht, damit sich die Stetigkeit (bzw. Differenzierbarkeit bzw. Integrierbarkeit) von den einzelnen Funktionen der Folge auf die Grenzfunktion überträgt. Aus diesem Grund führt man den stärkeren Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein:

**Definition 2.18** Es seien  $D \neq \emptyset$  eine Menge,  $(Y, d)$  ein metrischer Raum und  $(f_n)_n$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow Y$ . Diese Folge heißt **gleichmäßig konvergent auf  $D$  mit der Grenzfunktion  $f : D \rightarrow Y$** , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq N \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

### Bemerkung 2.19

- (1) Wesentlich hierbei ist, dass die Zahl  $N$  nur von  $\varepsilon$  und nicht von  $x$  abhängt. Es ist aufschlussreich, die Definitionen der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz in Quantorenschreibweise miteinander zu vergleichen:

$$\begin{aligned} \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon & \quad (\text{punktweise Konvergenz}) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall n \geq N \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon & \quad (\text{gleichmäßige Konvergenz}) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Konvergenz folgt.

- (2) Da auch unendliche Reihen von Funktionen „nur“ Funktionenfolgen (nämlich von Partialsummen) sind, haben wir mit Definition 2.18 insbesondere auch erklärt, was unter der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen zu verstehen ist.
- (3) Für Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^m$  kann man die gleichmäßige Konvergenz auch mithilfe der sog. **Supremumsnorm**

$$\|f\|_\infty := \sup \{ \|f(x)\| : x \in D \}$$

formulieren: Eine Folge  $(f_n)_n$  von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}^m$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $D$  gegen eine Grenzfunktion  $f$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

(denn Letzteres ist gleichbedeutend damit, dass es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ , d.h. mit  $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  und alle  $x \in D$ ).

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz auf die „gewöhnliche“ Konvergenz (allerdings bezüglich einer „komplizierteren“ Metrik) zurückgeführt. □

Die folgenden drei Sätze enthalten die wichtigsten Kriterien dafür, dass sich Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit bzw. Differenzierbarkeit von den Funktionen in einer Funktionenfolge auf die Grenzfunktion übertragen und die Vertauschung von Grenzübergang und Integration bzw. Differentiation möglich ist:

**Satz 2.20 (Satz von Cauchy und Weierstraß)** *Es seien  $X$  und  $Y$  metrische Räume und  $(f_n)_n$  eine Folge von stetigen Funktionen  $f_n : X \rightarrow Y$ , die auf  $X$  gleichmäßig konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion  $f : X \rightarrow Y$  stetig auf  $X$ .*

**Satz 2.21** *Es sei  $(f_n)_n$  eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem echten kompakten Intervall  $I = [a, b]$ . Die Folge sei auf  $I$  gleichmäßig konvergent mit der Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Dieses Resultat spielt auch in der Funktionentheorie eine große Rolle, bei der Vertauschung von Grenzübergängen mit komplexen Wegintegralen, welche sich ja mittels geeigneter Parametrisierungen auf reelle Riemann-Integrale zurückführen lassen.

**Satz 2.22 (Ableitung von Grenzfunktionen)** *Es sei  $(f_n)_n$  eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem echten kompakten Intervall  $I = [a; b]$ . Die Folge  $(f'_n)_n$  der Ableitungen sei auf  $I$  gleichmäßig konvergent. Für einen Punkt  $x_0 \in I$  sei die Zahlenfolge  $(f_n(x_0))_n$  konvergent. Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_n$  auf  $I$  gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion*

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

und deren Ableitung ist

$$f' = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n. \quad (2.1)$$

Eine analoge Aussage gilt für Reihen von stetig differenzierbaren Funktionen.

Auf die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen kann man hierbei nicht verzichten; setzt man lediglich die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge selbst voraus, so bleibt das Resultat nicht gültig: So konvergiert etwa die Folge der Funktionen  $f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  gegen die Nullfunktion, die Folge der Ableitungen  $f'_n(x) = \cos(nx)$  ist aber fast nirgends konvergent. In der komplexen Analysis hingegen sind die Verhältnisse deutlich einfacher: Hier genügt die (lokal) gleichmäßige Konvergenz einer Folge von holomorphen Funktionen dafür, dass man Grenzübergang und Differentiation vertauschen darf. Dies ist eine der beiden Aussagen des Konvergenzsatzes von Weierstraß (Satz 12.3).

In den folgenden drei Sätzen stellen wir wichtige Kriterien für gleichmäßige Konvergenz zusammen:

**Satz 2.23 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)** Es sei  $D$  eine nichtleere Menge und  $(f_n)_n$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (a) Die Folge  $(f_n)_n$  ist gleichmäßig konvergent auf  $D$ .
- (b) Zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $N$ , so dass für alle  $x \in D$  und alle  $m, n \geq N$  die Ungleichung  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  besteht. In Quantorenschreibweise:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{x \in D} \forall_{m, n \geq N} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Satz 2.24 (Weierstraßsches Majoranten-Kriterium)** Es sei  $D$  eine nichtleere Menge und  $(f_k)_{k \geq 0}$  eine Folge von Funktionen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Es existiere eine Folge  $(c_k)_{k \geq 0}$  von Zahlen  $c_k > 0$ , so dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  konvergiert und

$$|f_k(x)| \leq c_k \quad \text{für alle } x \in D \text{ und alle } k \geq 0$$

gilt. Dann sind die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$$

gleichmäßig konvergent auf  $D$ .

**Satz 2.25** Es sei  $K$  ein kompakter metrischer Raum und  $(f_n)_n$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ . Genau dann konvergiert  $(f_n)_n$  gleichmäßig, wenn für jede konvergente Folge  $(x_n)_n$  in  $K$  die Folge  $(f_n(x_n))_n$  konvergiert. In diesem Fall gilt für jede konvergente Folge  $(x_n)_n$  in  $K$  mit Grenzwert  $\tilde{x}$  die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(\tilde{x}),$$

wobei  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  die Grenzfunktion ist.

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ist auch in der komplexen Analysis von überragender Bedeutung. Allerdings ist man hier typischerweise mit dem Phänomen konfrontiert, dass i.Allg. keine gleichmäßige Konvergenz im gesamten Definitionsbereich vorliegt, sondern nur in kompakten Teilmengen davon, während die Konvergenz bei Annäherung an den Rand schlechter wird. Daher führt man den Begriff der **lokal gleichmäßigen** bzw. **kompakt gleichmäßigen** Konvergenz ein (Definition 12.1), welcher sich als der zentrale Konvergenzbegriff der Funktionentheorie erweisen wird. Das soeben beschriebene Phänomen kennen wir ansatzweise auch schon aus der reellen Analysis, nämlich vom Studium von Potenzreihen, an die wir im folgenden Abschnitt kurz erinnern wollen:

## 2.4 Potenzreihen und Taylor-Reihen

**Definition 2.26** Es sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine **Potenzreihe**. Man nennt  $z_0$  den **Entwickelpunkt** und die Zahlen  $a_n$  die **Koeffizienten** dieser Potenzreihe.

Eine beliebige Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  mit Entwicklungspunkt  $z_0$  geht durch die Substitution  $w := z - z_0$  in die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$  mit dem Entwicklungspunkt 0 über. Aus der Konvergenz in einem Punkt  $z_1$  bzw. der gleichmäßigen Konvergenz auf einer Menge  $D$  wird dabei die Konvergenz im Punkt  $w_1 = z_1 - z_0$  bzw. die gleichmäßige Konvergenz auf  $\{w \in \mathbb{C} \mid w + z_0 \in D\}$ . Deshalb betrachtet man oft o.B.d.A. nur Potenzreihen mit dem Nullpunkt als Entwicklungspunkt. Dies ist zulässig, solange man nicht simultan Potenzreihen mit verschiedenen Entwicklungspunkten zu behandeln hat. Auch die bekannten Potenzreihenentwicklungen der elementaren transzendenten Funktionen (Exponentialfunktion, Sinus, Cosinus etc.), mit denen wir uns in Abschnitt 2.5 näher beschäftigen, beziehen sich auf den Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ .<sup>17</sup>

Potenzreihen haben ein sehr übersichtliches und angenehmes Konvergenzverhalten, das zumindest grob durch eine einzige Zahl, den Konvergenzradius beschrieben werden kann. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes, dessen Beweis auf dem Weierstraßschen Majorantenkriterium und dem Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe fußt.

**Satz 2.27 (Konvergenz von Potenzreihen)** Für jede Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $R \in [0, \infty]$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Die Potenzreihe ist in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < R$  konvergent und in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > R$  divergent.
- (2) Die Potenzreihe ist auf jedem Kompaktum  $K \subseteq U_R(0)$  gleichmäßig konvergent, und auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n$  (bei der es sich **nicht** um eine Potenzreihe handelt!) ist auf jedem solchen Kompaktum gleichmäßig konvergent.
- (3) Im Falle  $R > 0$  wird durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine stetige Funktion  $f : U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  auf der offenen Kreisscheibe  $U_R(0)$  in  $\mathbb{C}$  definiert.

Die Größe  $R$  heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe, und die Kreisscheibe  $U_R(0)$  heißt ihr **Konvergenzkreis**.

**Warnung:** Die Konvergenz einer Potenzreihe ist i. Allg. nicht gleichmäßig im Konvergenzkreis, sondern nur gleichmäßig auf Kompakta in dessen Innerem, d.h. sie ist *kompakt gleichmäßig* bzw. *lokal gleichmäßig* (siehe hierzu ausführlich Lektion 12). Zum Rand hin wird die Konvergenz i.Allg. „schlechter“. (Das Beispiel der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$  zeigt allerdings, dass gelegentlich doch gleichmäßige Konvergenz auf dem ganzen Konvergenzkreis vorliegen kann.)

Der folgende Satz stellt zwei probate Formeln bereit, mit deren Hilfe man den Konvergenzradius von Potenzreihen berechnen kann.

**Satz 2.28** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe und  $R$  ihr Konvergenzradius. Dann gilt:

(a)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{Hadamardsche Formel}).$$

---

<sup>17</sup>In diesen Spezialfällen erhält man aus den Additionstheoremen dieser Funktionen leicht Potenzreihenentwicklungen auch um andere Entwicklungspunkte. Dies ist im Allgemeinen nicht möglich. Ebenso sehen die Potenzreihenentwicklungen ein und derselben Funktion um zwei unterschiedliche Punkte i.Allg. natürlich völlig verschieden aus, selbst wenn die Entwicklungspunkte „sehr nahe“ beieinander liegen.

(b) Falls der (eigentliche oder uneigentliche) Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

existiert, so ist er gleich  $R$ .

**Warnung:** Falls der Grenzwert in (b) nicht existiert, ist durch Betrachtung der Quotienten  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  keine Aussage über den Konvergenzradius möglich. Man kann auch **nicht** etwa – analog zu (a) – den Limes durch den Limes superior (der ja immer existiert) ersetzen, wie einfache Gegenbeispiele zeigen.

Über die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzkreises ist keine allgemeine Aussage möglich; tatsächlich kann auf dem Rand sehr verschiedenartiges und fast beliebig kompliziertes Verhalten vorliegen. Einen Vorgeschmack darauf geben die drei Potenzreihen

$$f_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad f_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

Alle drei Reihen haben den Konvergenzradius 1, wie man sofort aus Satz 2.28 sieht. Für  $|z| = 1$  verhalten sich die drei Reihen hingegen alle unterschiedlich:

- Die Reihe  $f_0$  ist in jedem Punkt  $z$  mit  $|z| = 1$  divergent; denn die Reihenglieder bilden dort keine Nullfolge.
- Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist eine konvergente Majorante der Potenzreihe  $f_2$  auf der kompakten Kreisscheibe vom Radius 1 um den Nullpunkt. Aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 2.24) folgt daher die gleichmäßige Konvergenz von  $f_2$  auf dem Konvergenzkreis einschließlich aller Randpunkte.
- Schließlich ist die Reihe  $f_1$  nach dem Leibniz-Kriterium in  $z = -1$  konvergent (und allgemeiner nach dem Abelschen Konvergenzkriterium<sup>18</sup> in jedem Punkt  $z \neq 1$  auf dem Rand des Konvergenzkreises konvergent), aber in  $z = 1$  divergent.

Aus der reellen Analysis ist ebenfalls bekannt, dass man reelle Potenzreihen gliedweise differenzieren darf; dies folgt im Wesentlichen aus Satz 2.22, welcher das gliedweise Differenzieren der (lokal gleichmäßig konvergenten) Potenzreihen gestattet. Eine entsprechende Aussage gilt auch in der komplexen Analysis. Wir können sie allerdings nicht einfach aus der reellen Analysis übertragen, denn der komplexe Differenzierbarkeitsbegriff ist ein anderer als der reelle, und auch die Vertauschbarkeitssätze lassen sich nicht Eins zu Eins übernehmen. Wir werden hierauf in Satz 6.1 zurückkommen.

Eng verwandt zum Konzept der Potenzreihen ist das der Taylor-Reihen: Falls  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein echtes Intervall und  $a$  ein innerer Punkt von  $I$  ist und falls die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar ist, so heißt die Potenzreihe

$$T_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \tag{2.2}$$

die **Taylor-Reihe von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$** .

---

<sup>18</sup>Dieses besagt: Ist  $(z_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von komplexen Zahlen und  $(c_n)_{n \geq 0}$  eine monoton fallende Nullfolge von positiven Zahlen und ist die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n z_k$  beschränkt, so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$  konvergent.

Motiviert ist die Betrachtung solcher Taylor-Reihen wie folgt: Häufig möchte man relativ komplizierte (aber hinreichend oft differenzierbare) Funktionen *lokal* durch einfachere Funktionen, z.B. durch Polynome approximieren. Im einfachsten Fall kennen wir dies aus der Definition der Differenzierbarkeit: Dass eine reellwertige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $a \in I$  differenzierbar ist, bedeutet gerade, dass  $f$  in der Nähe von  $a$  „hinreichend gut“ durch ein lineares Polynom approximiert werden kann; dessen Graph ist die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, f(a))$ . Allgemein sucht man Polynome, die mit  $f$  in der Nähe eines gegebenen Punktes  $a$  „besonders gut“ übereinstimmen. Es ist plausibel zu erwarten, dass die Approximation dann besonders gut ist, wenn möglichst viele Ableitungen des approximierenden Polynoms im Punkt  $a$  mit denjenigen von  $f$  übereinstimmen. Ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar, so leistet das  $n$ -te **Taylor-Polynom** von  $f$  im Punkt  $a$ , nämlich

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot (x - a)^k$$

das Gewünschte: Es gilt  $T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  für alle  $k = 0, \dots, n$ .

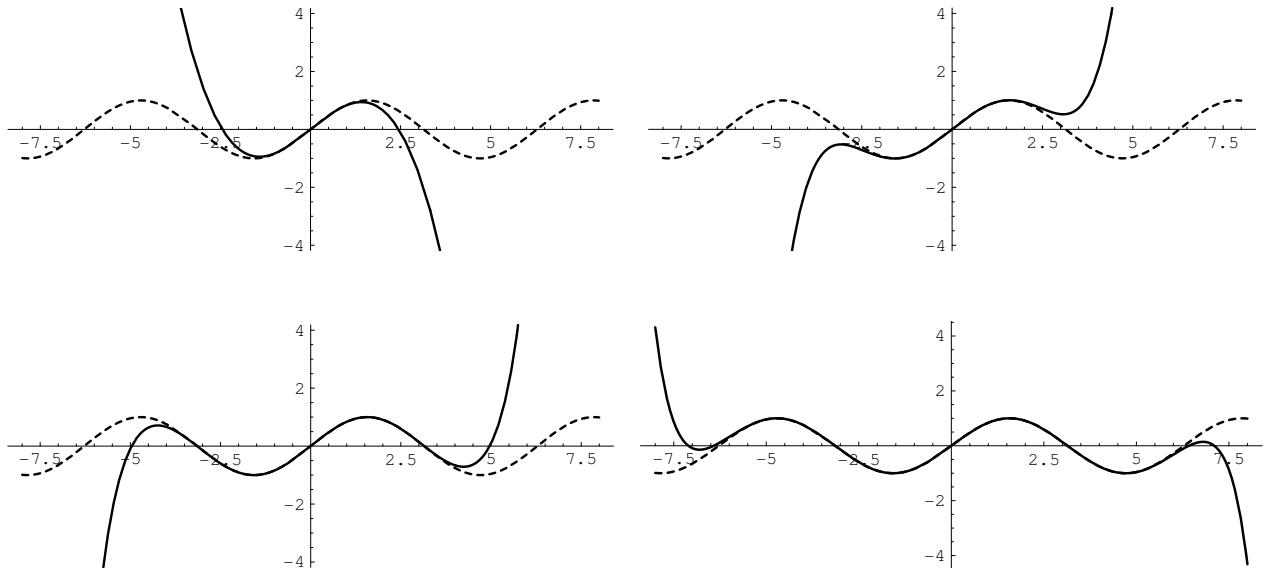


Abbildung 8: Das  $n$ -te Taylorpolynom des Sinus um den Entwicklungspunkt 0 für  $n = 3, 5, 9, 15$

Abbildung 8 zeigt einige Taylorpolynome des Sinus. In diesem Fall tritt der erhoffte Effekt ein, dass mit wachsendem Grad des Taylorpolynoms der Bereich, in dem approximierendes Taylorpolynom und approximierte Funktion „gut“ übereinstimmen, größer wird. Es wird aber auch deutlich, dass man alle Hoffnung fahren lassen muss, mit Taylor-Polynomen eine *gleichmäßige* Approximation (z.B. auf ganz  $\mathbb{R}$ ) zu erzielen.

Ist die betrachtete Funktion  $f$  nun sogar unendlich oft differenzierbar, so kann man Taylor-Polynome von beliebig hohem Grad bilden. Diese liefern im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  gerade die Taylor-Reihe (2.2) von  $f$ .

Man kann hoffen, dass diese  $f$  besonders gut approximiert – oder vielleicht sogar  $f$  darstellt. Dies ist freilich nicht immer der Fall: Zunächst stellt sich die Frage, für welche  $x$  die Taylorreihe  $T_a(x)$  überhaupt konvergiert. Als Potenzreihe hat sie einen Konvergenzradius; dieser kann im Extremfall 0 betragen, so dass die Taylor-Reihe nirgends (außer im Entwicklungspunkt  $a$ ) konvergiert. Auch wenn dieser etwas pathologisch anmutende Sonderfall nicht vorliegt, kann

das Konvergenzintervall der Taylor-Reihe deutlich kleiner sein als das Definitionsintervall der Funktion  $f$ . Und auch wenn die Taylor-Reihe in einem Punkt  $x \neq a$  konvergiert, dann nicht zwangsläufig gegen den Funktionswert  $f(x)$ . Das Standard-Beispiel hierfür dürfte aus den Analysis-Grundvorlesungen bekannt sein:

**Beispiel 2.29** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  (auch in 0) unendlich oft differenzierbar, aber ihre Taylor-Reihe im Nullpunkt ist die Nullreihe. Die Taylorreihe ist also überall konvergent, aber ihre Grenzfunktion stellt nirgends (außer im Entwicklungspunkt) die Funktion  $f$  dar, denn diese ist ja in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  nullstellenfrei.

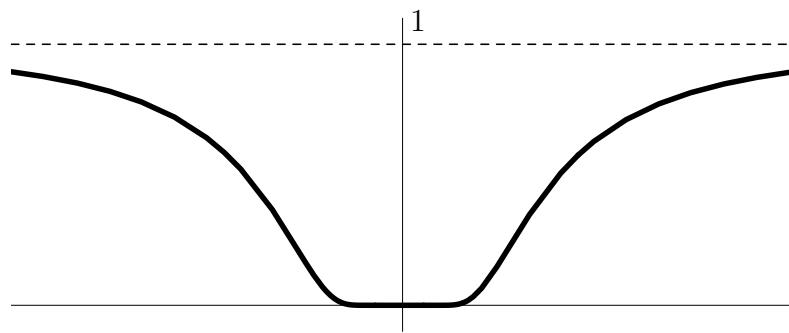


Abbildung 9: Die Funktion  $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Das überraschende Verhalten von  $f$  wird vom Standpunkt der komplexen Analysis aus besser verständlich: Während  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Nullpunkt stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist, ist  $f(z) := \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$  als Funktion der komplexen Variablen  $z$  im Nullpunkt unstetig; genauer hat  $f$  dort eine wesentliche Singularität. Gemäß dem Satz von Casorati-Weierstraß (Satz 10.7) bzw. dem Großen Satz von Picard (S. 199) verhalten sich Funktionen mit einer solchen Singularität außerordentlich turbulent. Dies sieht man hier z.B., indem man rein imaginäre Werte  $z = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$  einsetzt: Es gilt

$$f(iy) = \exp\left(+\frac{1}{y^2}\right) \rightarrow \infty \quad \text{für } y \rightarrow 0.$$

Genauer gilt sogar – wie es der Große Satz von Picard voraussagt –

$$f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{für jedes (beliebig kleine) } \delta > 0,$$

d.h.  $f$  nimmt in beliebig kleinen Umgebungen von 0 sämtliche Werte an, die die Exponentialfunktion in  $\mathbb{C}$  überhaupt annimmt.

Dies begründet man folgendermaßen:  $\dot{U}_\delta(0)$  wird durch  $z \mapsto \frac{1}{z^2}$  auf das Kreisäußere

$$A := \{w \in \mathbb{C} : |w| > \frac{1}{\delta^2}\}$$

abgebildet, für ein geeignetes  $R > 0$  ist der Streifen  $S := \{w \in \mathbb{C} \mid R \leq \operatorname{Im}(w) < R + 2\pi\}$  in  $A$  enthalten, und dieser wird durch die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet (Korollar 2.32 (b)). Daher ist

$$f(\dot{U}_\delta(0)) = \exp(A) \supseteq \exp(S) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Anderseits gilt wegen der Nullstellenfreiheit der Exponentialfunktion natürlich auch  $f(\dot{U}_\delta(0)) = \exp(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Hier liegt die tiefere Ursache dafür, dass die Funktion  $f$  nicht durch ihre Taylorreihe um 0 dargestellt werden kann. Wäre dies nämlich in  $\mathbb{R}$  möglich, so auch in  $\mathbb{C}$ , und dies hätte zur Folge, dass  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in einer Umgebung von 0 stetig und damit beschränkt wäre. – Eine andere aus der reellen Analysis bekannte Funktion mit einer wesentlichen Singularität im Nullpunkt ist  $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$ ; bei ihr demaskiert sich der „turbulente“ Charakter dieser Singularität ansatzweise bereits im Reellen: Sie ist ja ein Standardbeispiel für eine (im Nullpunkt) unstetige Funktion, bei der die Unstetigkeitsstelle keine Sprung-, sondern eine Oszillationsstelle ist (Abbildung 10).  $\square$

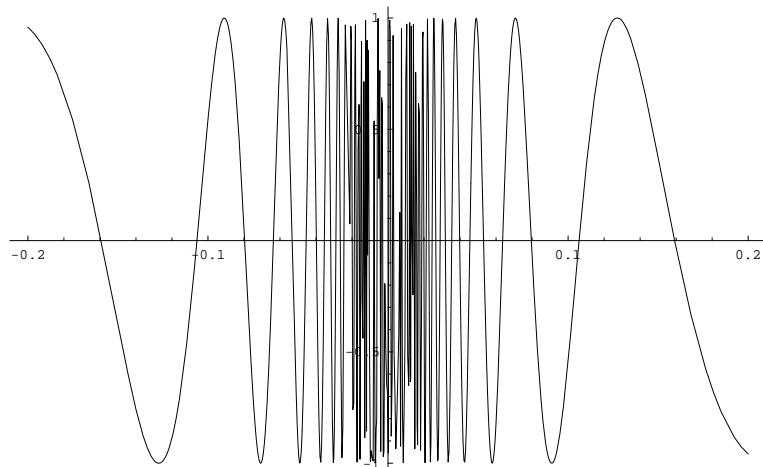


Abbildung 10: Das Verhalten von  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  nahe bei 0

Es ist in der reellen Analysis also keineswegs selbstverständlich, dass eine unendlich oft differenzierbare Funktion durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird. Funktionen, bei denen dies stets der Fall ist, die also um jeden Punkt ihres Definitionsbereichs *lokal* in eine Potenzreihe entwickelt werden können, bezeichnet man als **analytisch**<sup>19</sup>.

Ist  $f$  die Grenzfunktion einer reellen Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius  $R > 0$ , so ist  $f$  aufgrund des oben Gesagten jedenfalls unendlich oft differenzierbar auf  $I = ]-R, R[$ . A priori nicht klar ist jedoch, ob  $f$  auch analytisch ist, sich also um *jeden* Punkt  $a \in I$  in eine Potenzreihe entwickeln lässt (und nicht nur um den Entwicklungspunkt 0 der ursprünglichen Potenzreihe). Tatsächlich ist dies der Fall, und der Konvergenzradius der Entwicklung um  $a \in I$  ist mindestens  $R - |a|$ ; dies wird aber erst mit den Einsichten der komplexen Analysis verständlich (Satz 6.6).

<sup>19</sup>Die Betonung liegt hierbei auf „*lokal*“: Es wird nicht vorausgesetzt, dass diese Potenzreihen auf dem gesamten Definitionsbereich der Funktion konvergieren; dies wäre auch eine i. Allg. unerfüllbare Forderung, da ja das Konvergenzintervall einer Potenzreihe im Wesentlichen (bis evtl. auf die Randpunkte) symmetrisch bezüglich des Entwicklungspunktes ist.

In der reellen Analysis ist die Eigenschaft, unendlich oft (reell) differenzierbar zu sein, wesentlich schwächer als die Eigenschaft der Analytizität, wie Beispiel 2.29 zeigt. Dieser Unterschied verschwindet in der komplexen Analysis: Da diese einen stärkeren Differenzierbarkeitsbegriff zugrundelegt, kann man hier bereits von einmaliger komplexer Differenzierbarkeit (in einer offenen Menge, nicht in einem Punkt!) auf Analytizität schließen.

## 2.5 Elementare transzendente Funktionen

In diesem Abschnitt stellen wir die aus den Analysis-Grundvorlesungen bekannten Eigenschaften der wichtigsten elementaren transzendenten<sup>20</sup> Funktionen, d.h. der Exponentialfunktion, der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus sowie der Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus zusammen.

Ausgangspunkt für alles weitere ist die Definition der Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  über die in ganz  $\mathbb{C}$  konvergente Exponentialreihe (mit dem Entwicklungspunkt 0)

$$\exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und der Nachweis des Additionstheorems

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

aus dem sich u.a. die Nullstellenfreiheit der Exponentialfunktion ergibt.

Die Funktionen  $\sin, \cos, \sinh, \cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  werden dann definiert durch

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) & \cos(z) &:= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), & \cosh(z) &:= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \end{aligned}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Sie heißen der **Sinus**, der **Cosinus**, der **Sinus hyperbolicus** und der **Cosinus hyperbolicus**.

Ihr wichtigsten Eigenschaften sind in den folgenden Sätzen zusammengestellt:

**Satz 2.30** *Die trigonometrischen Funktionen und die Hyperbelfunktionen haben die folgenden Eigenschaften: Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt*

(1)

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos(z), & \sin(-z) &= -\sin(z), \\ \cosh(-z) &= \cosh(z), & \sinh(-z) &= -\sinh(z), \end{aligned}$$

d.h.  $\cos$  und  $\cosh$  sind gerade,  $\sin$  und  $\sinh$  ungerade Funktionen.

(2)

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i \cdot \sin(z),$$

<sup>20</sup> „Transzendent“ ist hier als Gegenbegriff zu „polynomial“ zu verstehen: Transzendente Funktionen sind diejenigen, deren Potenzreihenentwicklungen nicht abbrechen. Ausführlich und allgemeiner beschäftigen wir uns mit ihnen in Lektion 10.1.

(3)

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos(z) + i \sin(z) & \text{(Formel von Euler),} \\ e^z &= \cosh(z) + \sinh(z). \end{aligned}$$

(4)

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

Die erste Beziehung bezeichnet man auch als **trigonometrischen Pythagoras**.

(5) Es bestehen die auf ganz  $\mathbb{C}$  gültigen Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, & \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \\ \cosh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & \sinh(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

(6) Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \\ \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w), \\ \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w). \end{aligned}$$

Da der Cosinus und Sinus auf der reellen Achse reell sind, bedeutet die Formel von Euler insbesondere

$$\operatorname{Re} e^{it} = \cos t \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} e^{it} = \sin t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dies (in Verbindung mit dem trigonometrischen Pythagoras) ist die Grundlage für die in Abbildung 3 skizzierte geometrische Interpretation der Formel von Euler.

### Satz 2.31

(1) Die Funktionen  $\exp$ ,  $\cos$  und  $\sin$  sind periodisch. Die sämtlichen Perioden von  $\exp$  sind die Zahlen  $2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , und das sind die sämtlichen Stellen, an denen  $\exp$  den Wert 1 annimmt. Für reelle  $x$  und  $y$  gilt

$$|e^{x+iy}| = e^x.$$

Die sämtlichen Perioden von Cosinus und Sinus sind die Zahlen  $2k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , und zwar sowohl für  $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als auch für  $\cos, \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

(2) Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin z, & \cos(z + \pi) &= -\cos z, \\ \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos z, & \sin(z + \pi) &= -\sin z. \end{aligned}$$

(3) Der Sinus hat in  $\mathbb{C}$  genau die (reellen) Nullstellen  $k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

Der Cosinus hat in  $\mathbb{C}$  genau die (reellen) Nullstellen  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

Die Nullstellen und Perioden des komplexen Sinus und Cosinus sind also genau diejenigen, die man vom reellen Sinus und Cosinus kennt.

Satz 2.31 (1) enthält insbesondere die Beziehung

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

die sich im Folgenden immer wieder als nützlich erweisen wird. Für rein imaginäres  $z$  ergibt sich hieraus das bereits bekannte Resultat

$$|e^{it}| = e^{\operatorname{Re}(it)} = e^0 = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

### Korollar 2.32

- (a) Für jede reelle Zahl  $a$  wird das Intervall  $[a, a + 2\pi]$  durch  $x \mapsto e^{ix}$  bijektiv und stetig auf die Einheitskreislinie in  $\mathbb{C}$  abgebildet.
- (b) Für jede reelle Zahl  $a$  wird der horizontale Streifen  $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Im}(z) < a + 2\pi\}$  durch  $z \mapsto e^z$  bijektiv und stetig auf die punktierte Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet.

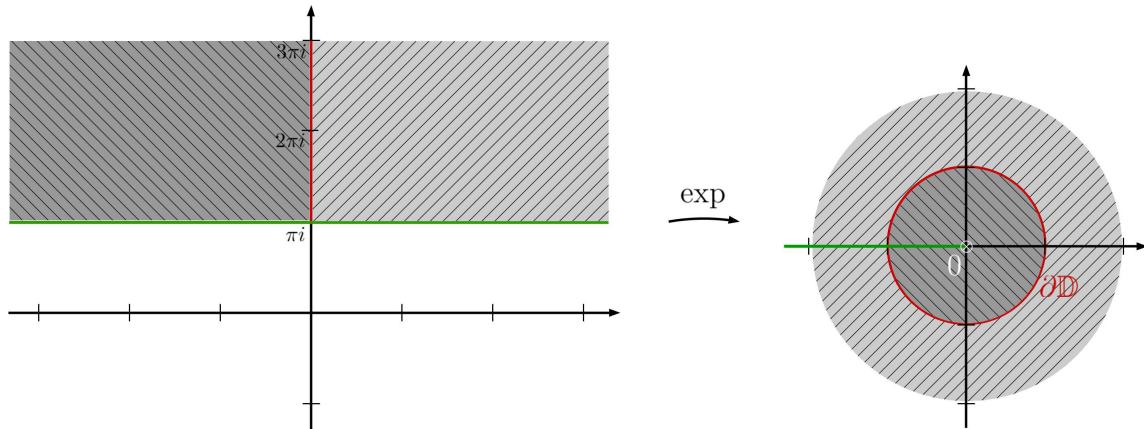


Abbildung 11: Zu Korollar 2.32 (b)

Korollar 2.32 (a) und die Formel von Euler liefern insbesondere die bereits in Abschnitt 1.2 diskutierte Polarkoordinatendarstellung  $z = |z| \cdot e^{i \arg(z)}$  komplexer Zahlen<sup>21</sup>. Als Folgerung hieraus erhält man u.a. ein Resultat über die Lösungen einer speziellen, auch in der Algebra sehr wichtigen Polynomgleichung:

**Lemma 2.33 (Einheitswurzeln)** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die Gleichung  $z^n - 1 = 0$  hat in  $\mathbb{C}$  die  $n$  verschiedenen Lösungen*

$$z_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) \quad \text{mit } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Für jede komplexe Zahl  $a \neq 0$  gibt es  $n$  verschiedene Lösungen der Gleichung  $z^n = a$  in  $\mathbb{C}$ .

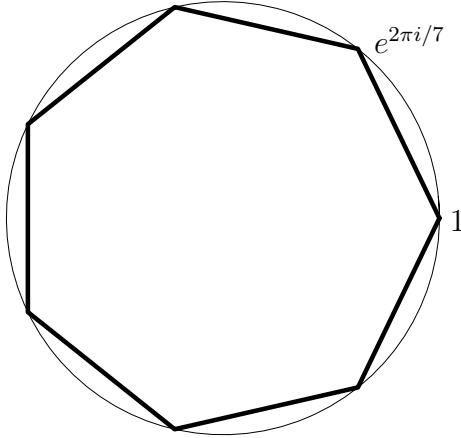


Abbildung 12: 7-te Einheitswurzeln

Die Lösungen  $z_k$  der Gleichung  $z^n - 1 = 0$  bilden die auf der Einheitskreislinie gelegenen Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks. Deswegen nennt man  $z^n - 1 = 0$  eine **Kreisteilungsgleichung**, und die Lösungen  $z_k = \exp(2\pi i k/n)$  heißen  $n$ -te **Einheitswurzeln** (Abbildung 12).

**Beispiel 2.34** Auch das **Abbildungsverhalten der Exponentialfunktion** lässt sich aus der Formel von Euler ablesen: Es sei  $c = a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $0 < \varepsilon < \pi$ . Das offene Quadrat

$$Q_\varepsilon(c) = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon, |y - b| < \varepsilon\}$$

wird durch die Exponentialfunktion auf das Gebiet

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(c) &= \{e^x \cdot e^{iy} : x, y \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon, |y - b| < \varepsilon\} \\ &= \{re^{it} : e^{a-\varepsilon} < r < e^{a+\varepsilon}, |t - b| < \varepsilon\}, \end{aligned}$$

also einen offenen Kreisringsektor mit Öffnungswinkel  $2\varepsilon$  abgebildet (Abbildung 13). Die Voraussetzung  $\varepsilon < \pi$  stellt dabei sicher, dass sich das „obere“ und das „untere“ Endstück des Kreisringsektors nicht überlappen.

In diesem Beispiel sieht man schön, wie einerseits die Form des Quadrats  $Q_\varepsilon(c)$  unter der Abbildung durch  $\exp$  ungefähr erhalten bleibt, wie aber andererseits Verzerrungseffekte auftreten, ähnlich wie in Beispiel 1.5 (3). Diese sind um so ausgeprägter, je größer die Ausdehnung des Quadrats, d.h. je größer  $\varepsilon$  ist.

Wir kommen auf dieses Beispiel beim Studium des lokalen Abbildungsverhaltens lokal konformer Abbildungen erneut zurück (siehe Beispiel 3.20).  $\square$

---

<sup>21</sup>Denn jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  lässt sich in der Form  $z = |z| \cdot \zeta$  mit  $|\zeta| = 1$  schreiben, und dieses  $\zeta$  besitzt nach der Surjektivitätsaussage in Korollar 2.32 (a) eine Darstellung  $\zeta = e^{it}$  mit  $t \in [0, 2\pi[$ , wobei sich die geometrische Interpretation von  $t$  als Winkel aus der Formel von Euler ergibt.

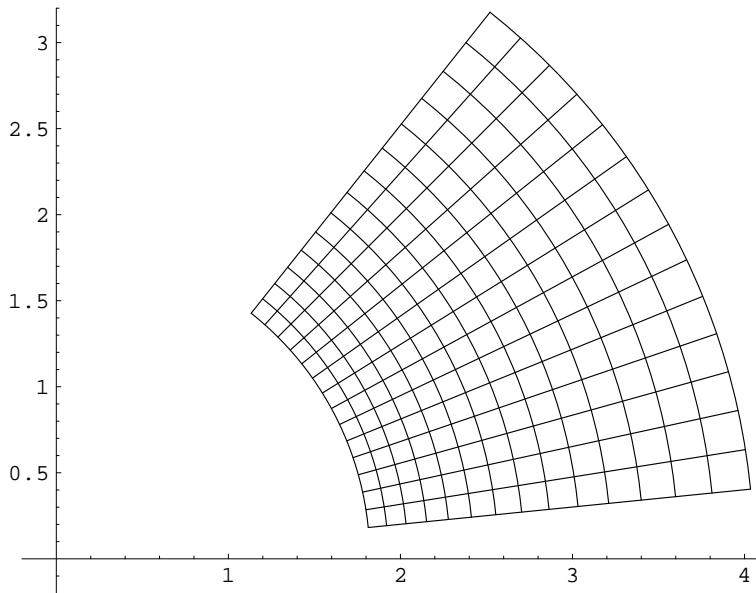


Abbildung 13: Die Abbildung von  $Q_\varepsilon(a)$  durch die Exponentialfunktion im Fall  $c = 1 + 0.5i$ ,  $\varepsilon = 0.4$

## 2.6 Aufgaben

### Beispielaufgaben

- 2.1 (a) Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene  $OH$ , die genau die sämtlichen Punkte von  $\mathbb{R}$  als Häufungswerte hat?  
 (b) Zeigen Sie, dass es eine Folge von Punkten in  $\mathbb{D}$  gibt, die genau die Punkte der komplexen Einheitskreislinie als Häufungswerte hat.

- 2.2 Bestimmen Sie die Menge der komplexen Zahlen  $z \in \mathbb{C}$ , für welche die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k}$  konvergiert. Leiten Sie im Falle der Konvergenz einen möglichst einfachen Term für den Grenzwert her.

### Einsendeaufgabe

- 2.3 (a) Es sei  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $y \neq 0$ . Zeigen Sie

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2} \cdot (e^{|y|} - e^{-|y|}).$$

- (b) Gegeben sei die Funktionenfolge  $(f_n)_n$  mit

$$f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Geben Sie die Menge  $M$  aller Punkte  $z \in \mathbb{C}$  an, für die  $(f_n(z))_n$  konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in M.$$

Ist die Konvergenz auf  $M$  gleichmäßig?