



Visualisierung von Symmetrieebenen mit immersiver virtueller Realität: eine innovative Erfahrung für den Geometrieunterricht

ANTONIO RUANO-CANO – SILVIA-NATIVIDAD MORAL-SÁNCHEZ – HANS-STEFAN SILLER

(Technische) Weiterentwicklung der jüngeren Vergangenheit, z.B. Virtual-Reality-Tools, machen es notwendig, didaktische Konzepte für die Arbeit am räumlichen Verständnis im Klassenzimmer anzupassen, insbesondere für die Untersuchung geometrischer Körper. Der Medieneinsatz im Mathematikunterricht wird auf diese Weise beim Erlernen der Geometrie erfahrungsgemäß als motivierend empfunden. In diesem Beitrag stellen wir Aktivitäten vor, bei denen die Identifizierung und Positionierung von Symmetrieebenen regelmäßiger Polyeder mit 14-15-jährigen Schüler/innen erarbeitet werden. Die Ergebnisse zeigen, dass von Lernenden gemachte Fehler praktisch verschwinden, wenn sie diese Art von Werkzeugen verwenden, die räumliche Visualisierung unterstützen.

1 Einführung

Der Mathematikunterricht steht derzeit vor großen Herausforderungen; insbesondere ist es notwendig, dass Lernende geeignetes Wissen erwerben, um künftige Bildungsabschnitte erfolgreich zu bewältigen (FLORES et al., 2015).

Eine dieser Anforderungen besteht darin, raumgeometrische Transformationen zu erkennen und zu verstehen, wie z.B. die Symmetrie. Studien, z.B. jene von PÉREZ und GUILLÉN (2007), zeigen, dass es notwendig ist, dem räumlichen Verständnis im Rahmen des Mathematiklehrplans einen hohen Stellenwert einzuräumen, insbesondere in Bezug auf die Raumgeometrie.

Die zunehmende Nutzung neuer Technologien (NÚÑEZ et al., 2022) beeinflusst die mögliche Gestaltung von Lernerfahrungen, so dass die Vorteile, die sie im Hinblick auf die räumliche Visualisierung bei der Bestimmung bestimmter Eigenschaften geometrischer Körper bieten, genutzt werden sollten.

Eine dieser neuen Technologien, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden, ist die immersive virtuelle Realität. Damit sind Technologien gemeint, die der Person, die sie benutzt, eine realistische, manipulierbare Umgebung bieten, in der reale oder fiktive Situationen dargestellt werden (YÜNKÜL, 2022). Zu Beginn ihrer Entwicklung war es schwierig, diese Art von Technologie in den Unterricht einzubeziehen, entweder wegen ihres hohen Preises oder wegen der Komplexität ihrer Anwendung.

Heutzutage ermöglichen die (Weiter-)Entwicklung und der Einsatz sowohl von Hardware als auch von Software mit spezifischendynamischen Geometrieprogrammen den Einsatz in Schulen (PERRI et al., 2022). Eine solche Geometrie-Software ist *Neotrie VR* (CANGAS et al., 2019). In der von diesem Programm bereitgestellten Schnittstelle finden sich mehrere Werkzeuge, um Eigenschaften geometrischer Körper anwenden und ableiten zu können. Erfahrungen wie die von RUANO-CANO und MORAL-SÁNCHEZ (2024) oder MORAL-SÁNCHEZ et al. (2023) zeigen verschiedene Anwendungen in der Sekundarstufe, der Primarstufe und in der Fort- und Weiterbildung.

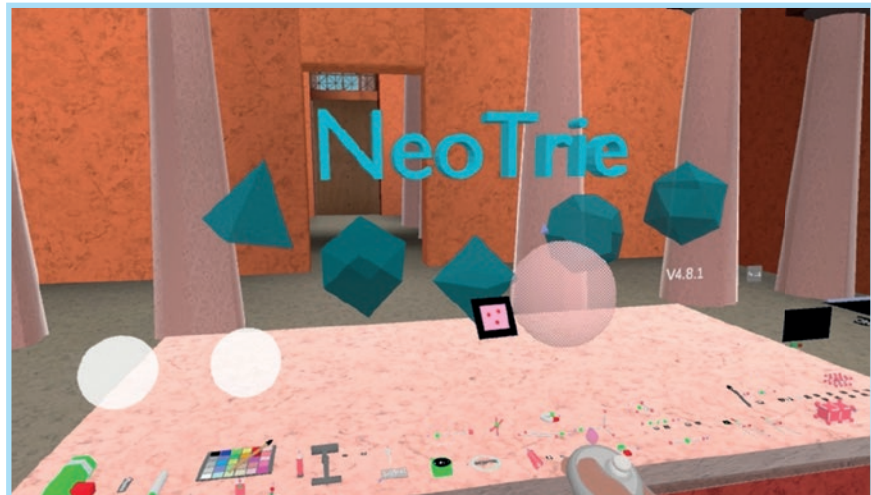


Abb. 1. NeotrieVR Software

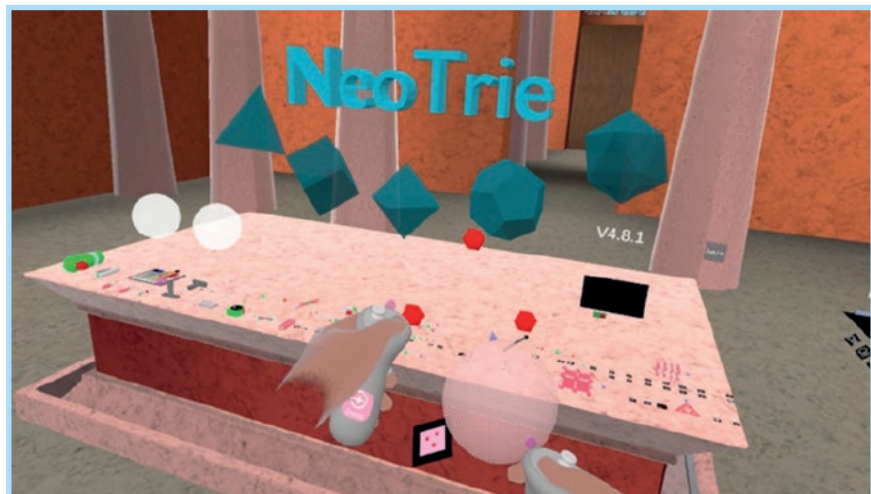


Abb. 2. Erstellung von Punkten zur Bildung einer Ebene



Abb. 3. Erstellen einer Symmetrieebene

2 Theoretischer Rahmen

2.1 Neue Werkzeuge für die Arbeit mit Geometrie

Studien zeigen (z.B. MORALES et al., 2022; CANGAS et al., 2019;

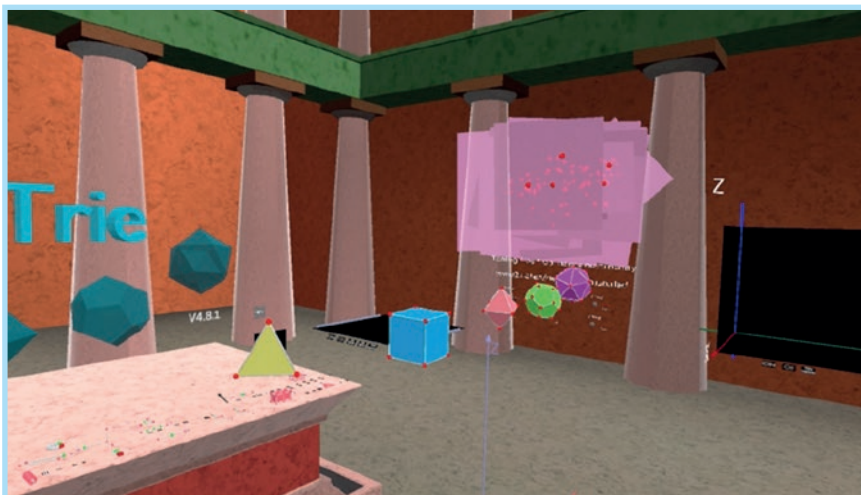


Abb. 4. Beginn von Aktivität 2

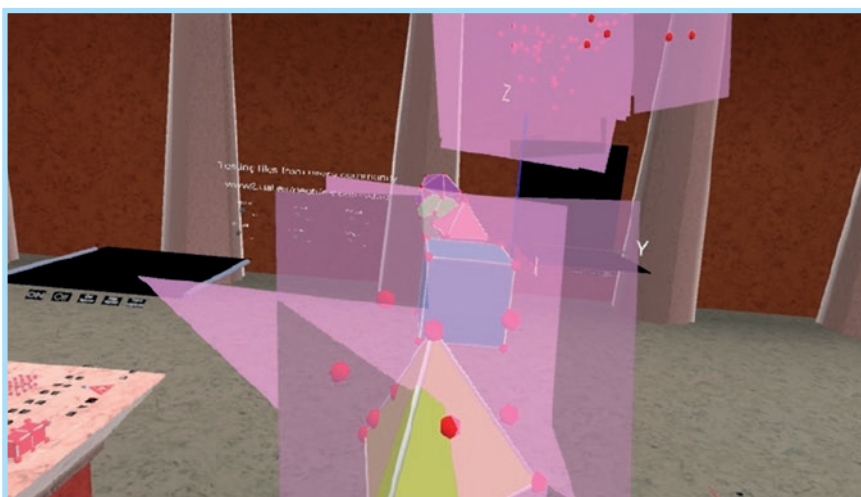


Abb. 5. Symmetrieebenen des Tetraeders (I)

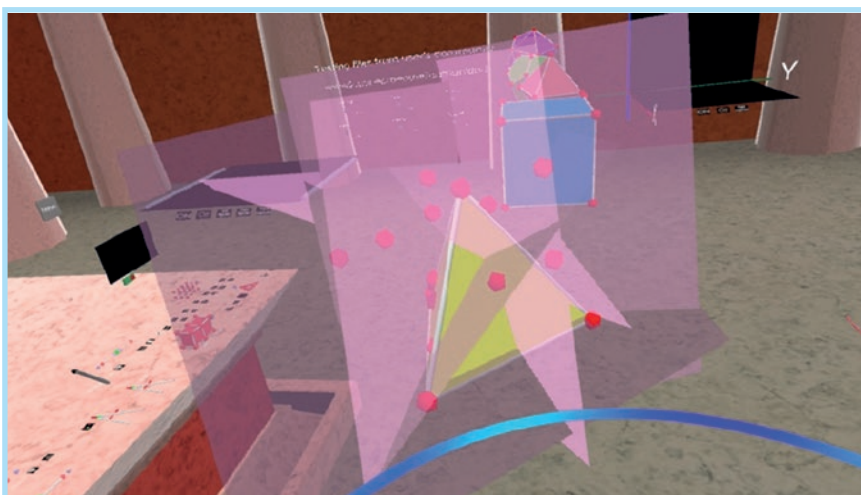


Abb. 6. Symmetrieebenen des Tetraeders (II)

nur zugänglich(er) sondern auch reichhaltiger wird. Diese immersive virtuelle Welt eröffnet die Möglichkeit, mit Werkzeugen an Aktivitäten zu arbeiten, die in der Realität aufgrund der logistischen Zwänge, die sie mit sich bringen können, sonst nur schwer durchführbar wären (RODRÍGUEZ et al., 2021). Ebenso ermöglicht die Technologie in der immersiven Umgebung ein Maß an Aufmerksamkeit und Konzentration, das mit anderen manipulativen oder digitalen Werkzeugen vermutlich nicht erreicht werden kann (MORAL-SÁNCHEZ et al., 2023). Die immersive virtuelle Realität, im Kontext der Geometrie, ermöglicht auch die Entwicklung von Kreativität und mathematischem Wissen angesichts der Möglichkeiten, die sie in kürzester Zeit bietet (OVALLE & FONSECA, 2020).

Ein weiterer Schritt bei der Nutzung dieser Art von immersiver Virtual-Reality-Technologie ist die Kombination mit gemischter Realität innerhalb derselben Software-Arbeitsumgebung. Auf diese Weise können Objekte in der Welt um uns herum modelliert werden, um sie in die Umgebung zu integrieren und mit ihnen zu interagieren (TRENCH et al., 2019). In der Mathematikausbildung sind sowohl immersive virtuelle Realität als auch gemischte Realität (noch) nicht weit verbreitet, obwohl es einige Beispiele wie das Lab@Future-Projekt gibt (z.B. BAUDIN et al., 2004).

2.2 Geometrische Körper und Symmetrieebenen

Eines der Merkmale, mit denen im Unterricht nur schwer manipulativ gearbeitet werden kann, ist die Lage der Symmetrieebenen innerhalb der platonischen Körper. Nach SAFAPOUR und SHAFIEE (2012) ist ein platonischer Körper bzw. der regelmäßige Polyeder ein konvexes Polyeder, dessen Flächen kongruente regelmäßige Polygone sind und bei dem an jedem Scheitelpunkt die gleiche Anzahl von Flächen zusammen treffen. Es gibt also nur fünf davon: Tetraeder (mit 4 Flächen, die gleichseitige Dreiecke sind), Würfel oder Hexaeder (mit 6 Flächen, die Quadrate sind), Oktaeder (mit 8 Flächen, die gleichseitige Dreiecke sind), Dodekaeder (mit 12 Flächen, die regelmäßige Fünfecke sind) und Ikosaeder (mit 20 Flächen, die gleichseitige Dreiecke sind). Nach SAWADA und FARSHCHI (2022) hat eine dreidimensionale Figur eine Symmetrieebene oder ist spiegelsymmetrisch, wenn sie durch eine Ebene in zwei iden-

MORAL-SÁNCHEZ & SILLER, 2022; MORAL-SÁNCHEZ et al., 2022), dass der Erwerb und das Erlernen mathematischer räumlicher Kompetenzen und Fertigkeiten durch die Verwendung immersiver virtueller Realität aus visueller und prozeduraler Sicht nicht

regelmäßige Fünfecke sind) und Ikosaeder (mit 20 Flächen, die gleichseitige Dreiecke sind). Nach SAWADA und FARSHCHI (2022) hat eine dreidimensionale Figur eine Symmetrieebene oder ist spiegelsymmetrisch, wenn sie durch eine Ebene in zwei iden-

tische Hälften geteilt werden kann, das heißt, wenn sie in zwei symmetrische Objekte geteilt wird.

Wenn Lernende die Symmetrieebenen in platonischen Körpern finden, treten oft Fehler und Schwierigkeiten auf (MORAL-SÁNCHEZ et al., 2023). Fehler sind Teil jedes Lernprozesses und sollen als Lerngelegenheit genutzt werden. Die Arbeit mit Symmetrieebenen bei geometrischen Körpern kann mit Fehlern bei der Beschreibung visueller Darstellungen und einem mangelnden Verständnis grundlegender geometrischer Konzepte zusammenhängen, wie z.B. orthogonaler Ansichten (GUILLÉN, 2000; RAMÍREZ UCLÉS, 2012; RAMÍREZ JOFRÉ et al., 2023), sowie mit Problemen bei der Visualisierung und mentalen Darstellung (RAMÍREZ JOFRÉ et al., 2023).

Daher wird ein Hilfsmittel benötigt, um das Erlernen dieser Art von Aktivitäten zu erleichtern und die Fehler und Schwierigkeiten zu beheben, die beim Umgang mit manipulativen Materialien auftreten. Ein solches Hilfsmittel könnte eine immersive Virtual-Reality- oder eine Mixed-Reality-Software sein.

3 Praktische Umsetzung

27 Lernende im Alter von 14 bzw. 15 Jahren einer Sekundarschule in der Provinz Malaga (Spanien) haben an dieser praktischen Umsetzung teilgenommen. Nur 8 dieser 27 Lernenden haben bereits einmal eine Virtual-Reality-Brille benutzt (29,63%). Für die restlichen 19 Lernenden (70,37%) war es das erste Mal, dass sie eine immersive Virtual-Reality-Brille verwenden durften. Die Lern-Aktivitäten wurden mit drei Gruppen von je 4 Personen und drei Gruppen von je 5 Personen absolviert. Es kamen insgesamt drei Virtual-Reality-Brillen, Modell Oculus Quest 2, zum Einsatz. Jede Brille war mit einem Tablet verbunden, auf dem die Lernenden, die die Brille gerade nicht nutzen, sehen konnten, was der Brillenträger sieht. Die Erfahrung(en), die die/der Brillenträger/in machte, waren also auch für den Rest der Gruppe sichtbar. Die verwendete Software ist *NeotrieVR*.

Abbildung 1 zeigt die Schnittstelle dieser Software. Dieses Virtual-Reality-Programm ist eine Umgebung, um in das Studium



Abb. 7. Horizontale Symmetrieebenen des Würfels



Abb. 8. Diagonale Symmetrieebenen des Würfels

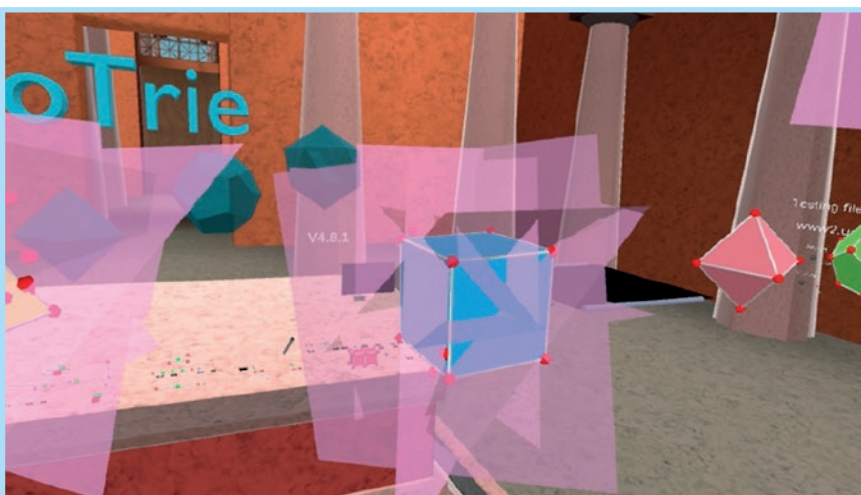


Abb. 9. Vertikale Symmetrieebenen des Würfels

der Raumgeometrie einzutauchen, da verschiedene dreidimensionale Objekte in einer ansprechenden und immersiven Umgebung mit mehreren Werkzeugen, mit denen man interagieren kann, erstellt oder manipuliert werden können (CANGAS et al., 2019).



Abb. 10. Symmetrieebenen des Oktaeders (I)

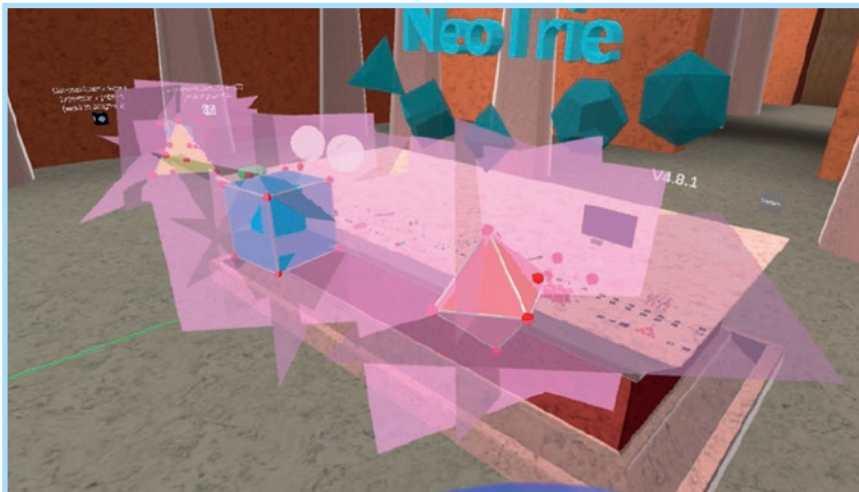


Abb. 11. Symmetrieebenen des Oktaeders (II)

indem sie den Auslöser zweimal drückt, so dass der Zeiger einmal auf einen Endpunkt und einmal auf den anderen Endpunkt zeigt.

- Eine weitere Funktion ist die *Greif-funktion*, mit der man Elemente in der Umgebung greifen kann, indem man den oberen Auslöser drückt, solange man nahe genug an der Figur ist. Wenn es jedoch eine Figur gibt, die auf diese Weise nicht gegriffen werden kann, wird sie mit dem unteren Auslöser gegriffen und die Funktion des oberen Auslösers in Kombination mit dem Greifen ausgeführt.
- Durch Drücken der obersten Taste auf der Fernbedienung (die B- oder Y-Taste, je nachdem, ob es sich um die rechte oder linke Taste handelt) wird ein Menü geöffnet, das unter anderem ein Symbol für eine Virtual-Reality-Brille enthält. Dieses Symbol ist das Mixed-Reality-Symbol, mit dem man von der anfänglichen Umgebung, in der sich die Schüler/innen in der virtuellen Realität befinden, dazu übergehen können, die realen Objekte in der Umgebung um sie herum zu sehen, allerdings mit den von NeotrieVR bereitgestellten Kreationen und Werkzeugen. Um diesen Modus zu aktivieren, bringt man einfach die Hand in die Nähe des Symbols, oder man richtet den *Attraktorstrahl* (der Strahl, der durch Drücken des unteren

Auslösers erscheint) auf das Symbol und drückt den oberen Auslöser. Um diesen Modus zu deaktivieren, ist es ratsam, ihn auf die gleiche Weise erneut zu drücken. Um das Menü zu schließen, drückt man in beiden Fällen dieselbe Taste, mit der man es geöffnet hat (Taste B oder Y).

Der Zeitplan hat 8 Sitzungen vorgesehen, sodass jede Gruppe 4 Sitzungen absolvieren konnte. Die Gruppen, die die Brille nicht benutzen, durften andere Aktivitäten im Zusammenhang mit den Symmetrieebenen bearbeiten. Die Abfolge der Aktivitäten, mit denen die Symmetrieebenen mit Hilfe der virtuellen Realität bearbeitet werden sollen, wird im Folgenden beschrieben.

4.1 Aktion 1: Erstellen von Symmetrieebenen

Ziel der ersten Aktivität ist es, das Bewusstsein dafür zu schärfen, was eine Symmetrieebene eines dreidimensionalen Objekts ist, und gleichzeitig den Umgang mit der virtuellen Realität zu üben. Zu diesem Zweck wird den Lernenden im Unterricht erklärt, was eine Symmetrieebene ist, und sie müssen in der virtuellen Umgebung anhand der nachfolgend beschriebenen Aufträge Ebenen erstellen, die sie als Symmetrieebenen verwenden können:

4 Erfahrung mit VR-Geometrie

Die Lernenden erhielten, bevor sie selbstständig arbeiten durften, eine Schulung zur grundlegenden Nutzung der *Neotrie-VR-Software*. Unter anderem ist es wichtig, die Funktionalität der einzelnen Bedienelemente der Brille zu kennen, um das Erlebnis durchführen zu können:

- Die Bewegung in der virtuellen Umgebung erfolgt über den Joystick in der Richtung, in die die Hand zeigt, d.h. wenn die Hand nach oben zeigt und der Joystick nach vorne gedrückt wird, erfolgt die Bewegung nach oben. Wird der Joystick in der gleichen Position nach hinten gedrückt, erfolgt die Bewegung entsprechend nach unten.
- Der untere Auslöser bewirkt, dass ein *Attraktorstrahl* erzeugt wird, der bei Betätigung des oberen Auslösers das anvisierte Geometrieobjekt oder den Körper anzieht.
- Indem man den oberen Auslöser drückt, erzeugt man mit der *Erstellungsfunktion* Punkte, indem sie den oberen Auslöser drückt, und verbindet Punkte durch Segmente,

- Zunächst sollen drei beliebige Punkte im Raum gewählt werden, wie in Abbildung 2 dargestellt, indem man seine Hand auf die *Erstellungsfunktion* legt. Durch Drücken des oberen Knopfes des Auslösers wird ein Punkt erzeugt. Wenn man dies an drei verschiedenen Stellen im Raum wiederholt, werden die drei für die Konstruktion der Ebene benötigten Punkte erzeugt. Die Handfunktion sollte dann auf *Greifen* eingestellt werden, da sie sehr nützlich ist, um die Position der zu erstellenden Punkte oder Ebenen auf weniger umständliche Weise zu verändern.
- Dann soll der Controller in die Nähe der Nutzerin/des Nutzers gebracht und der untere Auslöser gedrückt werden, um das Werkzeug zur Oberflächenerstellung zu greifen. Mit der anderen Hand soll der Ebenenmodus gewählt werden, der es ermöglicht, aus drei Punkten im Raum Ebenen zu erstellen. Die anderen Modi erzeugen aus drei Punkten einen Zylinder (Mittelpunkt des Basiskreises, ein Punkt auf dem Basiskreis und die Höhe), einen Kegel (Mittelpunkt des Basiskreises, ein Punkt auf dem Basiskreis und die Höhe) oder, mit zwei Punkten, eine Kugel (Mittelpunkt und ein Punkt auf der Kugel), aber diese anderen Modi interessieren in diesem Fall nicht.
- Schließlich soll der blaue Pfeil auf dem Werkzeug in Richtung der drei Punkte bewegt werden, die in beliebiger Reihenfolge erstellt wurden, und die gewünschte Ebene erscheint, wie in Abbildung 3 dargestellt.

4.2 Aktion 2: Identifizieren der Symmetrieebenen der platonischen Körper

Ziel dieser Aktivität ist es, dass die Schüler/innen alle Symmetrieebenen regelmäßiger Polyeder mit Hilfe der Werkzeuge einer immersiven Virtual-Reality-Software identifizieren und solche auch erstellen.

Bevor sie beginnen, werden sie gefragt, wie viele Symmetrieebenen ihrer Meinung nach jedes der regelmäßigen Polyeder hat. Sie sollen dies dann in die immersive digitale Umgebung übertragen, um die gewünschten Pläne auf folgende Weise zu ermitteln:

- In der Umgebung werden den Schüler/innen die bereits erstellten regelmäßigen Polyeder zur Verfügung gestellt, wie in Abbildung 4 zu sehen ist. Die Schüler müssen sie innerhalb jedes Polyeders lokalisieren, indem sie das *Greifwerkzeug* und die verschiedenen Auslöser verwenden, wobei sie so viele Symmetrieebenen wie nötig für jedes Polyeder verwenden und diese von denjenigen übernehmen, die sie zuvor in der vorherigen Aktivität erstellt haben. Auf diese Weise sollten sie alle Symmetrieebenen finden, die jedem der fünf regelmäßigen Polyeder entsprechen. Sie sollten die Ergebnisse in Form von Screenshots sammeln, d. h. die Polyeder mit all ihren Symmetrieebenen in den verschiedenen Raumrichtungen, die sie für angemessen halten, und außerdem sollten sie herausfinden, wie viele Symmetrieebenen jedes

regelmäßige Polyeder hat, einige Beispiele sind in den Abbildungen 5 und 6 beim Tetraeder, in den Abbildungen 7, 8 und 9 beim Würfel bzw. in den Abbildungen 10 und 11 beim Oktaeder dargestellt.



Abb. 12. Rubik's Würfel in Form eines Hexaeders und eines Dodekaeders

4.3 Aktion 3: Modellierung der Symmetrieebenen mit gemischter Realität

Letztere besteht darin, Objekte in der realen Umgebung zu modellieren, um dann Symmetrieebenen in diesen Objekten zu finden:

- Zunächst wird die bereits oben erwähnte Mixed-Reality-Option angeklickt. Auf diese Weise können die Schüler/innen den realen Raum sehen, der sie in der Umgebung umgibt, und auf diese Weise können sie mit den Objekten um sie herum durch die Virtual-Reality-Brille interagieren.
- Anschließend erhalten sie zwei Rubik's Cubes: einen in Form eines Würfels und einen in Form eines Dodekaeders, wie in Abbildung 12 dargestellt. Wie in Aufgabe 2 müssen die Schüler die Symmetrieebenen dieser beiden regelmäßigen Polyeder identifizieren, indem sie die realen Objekte mit den virtuellen Symmetrieebenen kombinieren.

Gruppe	Tetraedron		Hexaeder		Oktaeder		Dodekaeder		Ikosaeder	
	Ehemals	Dann	Ehemals	Dann	Ehemals	Dann	Ehemals	Dann	Ehemals	Dann
1	2	6	2	4	4	8	6	15	10	15
2	4	6	6	9	8	9	12	15	20	15
3	6	6	8	9	16	9	6	15	20	15
4	3	6	4	9	4	9	6	15	19	15
5	4	6	6	9	8	9	12	15	6	15
6	6	6	9	9	8	9	24	15	12	15

Tab. 1. Ergebnisse des Vergleichs der Lage der Symmetrieebenen in jedem der rechteckigen Polyeder mit traditionellen manipulativen Materialien und mit der immersiven virtuellen Realitätsumgebung *Neotrie VR*.

5 Ergebnisse und Schlussfolgerungen

Die Ergebnisse der Antworten der einzelnen Schülergruppen in Bezug auf die Anzahl der Symmetrieebenen jedes der regelmäßigen Polyeder sind unten dargestellt. Auf diese Weise ist es möglich, zu vergleichen, wie viele Symmetrieebenen sie mit traditionellen Hilfsmitteln beobachten und lokalisieren konnten (vorher) und wie viele sie mit der immersiven virtuellen Realität in Aktivität 2 lokalisieren konnten (nachher).

Angesichts der Tatsache, dass der Tetraeder insgesamt 6 Symmetrieebenen, der Hexaeder und das Oktaeder 9 Symmetrieebenen und das Dodekaeder sowie das Ikosaeder insgesamt 15 Symmetrieebenen aufweisen, wie in Tabelle 1 dargestellt, gibt es mehr Fehler und Schwierigkeiten bei der Verwendung von herkömmlichem manipulativem Material als bei der immersiven virtuellen Realität.

So gelang es den meisten Gruppen bei visuell einfacheren Figuren wie dem Tetraeder, dem Hexaeder und dem Oktaeder kaum, die Hälfte der Symmetrieebenen zu identifizieren, und es gibt sogar Gruppen, die eine viel höhere Anzahl von Symmetrieebenen identifizierten, als tatsächlich vorhanden sind, z.B. beim Oktaeder, während mit der immersiven Umgebung praktisch alle Gruppen näher an die korrekte Identifizierung aller Symmetrieebenen in diesen Figuren herankamen (MORAL-SÁNCHEZ et al., 2023).

Andererseits ist bei visuell komplexeren Figuren wie dem Dodekaeder oder dem Ikosaeder der Unterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen noch deutlicher, so dass man sagen kann, dass die immersive virtuelle Realität und die mit ihr verbundenen Werkzeuge dazu beitragen, das visuelle Identifizieren und Positionieren der verschiedenen Symmetrieebenen regelmäßiger Polyeder zu verbessern.

Danksagung

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Forschungsprojekts UAL2020-SEJ-B2086 durchgeführt, das mit FEDER-Mitteln (Europäischer Fonds für regionale Entwicklung) über die Junta de Andalucía finanziert wurde.

Literatur

- BAUDIN, V., FAUST, M., KAUFMANN, H., LITS, V., MWANZA-SIMWAMI, D., PIERRE, A., & TOTTER, A. (2004). *The Lab@Future Project: 'Moving towards the future of e-Learning'*. Springer US.
- CAMPUZANO, M. F. P., SÁNCHEZ, J. L. M., PONCE, E. A. H., & CAMPUZANO, I. M. C. (2022). Herramientas digitales educativas utilizadas en el nivel medio y su importancia en el rendimiento académico. *Sinapsis: La revista científica del ITSUP*, 2(21), 8.
- CANGAS MOLDES, D., CRESPO CASTELEIRO, D., RODRIGUEZ BLANCAS, J. L., & ZARAUZ MORENO, A. (2019). NeoTrie VR: Nueva geometría en realidad virtual. *Pi-InnovaMath*, (2). <https://doi.org/10.5944/pim.2.2019.24143>
- CANGAS, D., MORGA, G., & RODRÍGUEZ, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with Neotrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11(3), 355–366. <https://doi.org/10.25115/psye. v11i3.2270>
- COUSO, D. (2017). Per a què estem a STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. *Ciències: Revista Del Professorat de Ciències de Primària i Secundària*, 34, 22–30. <https://raco.cat/index.php/Ciencies/article/view/338034>
- DAVID, M. M. & TOMAZ, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 413–431.
- FLORES, P. RAMÍREZ, R. & DEL RÍO, A. (2015). Sentido Espacial. En P. FLORES Y L. RICO (COORDS.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127–146). Pirámide.
- GUILLÉN, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 35–53.
- GUTIÉRREZ, A., & JAIME, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53–83.
- HANZEL, P. (2018). *E-Learning course for Didactics of Geometry, EDULEARN18 Proceedings*, 758–763, <https://doi.org/10.21125/edulearn.2018.0274>
- MARGOT, K.C., & KETTLER, T. (2019). *Teachers' perception of STEM integration and education: a systematic literature review*. *IJ STEM Ed* 6, 2. <https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2>
- MARTÍN PÁEZ, T., AGUILERA MORALES, D., PERALES, F. & VÍLCHEZ-GONZÁLEZ, J. M. (2019). *What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature*. *Science Education*. <https://doi.org/10.1002/sce.21522>.

MORAL-SÁNCHEZ, S. N., ROMERO ALBALADEJO, I., SÁNCHEZ-COMPAÑA, M. T., & RODRÍGUEZ, J. L. (2022). Planes of symmetry in regular polyhedrons with virtual reality and manipulative materials. In C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES, A. GUTIÉRREZ, & N. PLANAS (Hg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 380). PME.

MORAL-SANCHEZ, S. N., & SILLER, H. S. (2022). Learning geometry by using virtual reality. *Proceedings of the Singapore National Academy of Science*, 16(01), 61–70. <https://doi.org/10.1142/S2591722622400051>

MORAL-SÁNCHEZ, S. N., SÁNCHEZ-COMPAÑA, M. T., & ROMERO-ALBALADEJO, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 41(1), 125–147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>

MORALES, C., CODINA, A., & ROMERO, I. (2022). Using immersive virtual reality with neotrie to promote students' conceptualization of quadrilaterals. En C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES, A. GUTIÉRREZ Y N. PLANAS (Hg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, 381). PME

MÚÑEZ, G. L. N., YÉPEZ, S. L. T., & SANTANA, J. L. Z. (2022). El uso del computador, las redes sociales y las nuevas tecnologías en los adolescentes y jóvenes: un análisis desde su perspectiva. *Universidad Y Sociedad*, 14(S3), 465–475.

OVALLE BARRETO, S. A., & VÁSQUEZ FONSECA, J. N. (2020). Realidad aumentada, una herramienta para la motivación en el aprendizaje de la Geometría. *Conrado*, 16(75), 56–60.

PERRI, D., SIMONETTI, M., TASSO, S., & GERVASI, O. (2022). Learning Mathematics in an Immersive Way. *IntechOpen*. <https://doi.org/10.5772/intechopen.96533>

RAMÍREZ, R. (2007). De los errores se aprende a desaprender los errores Comunicación en Investigación en el aula de matemáticas. Competencias matemáticas. Publicada en el libro de actas, pp. 255–261. Granada, España. <http://hdl.handle.net/10481/64730>

RAMÍREZ UCLÉS, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

RODRÍGUEZ, J. S. M., ASPIAZU, Q. J. R., MAGALLÓN, Á. M. C., & GARCÍA, M. R. L. (2021). Simulación y realidad virtual aplicada a la educación. *Reciamuc*, 5(2), 101–110.

RUANO-CANO, A., MORAL-SÁNCHEZ, S. N. (2024). Estudio sobre simetrías, proyecciones y visualización en Didáctica de la Matemática con realidad virtual. En BUZÓN-GARCÍA, O., ROMERO GARCÍA, M. C. (Hg.), *Empoderando la docencia en la era digital: innovación, tecnología y renovación pedagógica* (pp. 620–642). Dykinson.

SANTOS, V. A., & QUARESMA, P. (2008). *E-Learning Course for Euclidean Geometry*. 387–388. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2008.156>

SAFAPOUR, A., & SHAFIEE, M. (2012). Constructing finite frames via platonic solids. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 7, 35–41.

SAWADA, T., & FARSHCHI, M. (2022). Visual detection of 3D mirror-symmetry and 3D rotational-symmetry. *Visual Cognition*, 30(8), 546–563. <https://doi.org/10.1080/13506285.2022.2139314>

TATSUOKA, K. K., CORTER, J. E. & TATSUOKA, C. (2004). Patterns of diagnosed mathematical content and process skills in TIMSS-R across a sample of 20 countries. *American Educational Research Journal*, 41(4), 901–926.

TRENCH, I., MAVREVSKI, R., TRAYKOV, M. & STOYKOV, D. (2019). Mathematical approaches for creation of complex 3D models and their application in education. 4908-4914. [10.21125/iceri.2019.1200](https://doi.org/10.21125/iceri.2019.1200).

YÜNKÜL, E. (2022). Using virtual reality in primary education: a systematic review. *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi* 8, 177–193. <https://doi.org/10.38089/ekud.2022.110>

ANTONIO RUANO-CANO, antonioruancano@uma.es, *arbeitet als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Mathematikdidaktik an der Universität Málaga (Spanien).*

Dr. SILVIA-NATIVIDAD MORAL-SÁNCHEZ, silviamoral@uma.es, *ist Assistenzprofessorin für Didaktik der Mathematik an der Universität Málaga (Spanien).*

Prof. Dr. HANS-STEFAN SILLER, hans-stefan.siller@uni-wuerzburg.de, *ist Inhaber des Lehrstuhls für Mathematik V – Didaktik der Mathematik an der Julius-Maximilians-Universität Würzburg.* ■□