

Chi – Quadrat – Test mit Datenerhebung I

– Lösungshinweis –

Auf dem Schul-Sommerfest treten die Klassen in verschiedenen Disziplinen gegeneinander an. In einer Disziplin muss ein Ball von einer Tischkante aus längs über den Tisch in einen Becher geworfen werden. Dabei sollen möglichst viele Treffer erzielt werden. Besonders hierbei ist, dass alle Lernenden einer Klasse mit derselben Hand werfen müssen.



Mit welcher Hand sollte bei dem Schul-Sommerfest geworfen werden?

Hinweis: Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:

- *entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können*
- *oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben*

Aufgabe 1: Sie müssen gemeinsam entscheiden, ob alle Ihrer Klasse mit der rechten oder mit der linken Hand werfen. Um dies entscheiden zu können, starten Sie folgendes Experiment: Zunächst wirft jeder Lernende einen Ball mit der rechten Hand zwanzig Mal hintereinander und versucht dabei in einen Karton zu treffen. Anschließend wird aus gleicher Entfernung von jedem der Vorgang mit der linken Hand wiederholt. Die Treffer werden jeweils gezählt. Notieren Sie die Ergebnisse des Experiments.

Lösungshinweise:
Pro Lernenden sollen die Anzahl der Treffer in Abhängigkeit der Wurfhand festgehalten werden.

Aufgabe 2: Erstellen Sie eine Kontingenztafel mit den beobachteten Werten aus Ihrem Experiment.

Lösungshinweise: Die Kontingenztafel sieht folgendermaßen aus:

	Wurfhand „Links“	Wurfhand „Rechts“	Σ
Treffer „Ja“			
Treffer „Nein“			
Σ			

Beispiel:

	Wurfhand „Links“	Wurfhand „Rechts“	Σ
Treffer „Ja“	$w_b = 20$	$x_b = 140$	160
Treffer „Nein“	$y_b = 280$	$z_b = 160$	440
Σ	300	300	600

Aufgabe 3: Leiten Sie eine Entscheidung für die Wurfhand aus den Daten des Experiments her. Begründen Sie Ihre Antwort! Überlegen Sie sich verschiedene Möglichkeiten, um zu einer Entscheidung zu kommen.

Lösungshinweise: Individuelle Lösung

Möglichkeiten sind:

- Vergleich der Treffer
- Visuelle Bestimmung eines Assoziationsmaß
- Symbolische Bestimmung von Assoziationsmaßen (z.B. Differenzen zwischen beobachteten Häufigkeiten)

Sie haben nun erste Vermutungen und Tendenzen abgeleitet, mit welcher Hand geworfen werden sollte. Nun bleibt die Frage, ob die im Experiment erzielten Unterschiede tatsächlich begründet und signifikant sind oder ob diese auf Zufall beruhen. Wären sie signifikant, so hätte die Wurfhand tatsächlich einen Einfluss auf die Treffer. Es muss also festgestellt werden, ob ein Zusammenhang zwischen den Merkmalen (Wurfhand und Treffer) besteht. Dazu ziehen wir im Folgenden ein inferenzstatistisches Mittel heran, den Chi-Quadrat-Test.

Aufgabe 4: Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese, die die Grundlage zur Beantwortung der Frage darstellen.

Lösungshinweise:

Die Nullhypothese lautet:

Die beiden Merkmale Wurfhand und Treffer sind stochastisch unabhängig voneinander.

Die Alternativhypothese lautet:

Die beiden Merkmale Wurfhand und Treffer sind stochastisch abhängig voneinander.

Aufgabe 5: Mit welcher Hand sollte Ihre Klasse bei dem Schulfest werfen? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe eines Chi-Quadrat-Tests mit Signifikanzniveau 5 %.

- a) Bestimmen Sie den Freiheitsgrad der zugrundeliegenden Chi-Quadrat-Verteilung.
- b) Bestimmen Sie die erwarteten Häufigkeiten, wenn die Nullhypothese gilt.
- c) Berechnen Sie den empirischen χ^2_{emp} -Wert und bestimmen Sie den kritischen χ^2_{krit} -Wert.
- d) Treffen Sie auf Grundlage des Chi-Quadrat-Tests eine Entscheidung, mit welcher Hand Ihre Klasse beim Schulfest werfen sollte.

Lösungshinweise:

- a) Freiheitsgrad: $df = 2 - 1 = 1$

b) Die erwarteten Häufigkeiten sind:

	Wurfhand „Links“	Wurfhand „Rechts“	Σ
Treffer „Ja“	$w_e = \frac{300 \cdot 160}{600} = 80$	$x_e = \frac{300 \cdot 160}{600} = 80$	160
Treffer „Nein“	$y_e = \frac{300 \cdot 440}{600} = 220$	$z_e = \frac{300 \cdot 440}{600} = 220$	440
Σ	300	300	600

c) Berechnung des empirischen χ^2_{emp} -Wertes:

	Wurfhand „Links“	Wurfhand „Rechts“	Σ
Treffer „Ja“	$w = \frac{(80 - 20)^2}{80} = 45$	$x = \frac{(80 - 140)^2}{80} = 45$	90
Treffer „Nein“	$y = \frac{(220 - 280)^2}{220} = 180$	$z = \frac{(220 - 160)^2}{220} = 180$	$\frac{360}{11}$
Σ	$\frac{675}{11}$	$\frac{675}{11}$	$\chi^2_{emp} \approx 122,73$

Der kritische χ^2_{krit} -Wert kann aus einer Tabelle abgelesen werden und lautete für den Freiheitsgrad $dF = 1$ und das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$:

$$\chi^2_{krit} = 3,84$$

d) Um die Frage zu beantworten, muss der empirische mit dem kritischen Chi-Quadrat-Wert verglichen werden. Es gilt

$$\chi^2_{emp} = 122,73 > 3,84 = \chi^2_{krit}$$

Folglich ist die Differenz zwischen den beobachteten und erwarteten Häufigkeiten signifikant und damit wird die Nullhypothese abgelehnt. Die Wahl der Wurfhand hat also einen Einfluss auf die Anzahl der Treffer und somit sollte sich auf Grundlage des Experiments für die rechte Hand entschieden werden.