

# Chi – Quadrat – Test mit Datenerhebung II

## – Lösungshinweis –

Auf dem Schul-Sommerfest treten die Klassen in verschiedenen Disziplinen gegeneinander an. In einer Disziplin muss ein Origami-Frosch mit einem Sprung über eine Linie in einer festgelegten Entfernung springen. Besonders hierbei ist, dass alle Lernenden einer Klasse Frösche derselben Größe springen lassen müssen.



**Frösche welcher Größe sollten bei dem Schul-Sommerfest springen gelassen werden?**

*Hinweis: Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:*

- entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können
- oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben

**Aufgabe 1:** Sie müssen gemeinsam entscheiden, ob alle Ihrer Klasse einen kleinen oder einen großen Frosch springen lassen. Um dies entscheiden zu können, starten Sie folgendes Experiment: Ermitteln Sie zunächst eine geeignete Entfernung der Linie, so dass der Sprung eine machbare Herausforderung darstellt. Jeder Lernende lässt einen kleinen gebastelten Origami-Frosch zwanzig Mal hintereinander springen und zählt dabei, wie oft er über die Linie springt. Anschließend wird aus gleicher Entfernung der Vorgang von jedem Lernenden mit einem großen gebastelten Origami-Frosch wiederholt und die Anzahl der Frösche, die über die Linie springen, gezählt. Notieren Sie die Ergebnisse des Experiments.

Nutzen Sie die folgende Bastelanleitung für die Origami-Frösche:

<https://www.youtube.com/watch?v=ChrVW4ruOPQ>



Lösungshinweise:

Pro Lernenden sollen die Anzahl der Frösche, die die Linie überqueren in Abhängigkeit der Froschgröße festgehalten werden.

**Aufgabe 2:** Erstellen Sie eine Kontingenztafel mit den beobachteten Werten aus Ihrem Experiment.

Lösungshinweise: Die Kontingenztafel sieht folgendermaßen aus:

	Origami-Frosch „Klein“	Origami-Frosch „Groß“	$\Sigma$
Treffer „Ja“			
Treffer „Nein“			
$\Sigma$			

*Zusatzinformation: Im Folgenden wird „Treffer“ verwendet, um zu beschreiben, dass ein Frosch die Linie bei dem Sprung überquert.*

Beispiel:

	Origami-Frosch „Klein“	Origami-Frosch „Groß“	$\Sigma$
Treffer „Ja“	$w_b = 120$	$x_b = 140$	260
Treffer „Nein“	$y_b = 180$	$z_b = 160$	340
$\Sigma$	300	300	600

**Aufgabe 3:** Leiten Sie eine Entscheidung für die Größe des Frosches aus den Daten des Experiments her. Begründen Sie Ihre Antwort! Überlegen Sie sich verschiedene Möglichkeiten, um zu einer Entscheidung zu kommen.

Lösungshinweise: Individuelle Lösung

Möglichkeiten sind:

- Vergleich der Treffer
- Visuelle Bestimmung eines Assoziationsmaß
- Symbolische Bestimmung von Assoziationsmaßen (z.B. Differenzen zwischen beobachteten Häufigkeiten)

Sie haben nun erste Vermutungen und Tendenzen abgeleitet, Frösche welcher Größe springen gelassen werden sollten. Nun bleibt die Frage, ob die im Experiment erzielten Unterschiede tatsächlich begründet und signifikant sind oder ob diese auf Zufall beruhen. Wären sie signifikant, so hätte die Froschgröße tatsächlich einen Einfluss auf die Sprungweite. Es muss also festgestellt werden, ob ein Zusammenhang zwischen den Merkmalen (Größe und Linie übersprungen) besteht. Dazu ziehen wir im Folgenden ein inferenzstatistisches Mittel heran, den Chi-Quadrat - Test.

**Aufgabe 4:** Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese, die die Grundlage zur Beantwortung der Frage darstellen.

Lösungshinweise:

Die Nullhypothese lautet:

Die beiden Merkmale Linie übersprungen und Größe des Origami-Froschs sind stochastisch unabhängig voneinander.

Die Alternativhypothese lautet:

Die beiden Merkmale Linie übersprungen und Größe des Origami-Froschs sind stochastisch abhängig voneinander.

**Aufgabe 5:** Frösche welcher Größe sollte Ihre Klasse bei dem Schulfest springen lassen? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe eines Chi-Quadrat-Tests mit Signifikanzniveau 5 %.

- a) Bestimmen Sie den Freiheitsgrad der zugrundeliegenden Chi-Quadrat-Verteilung.
- b) Bestimmen Sie die erwarteten Häufigkeiten, wenn die Nullhypothese gilt.
- c) Berechnen Sie den empirischen  $\chi^2_{emp}$ -Wert und bestimmen Sie den kritischen  $\chi^2_{krit}$ -Wert.

- d) Treffen Sie auf Grundlage des Chi-Quadrat-Tests eine Entscheidung, Frösche welcher Größe Ihre Klasse beim Schulfest springen lassen sollte.

Lösungshinweise:

a) Freiheitsgrad:  $dF = 2 - 1 = 1$

b) Die erwarteten Häufigkeiten sind:

	Origami-Frosch „Klein“	Origami-Frosch „Groß“	$\Sigma$
Treffer „Ja“	$w_e = \frac{300 \cdot 260}{600} = 130$	$x_e = \frac{300 \cdot 260}{600} = 130$	260
Treffer „Nein“	$y_e = \frac{300 \cdot 340}{600} = 170$	$z_e = \frac{300 \cdot 340}{600} = 170$	340
$\Sigma$	300	300	600

c) Berechnung des empirischen  $\chi^2_{emp}$ -Wertes:

	Origami-Frosch „Klein“	Origami-Frosch „Groß“	$\Sigma$
Treffer „Ja“	$w = \frac{(130 - 120)^2}{130} = \frac{10}{13}$	$x = \frac{(130 - 140)^2}{130} = \frac{10}{13}$	$\frac{20}{13}$
Treffer „Nein“	$y = \frac{(170 - 180)^2}{170} = \frac{10}{17}$	$z = \frac{(170 - 160)^2}{170} = \frac{10}{17}$	$\frac{20}{17}$
$\Sigma$	$\frac{300}{221}$	$\frac{300}{221}$	$\chi^2_{emp} \approx 2,71$

Der kritische  $\chi^2_{krit}$ -Wert kann aus einer Tabelle abgelesen werden und lautete für den Freiheitsgrad  $dF = 1$  und das Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ :

$$\chi^2_{krit} = 3,84$$

- d) Um die Frage zu beantworten, muss der empirische mit dem kritischen Chi-Quadrat-Wert verglichen werden. Es gilt

$$\chi^2_{emp} = 2,71 < 3,84 = \chi^2_{krit}$$

Folglich ist die Differenz zwischen den beobachteten und erwarteten Häufigkeiten nicht signifikant und damit kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Insgesamt kann hier keine Aussage über einen Zusammenhang zwischen den Merkmalen getroffen werden. Aus dieser Erkenntnis heraus kann die Entscheidung, mit welcher Froschgröße angetreten wird, nicht auf Grundlage der Daten getroffen werden.