

# Folgen: Das Newton-Verfahren

## – Lösungshinweis –

Die Bestimmung von Nullstellen komplizierter Funktionen, wie sie in vielen Naturwissenschaften oder Ingenieurwissenschaften auftauchen, ist oft nicht mit algebraischen Methoden möglich. Man muss dann auf Näherungsverfahren zurückgreifen.



**Wie kann man Nullstellen einer komplizierten Funktion bestimmen?**

Öffnen Sie das [Video](#)<sup>1</sup>.

**Aufgabe 1:** Schauen Sie das Kapitel „Intro“ sowie „Roots of polynomials“ (0:00 – 5:55) und pausieren Sie dann. Erklären Sie in eigenen Worten, weshalb im Beispiel der Füllung von Pixeln in Computertexten die Berechnung von Nullstellen essenziell ist. Gehen Sie dabei insbesondere darauf ein, welche Bedeutung den Funktionswerten sowie der Suche nach Nullstellen im Sachkontext zukommt.

In Computertexten werden Buchstaben nicht dadurch definiert, welche Pixel gefärbt werden und welche nicht, sondern (stückweise) über Polynome. Allerdings kann der Computer damit noch nicht entsprechend die Pixel des Bildschirms färben, da der Graph des Polynoms keine „Dicke“ besitzt. Um nun für einen beliebigen Pixel zu entscheiden, ob er gefärbt werden sollte, betrachtet man den Abstand des Pixels zum Graph des Polynoms in Abhängigkeit einer Variablen. Das Quadrat dieser Funktion ist selbst wieder eine polynomiale Funktion.

**Funktionswerte:** Diese geben das Quadrat des Abstandes vom Pixel zum Graph des Polynoms an, das einen (Teil eines) Buchstaben definiert.

**Suche nach Nullstellen:** Um den minimalen Abstand (bzw. genauer: das minimale Abstandsquadrat) zu finden, sucht man Minima des entsprechenden Polynoms, welche z.B. mittels Nullstellenbestimmung der Ableitung (und weiteren Schritten) bestimmt werden können.

**Aufgabe 2:** Setzen Sie das Video (mit dem Kapitel „Newton’s method“) fort und pausieren Sie an der Stelle 6:49. Beantworten Sie anschließend die im Video gestellte Frage selbstständig, ohne weiter zu schauen.

- Geben Sie einen entsprechenden Term für die im Video gestellte Frage zunächst in Worten und dann mit Symbolen bzw. als Formel an.
- Wie kann man diesen Term nutzen, um eine verbesserte Schätzung  $x_1$  zu erhalten?

*Die Aufgabe ist dahingehend von Bedeutung, dass die rekursive Vorschrift des Newton-Verfahrens motiviert/hergeleitet wird. Grundsätzlich sind die Schülerinnen und Schüler hier angehalten, selbst zu arbeiten. Es ist also vor allem darauf zu achten, dass sie nicht das Video weiterschauen, da hier die Lösung gezeigt wird. Eine korrekte Lösung zur Aufgabe finden Sie unter 2c) sowie im Video, wenn Sie dieses fortsetzen.*

<sup>1</sup> Es sind u.a. englische und deutsche Untertitel verfügbar. Diese können über das Zahnrad-Symbol eingestellt werden.

- c) Setzen Sie das Video fort und überprüfen Sie Ihre Antworten aus Teilaufgabe a) und b) mithilfe der Lösung im Video. Markieren Sie, an welchen Stellen sich Ihre Antwort von der im Video unterscheidet. Schauen Sie anschließend das Video bis zum Zeitpunkt 9:45.
- d) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen dem Newton-Verfahren und dem Folgenbegriff.

**Aufgabe 2a)**

Gesucht ist der Unterschied der beiden Nullstellen der beiden Schätzungen [gemeint ist deren  $x$ -Wert]; im Video wird dieser mit „Step“ betitelt. Dieser Unterschied (auf der  $x$ -Achse angetragen) und die senkrechte Strecke von  $x_0$  zu  $P(x_0)$  bilden ein Steigungsdreieck, das die Steigung der Tangenten angibt, deren Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse die „verbesserte“ Schätzung ist. Als Term:

$$P'(x_0) = \frac{P(x_0)}{-\text{Step}} \Leftrightarrow \text{Step} = -\frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

**Aufgabe 2b)**

Da es sich bei  $x_0$  um eine „alte“ Schätzung der Nullstelle handelt und die „verbesserte“ Schätzung  $x_1$  um den in a) beschriebenen Unterschied entfernt liegt, gilt

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_1)}$$

**Aufgabe 2d)**

Zum Finden einer Nullstelle einer Funktion, erzeugt das Newton-Verfahren eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  von Näherungen für eine Nullstelle. Diese Folge ist rekursiv definiert, da jedes Folgenglied aus dem vorherigen Folgenglied berechnet wird (vgl. 2b). Dabei ist  $x_0$  der zu wählende Anfangswert für das Newton-Verfahren. Abhängig von diesem konvergiert die Folge gegen eine Nullstelle oder divergiert.

Zum Abschluss wurde das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens thematisiert. Dieses wollen wir nun noch genauer betrachten. Öffnen Sie hierzu das [Applet](#) „Newton-Verfahren“<sup>2</sup>. Sie können darin beliebige Funktionsterme sowie Anfangswerte eingeben. Zudem können Sie mit dem Button „Nächster Newton-Schritt“ die Folge fortsetzen. Sobald sich zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder um weniger als zwei Nachkommastellen unterscheiden, erscheint ein grüner Haken.

**Aufgabe 3:** Wir wollen die Nullstelle für das Polynom mit dem Funktionsterm  $x^3 - 2x + 2$  finden.

- a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Applets die Nullstelle des Polynoms  $x^3 - 2x + 2$  auf zwei Nachkommastellen genau.
- b) Geben Sie einen Anfangswert an, für den das Newton-Verfahren für obiges Polynom nicht gegen dessen Nullstelle konvergiert. Begründen Sie, weshalb die Schätzwerte des Newton-Verfahrens für die Nullstelle in diesem Fall niemals gegen die Nullstelle konvergieren werden.

a) Die Nullstelle ist (auf zwei Nachkommastellen gerundet)  $-1,77$ .

b) Ein möglicher Startwert ist  $x_0 = 0$ . Das Newton-Verfahren liefert  $x_1 = 1$  und anschließend  $x_2 = 0$ . Damit ergibt sich eine periodische Folge, die stets zwischen den Werten 0 und 1 abwechselt und so nie gegen die „wahre“ Nullstelle konvergieren kann.

<sup>2</sup> Häußler, G. (o.J.): Newton-Verfahren [interaktives Applet]. <https://www.geogebra.org/m/yxvzuj9>.