

Dynamische Erarbeitung von Taylorpolynomen

– Lösungshinweis –

Taylorpolynome werden verwendet, um komplizierte Funktionen in der Nähe eines bestimmten Punktes – der sogenannten Entwicklungsstelle – durch Polynome zu approximieren, mit denen man leichter und einfacher umgehen kann. Sie bieten damit in der Praxis die Möglichkeit, Näherungen von Funktionen zu bestimmen und zu verwenden, was zum Beispiel in der Physik und im Ingenieurwesen weit verbreitet ist.

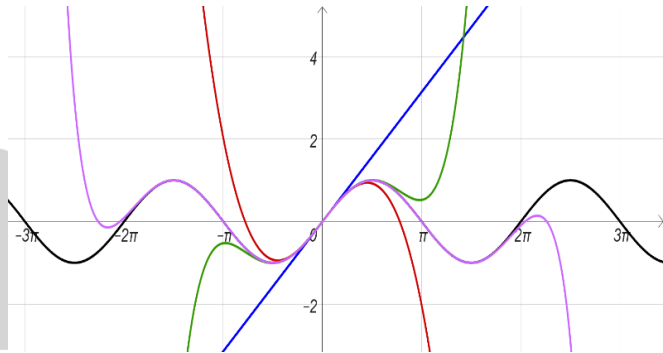


Abbildung 1: Taylorpolynome der Sinusfunktion (schwarz) verschiedener Grade an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.



Was sind Taylorpolynome und wie verhalten sich diese?

Öffnen Sie das GeoGebra-[Applet](#) „Taylorpolynome“.¹

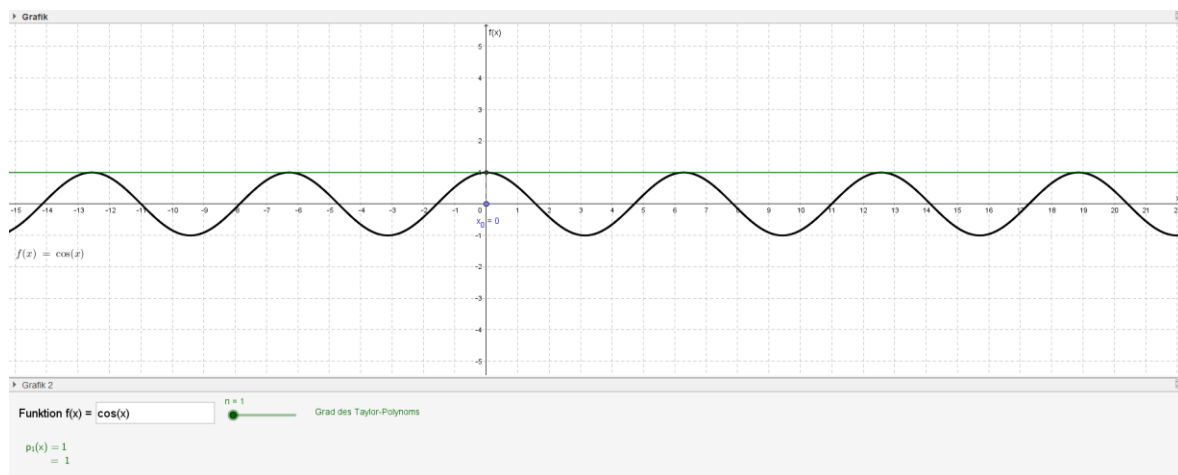


Abbildung 2: GeoGebra-Applet "Taylorpolynome"

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sich eine Änderung der Entwicklungsstelle (Punkt x_0 im Applet) auf das Verhalten von Taylorpolynomen auswirkt und werden dabei Bezüge zu anderen Begriffen aus der Analysis entdecken.

Aufgabe 1: Stellen Sie den Schieberegler auf $n = 1$. Verändern Sie nun die Entwicklungsstelle x_0 , indem sie den blauen Punkt auf der x -Achse bewegen.

- Beschreiben Sie begründet in Worten, wie der grüne und schwarze Graph dabei zueinander im Verhältnis stehen.
- Welches mathematische Objekt aus der Differentialrechnung stellt die grüne Gerade dar?

¹ Lindner, A. (o.J.): Taylorpolynome [interaktives Applet]. <https://www.geogebra.org/m/CARd6jnt>

Aufgabe 1a)

Der grüne Graph ist (wie in Aufgabe 1a)) jeweils eine Gerade. Diese und der schwarze Graph berühren sich stets in einem Punkt [nämlich $(x_0 | \cos(x_0))$].

Aufgabe 1b)

Die grüne Gerade ist die Tangente (lokale Approximation) des schwarzen Graphen im Punkt $(x_0 | \cos(x_0))$.

Aufgabe 2: Verändern Sie mit dem Schieberegler den Grad n des in Abbildung 2 grün dargestellten Polynoms ohne dabei x_0 zu ändern. Beschreiben Sie begründet in Worten ...

- ... welche Funktionen der grüne und schwarze Graph jeweils darstellen.
- ... wie sich der grüne Graph in Abhängigkeit von n verändert und insbesondere, wie dieser dabei mit dem schwarzen Graph im Verhältnis steht.
- ... wie sich der Funktionsterm $p_n(x)$ des grünen Graphen, der im Applet angezeigt wird, in Abhängigkeit von n verändert. Geben Sie ausgehend davon einen Funktionsterm für $p_n(x)$ an.
- ... welches Verhalten Sie für den grünen Graphen sowie für den Funktionsterm $p_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ erwarten.

Aufgabe 2a)

Der grüne Graph stellt eine Gerade dar, die parallel zur x -Achse durch den Punkt $(0|1)$ verläuft. Der schwarze Graph stellt die Kosinusfunktion dar, was am Verlauf des Graphen (2 π periodisch, Extremstellen bei Vielfachen von π , ...) sowie der Beschriftung erkennbar ist.

Aufgabe 2b)

Je größer n wird, desto mehr „schmiegt“ sich der grüne Graph an den schwarzen Graphen an, ausgehend vom Punkt $(1|0)$, indem beide auch schon für $n = 1$ übereinstimmen. Das „Anschmiegen“ verläuft dabei symmetrisch zur y -Achse. Des Weiteren ändert sich der grüne Graph nicht, wenn n sich um ein eins von „gerade zu ungerade“ ändert; eine Änderung ist nur bei einer Erhöhung um eins von „ungerade zu gerade“.

Aufgabe 2c)

Je größer n wird, desto mehr Summanden kommen zum Funktionsterm hinzu, der für $n = 1$ bei $p_1(x) = 1$ startet. Dabei kommt ein neuer Summand immer nur für gerade n hinzu, so dass $p_{2k}(k) = p_{2k+1}(x)$ ist. Die Summanden sind dabei in ihrem Vorzeichen alternierend. Die einzelnen Summanden bestehen aus Monomen des Grads n (vgl. Schieberegler) mit dem Vorfaktor $\frac{1}{n!}$. Damit ist der Funktionsterm für

$$p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Zu 2c) ggf. muss in GeoGebra unter „Einstellungen“ und „Runde“ auf mehrere Nachkommastellen gewechselt werden, da ansonsten bei Termen großer Ordnung der Vorfaktor in der Anzeige auf 0 gerundet wird.

Aufgabe 2d)

Da sich der grüne Graph immer mehr dem schwarzen Graphen annähert/„anschmiegt“, ist zu erwarten, dass für $n \rightarrow \infty$ beide identisch sind, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \cos(x)$.