

Kniffel mit Übergangsmatrizen

– Lösungshinweis –

Beim Würfelspiel *Kniffel* können Spieler Punkte für verschiedene Kategorien erhalten. Im Folgenden wird nur die wertvollste Kategorie und nur eine Spielrunde betrachtet.

Bei dieser Kategorie geht es darum, mit fünf Würfeln innerhalb von höchstens drei Würfeln fünf gleiche Augenzahlen (einen sogenannten „Kniffel“¹) zu erhalten. Beim ersten Wurf werden alle fünf Würfel geworfen. Beim zweiten und beim dritten Wurf kann eine Auswahl beliebiger Würfel getroffen werden. Diese werden dann nochmal geworfen.



Aufgabe 1: Überlegen Sie sich mögliche Strategien, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit einen Kniffel zu erzielen.

Um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit einen Kniffel zu erzielen, kann folgende naheliegende Strategie verwendet werden:

Vor dem zweiten und vor dem dritten Wurf wird jeweils die oder eine der am häufigsten vorkommenden Augenzahlen bestimmt. Die Würfel, die diese Augenzahl zeigen, werden behalten. Alle anderen Würfel werden erneut geworfen.

Beispiel: Nach dem Wurf (1, 1, 1, 2, 2) werden also die drei Würfel mit der Augenzahl 1 behalten und die zwei Würfel mit der Augenzahl 2 erneut geworfen. Nach dem Wurf (4, 4, 5, 5, 6) werden die zwei Würfel mit der Augenzahl 4 behalten und die drei anderen Würfel erneut geworfen. Alternativ kann auch die Augenzahl 5 ausgewählt und die drei anderen Würfel erneut geworfen werden.

Die verschiedenen Variationen für die Augenzahlen der fünf Würfel lassen sich in folgende fünf Kategorien einteilen, wobei A, B, C, D, E jeweils verschiedene Augenzahlen darstellen:

- fünf verschiedene Augenzahlen (ABCDE)
- einmal oder zweimal zwei gleiche Augenzahlen (entweder AABCD oder AABBC)
- drei gleiche Augenzahlen (entweder AAABC oder AAABB)
- vier gleiche Augenzahlen (AAAAB)
- fünf gleiche Augenzahlen (AAAAA)

<https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cbergangsmatrix>, adaptiert

¹ Wenn wir im Folgenden von einem „Kniffel“ sprechen, meinen wir also nicht das gesamte Spiel, sondern fünf gleiche Augenzahlen innerhalb von höchstens drei Würfeln.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach den drei Würfeln einen Kniffel zu erhalten?

Aufgabe 2: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die obigen fünf Möglichkeiten im ersten Wurf.

Aufgabe 3: Während wir uns in Aufgabe 2 nur den ersten Wurf angeschaut haben, wollen wir nun den zweiten Wurf betrachten.

- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der vierten Variation (AAAAB) zuordnen lässt. Was muss im zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt die fünfte Variation (d.h. ein Kniffel) vorliegt?
- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der dritten Variation (entweder AAABC oder AAABB) zuordnen lässt. Was muss im zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt die vierte Variation vorliegt?
- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der dritten Variation (entweder AAABC oder AAABB) zuordnen lässt. Was muss im zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt immer noch dritte Variation (d.h. ein Kniffel) vorliegt?

Aufgabe 4: Machen Sie anhand der ersten, vierten und fünften Spalte plausibel, dass die folgende Matrix die Übergangsmatrix von einer Variation zur anderen darstellt:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{120}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{900}{1296} & \frac{120}{216} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{250}{1296} & \frac{80}{216} & \frac{25}{36} & 0 & 0 \\ \frac{25}{1296} & \frac{15}{216} & \frac{10}{36} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{216} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Formulieren Sie eine allgemeine Regel, wann Übergangsmatrizen im rechten oberen Teil nur Nullen haben.

Aufgabe 6: Begründen Sie, warum ein Vektor bestehend aus den in Aufgabe 1 berechneten Wahrscheinlichkeiten als ein Zustandsvektor interpretiert werden kann.

Aufgabe 7: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, nach den drei Würfeln einen Kniffel zu erhalten.



Wie oft müsste man Würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% einen Kniffel zu erhalten?