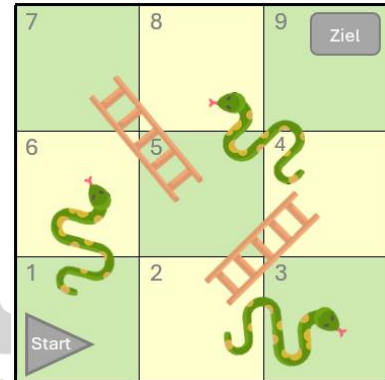


# Schlangen und Leitern mit Übergangsmatrizen

## – Lösungshinweis –

Beim Schlangen-und-Leiter-Spiel treten mehrere Spieler gegeneinander an. Jeder Spieler startet auf Feld 1. Es wird reihum gewürfelt (bei einem 3x3-Feld mit einem Würfel mit den Zahlen 1,2 und 3, die dann jeweils doppelt vorkommen). Der Spieler, der an der Reihe ist, rückt mit seiner Spielfigur die gewürfelte Anzahl an Feldern vor. Landet er auf einem Feld mit dem Kopf einer Schlange, rutscht er die Schlange entlang wieder zurück. Landet er auf einem Feld mit dem unteren Ende einer Leiter, so klettert er die Leiter hinauf. Das Spiel ist vorbei, sobald ein Spieler im Ziel ankommen ist. Man benötigt dabei nicht die exakte passende Augenzahl, um ins Ziel zu kommen.



**?** Wie viele Runden müssen zwei Spieler gegeneinander spielen, bis das Spiel fast sicher – mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% – vorbei ist?

**Aufgabe 1:** Begründen Sie, welche Zustände für einen Spieler beim Schlangen-und-Leiter-Spiel auf dem 3x3-Feld betrachtet werden müssen.

**Aufgabe 2:** Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen für das Spiel, stellen Sie die Übergangsmatrix auf und geben Sie einen Zustandsvektor für den Beginn des Spiels an.

**Aufgabe 3:** In den folgenden Teilaufgaben wollen wir die Übergangsmatrix in der Spielsituation interpretieren, um ihre Bedeutung besser zu verstehen.

- Interpretieren Sie die Ausdrücke  $A^6$  und  $a_{34}$  und erklären Sie die Bedeutung der 0 und der 1 auf der Hauptdiagonalen von  $A$ .
- Begründen Sie, ohne zu rechnen, anhand des Spiels, ob der Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte für alle Potenzen von  $A$  gleich 0 bleibt.
- Ermitteln Sie, ob die Matrix Fixvektoren und absorbierende Zustände hat. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
- Erklären Sie den Begriff der Absorptionswahrscheinlichkeit im Kontext des Spiels.

**Aufgabe 4:** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler nach höchstens drei Würfeln am Ziel ist.

**Aufgabe 5:** Wie oft muss man würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% am Ziel zu sein?

**Aufgabe 6:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel mit zwei Spielern nach höchstens drei Runden vorbei ist?

**Aufgabe 7:** Wie viele Runden müssen zwei Spieler gegeneinander spielen, bis das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% vorbei ist?

**+** Stellen Sie begründet eine Vermutung für die Grenzmatrix  $G = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  auf und überprüfen Sie diese mithilfe von geeigneten digitalen Werkzeugen.