

# Kniffel mit Übergangsmatrizen

## – Lösungshinweis –

*Zusatzinformation: Die folgende Aufgabe verallgemeinert das Konzept der Zustandsvektoren und ist rechnerisch komplexer als die anderen vorgestellten Aufgaben. Die Aufgabe eignet sich daher weniger als Einstieg in das Thema Übergangsmatrizen, sondern eher als Vertiefung.*

Beim Würfelspiel *Kniffel* können Spieler Punkte für verschiedene Kategorien erhalten. Im Folgenden wird nur die wertvollste Kategorie und nur eine Spielrunde betrachtet.

Bei dieser Kategorie geht es darum, mit fünf Würfeln innerhalb von höchstens drei Würfeln fünf gleiche Augenzahlen (einen sogenannten „Kniffel“<sup>1</sup>) zu erhalten. Beim ersten Wurf werden alle fünf Würfel geworfen. Beim zweiten und beim dritten Wurf kann eine Auswahl beliebiger Würfel getroffen werden. Diese werden dann nochmal geworfen.



**Aufgabe 1:** Überlegen Sie sich mögliche Strategien, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit einen Kniffel zu erzielen.

*Lösung individuell. Ein zentraler Aspekt ist die Frage, wie viele und welche Würfel im zweiten und dritten Wurf geworfen werden sollten.*

Um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit einen Kniffel zu erzielen, kann folgende naheliegende Strategie verwendet werden:

*Vor dem zweiten und vor dem dritten Wurf wird jeweils die oder eine der am häufigsten vorkommenden Augenzahlen bestimmt. Die Würfel, die diese Augenzahl zeigen, werden behalten. Alle anderen Würfel werden erneut geworfen.*

**Beispiel:** Nach dem Wurf (1, 1, 1, 2, 2) werden also die drei Würfel mit der Augenzahl 1 behalten und die zwei Würfel mit der Augenzahl 2 erneut geworfen. Nach dem Wurf (4, 4, 5, 5, 6) werden die zwei Würfel mit der Augenzahl 4 behalten und die drei anderen Würfel erneut geworfen. Alternativ kann auch die Augenzahl 5 ausgewählt und die drei anderen Würfel erneut geworfen werden.

Die verschiedenen Variationen für die Augenzahlen der fünf Würfel lassen sich in folgende fünf Kategorien einteilen, wobei A, B, C, D, E jeweils verschiedene Augenzahlen darstellen:

- fünf verschiedene Augenzahlen (ABCDE)
- einmal oder zweimal zwei gleiche Augenzahlen (entweder AABCD oder AABBC)
- drei gleiche Augenzahlen (entweder AAABC oder AAABB)
- vier gleiche Augenzahlen (AAAAB)
- fünf gleiche Augenzahlen (AAAAA)

<https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cbergangsmatrix>, adaptiert

<sup>1</sup> Wenn wir im Folgenden von einem „Kniffel“ sprechen, meinen wir also nicht das gesamte Spiel, sondern fünf gleiche Augenzahlen innerhalb von höchstens drei Würfeln.



**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach den drei Würfeln einen Kniffel zu erhalten?**

*Hinweis 1: Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:*

- *entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können*
- *oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben*

*Hinweis 2: Die zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten in den folgenden Aufgaben sind unter Umständen recht komplex und erfordern einiges an Kombinatorik. Bei Bedarf kann das Spiel dahingehend simplifiziert werden, dass lediglich mit drei Würfeln geworfen wird und man einen Kniffel erhält, wenn man innerhalb von höchstens zwei Würfeln drei gleiche Zahlen erhält.*

**Aufgabe 2:** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die obigen fünf Möglichkeiten im ersten Wurf.

*Zusatzinformation:*

- *Diese Aufgabe knüpft an das Thema der Kombinatorik der Jahrgangsstufe 12 an.*
- *Die zweite der fünf Variationen ist mit Abstand am schwersten. Sie kann aber am Schluss mittels Substruktion von 1, d.h. durch Betrachtung des Gegenereignisses, leicht berechnet werden. Hier können also verschiedene – vorteilhafte und weniger vorteilhafte – Vorgehensweisen mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.*

**Grundidee:** Insgesamt gibt es beim Werfen mit fünf Würfeln  $6^5 = 7776$  mögliche Kombinationen. Jede Fünferkombination ist gleich wahrscheinlich. Daher berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für die obigen Variationen als Anzahl der günstigen Kombinationen durch die Anzahl der möglichen Kombinationen.

- Für fünf verschiedene Zahlen gibt es  $6! = 720$  günstige Kombinationen.
- Für einmal oder zweimal zwei gleiche Zahlen gibt es

$$\binom{5}{2} (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) + \frac{1}{2} \cdot \binom{3}{2} \binom{5}{2} (6 \cdot 5 \cdot 4) = 3600 + 1800 = 5400$$

günstige Kombinationen.

**Begründung:**

AABCD: Zunächst stellen wir fest, dass die Reihenfolge der gewürfelten Zahlen irrelevant ist. Zu dieser Variation zählen somit z.B. auch die Muster ABACD und BACDA. Wir bestimmen deshalb zunächst die Anzahl der Muster, also der Möglichkeiten, zwei gleiche Zahlen (AA) und drei verschiedene Zahlen (B, C und D) anzuordnen. Für das Muster relevant ist dabei nur, an welcher Position die beiden gleichen Zahlen stehen<sup>2</sup>. Es gibt  $\binom{5}{2}$  Möglichkeiten, diese innerhalb der fünf Positionen anzuordnen. Nun bestimmen wir noch die Anzahl an Möglichkeiten, ein Muster mit konkreten Zahlen zu füllen. Für die „Platzhalter“ A, B, C und D gibt es 6, 5, 4 bzw. 3 Möglichkeiten, da sie alle ungleich sein müssen.

Bei AABBC: Wir bestimmen zunächst wieder die Anzahl der Muster, also der Möglichkeiten, zweimal zwei gleiche Zahlen (AA und BB) und eine weitere Zahl (C) anzuordnen. Für das Muster relevant ist dabei, an welcher Position die beiden Zahlenpaare stehen: Es existieren wieder  $\binom{5}{2}$  Möglichkeiten, das erste Zweierpaar (AA) innerhalb der fünf Zahlen anzuordnen und  $\binom{3}{2}$  Möglichkeiten, das andere Zweierpaar (BB) innerhalb der verbleibenden drei Zahlen anzuordnen. Nun ist aber zum Beispiel AABBC das gleiche Muster wie BBAAC, nämlich „zweimal zwei gleiche

<sup>2</sup> Es ergibt sich dann beispielsweise ein Muster wie „erst die beiden gleichen Zahlen und dann die drei verschiedenen“.

Zahlen und dann eine andere<sup>3</sup>. Die Buchstabenpaare AA und BB lassen sich also vertauschen, ohne dass sich ein anderes Muster ergibt. Wir zählen somit derzeit noch doppelt so viele Muster wie es tatsächlich gibt. Deshalb müssen wir das Ergebnis noch durch Zwei teilen. Nun bestimmen wir wieder die Anzahl an Möglichkeiten, ein Muster mit konkreten Zahlen zu füllen. Für die „Platzhalter“ A, B und C gibt es 6, 5 bzw. 4 Möglichkeiten.

- Für drei gleiche Zahlen gibt es  $\binom{5}{3} (6 \cdot 5 \cdot 4) + \binom{5}{3} (6 \cdot 5) = 1500$  günstige Kombinationen.

**Begründung:**

AAABC: Wir bestimmen zunächst wieder die Anzahl der Muster, also der Möglichkeiten, drei gleiche Zahlen (AAA) und zwei verschiedene Zahlen (B und C) anzuordnen. Für das Muster relevant ist dabei nur, an welcher Position die gleichen Zahlen stehen. Es gibt  $\binom{5}{3}$  Möglichkeiten, diese innerhalb der fünf Positionen anzuordnen. Nun bestimmen wir wieder die Anzahl an Möglichkeiten, ein Muster mit konkreten Zahlen zu füllen. Für die „Platzhalter“ A, B und C gibt es wieder 6, 5 bzw. 4 Möglichkeiten.

AAABB: Die Anzahl der Möglichkeiten, drei gleiche (AAA) und zwei gleiche (BB) Zahlen anzuordnen, ist wieder  $\binom{5}{3}$ . Für die „Platzhalter“ A und B gibt es 6 bzw. 5 Möglichkeiten.

- Für vier gleiche Zahlen gibt es  $\binom{5}{4} (6 \cdot 5) = 150$  günstige Kombinationen.

**Begründung:** Die Anzahl der Möglichkeiten, vier gleiche (AAAA) und eine weitere Zahl (B) anzuordnen, ist  $\binom{5}{4}$ . Für die „Platzhalter“ A und B gibt es 6 bzw. 5 Möglichkeiten.

- Für fünf gleiche Augenzahlen (AAAAA) gibt es  $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$  günstige Kombinationen.

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\text{„ABCDE“}) = \frac{720}{7776}$
- $P(\text{„AABCD oder AABBC“}) = \frac{5400}{7776}$
- $P(\text{„AAABC oder AAABB“}) = \frac{1500}{7776}$
- $P(\text{„AAAAB“}) = \frac{150}{7776}$
- $P(\text{„AAAAA“}) = \frac{6}{7776}$

**Aufgabe 3:** Während wir uns in Aufgabe 2 nur den ersten Wurf angeschaut haben, wollen wir nun den zweiten Wurf betrachten.

- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der vierten Variation (AAAAB) zuordnen lässt. Was muss im zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt die fünfte Variation (d.h. ein Kniffel) vorliegt?
- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der dritten Variation (entweder AAABC oder AAABB) zuordnen lässt. Was muss im zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt die vierte Variation vorliegt?
- Nehmen wir an, im ersten Wurf wurde eine Zahlenkombination gewürfelt, die sich der dritten Variation (entweder AAABC oder AAABB) zuordnen lässt. Was muss im

<sup>3</sup> Beispiel: Für die konkreten Zahlen A=1, B=2 und C=3 führt das erste Muster zum gleichen Ergebnis wie das zweite Muster für A=2, B=1 und C=3 (nämlich zu 11223).

zweiten Wurf gewürfelt werden, damit nach dem zweiten Wurf insgesamt immer noch dritte Variation (d.h. ein Kniffel) vorliegt?

*Zusatzinformation: Diese Aufgabe dient der Vorbereitung auf die Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Variationen in Aufgabe 4.*

*Die Überlegungen brauchen jeweils zwei Schritte:*

1. Überlegen, welche Würfel zur Seite gelegt werden
  2. Überlegen, welche Zahlenkombinationen mit den verbleibenden Würfeln gewürfelt werden müssen
- a) Wenn im ersten Wurf vier gleiche Zahlen (AAAA) gewürfelt wurden, werden für den zweiten Wurf diese vier Würfel zur Seite gelegt. Es wird also noch mit einem Würfel gewürfelt. Man geht nach dem zweiten Wurf zur fünften Kombination über, wenn im zweiten Wurf die Zahl A gewürfelt wird.
  - b) Es werden die Würfel mit den drei gleichen Zahlen zur Seite gelegt (AAA), sodass zwei Würfel übrigbleiben. Nach dem zweiten Wurf liegt die vierte Kombination vor, wenn mit einem der beiden Würfel A geworfen wird und mit dem anderen nicht (ansonsten hätte man die fünfte Variation).
  - c) Wie in b) wird noch mit zwei Würfeln geworfen. Damit weiterhin die dritte Variation vorliegt, müssen beide Zahlen ungleich A sein.

**Aufgabe 4:** Machen Sie anhand der ersten, vierten und fünften Spalte plausibel, dass die folgende Matrix die Übergangsmatrix von einer Variation zur anderen darstellt:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{120}{1296} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{900}{1296} & \frac{120}{216} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{250}{1296} & \frac{80}{216} & \frac{25}{36} & 0 & 0 \\ \frac{25}{1296} & \frac{15}{216} & \frac{10}{36} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{1296} & \frac{1}{216} & \frac{1}{36} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

*Zusatzinformation:*

- Diese Aufgabe wurde bewusst auf die erste, vierte und fünfte Spalte beschränkt. Die anderen Spalten lassen sich ebenfalls durch kombinatorische Überlegungen ermitteln, sind jedoch deutlich komplexer.
- Hinweis 2: Die Übergangsmatrix gibt die Wahrscheinlichkeiten an, nach einem Wurf in einer bestimmten Variation (Spalte) im nächsten Wurf insgesamt eine andere Variation (Zeile) zu haben.  
Beispiel: Im ersten Wurf werden genau zwei gleiche Zahlen gewürfelt (Variation: AABCD). Diese zwei Würfel werden dann für den zweiten Wurf zur Seite gelegt. Man würfelt also im zweiten Wurf mit drei Würfeln. Würfelt man nun wieder genau zwei gleiche Zahlen und diese entsprechen den zur Seite gelegten Zahlen (Wurf: AAE), so hat man insgesamt vier Gleiche. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist somit Teil der Übergangswahrscheinlichkeit von Variation 2 auf Variation 4 (und nicht etwa von Variation 2 auf Variation 2).

**Erste Spalte:** Wenn der Spieler fünf verschiedene Augenzahlen hatte, legt er keinen Würfel zur Seite. Übrig bleiben für den zweiten Wurf also wieder  $6^5 = 7776$  mögliche Kombinationen. Fünf verschiedene Zahlen erhält er in  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$  Fällen. Damit ist die Übergangswahrscheinlichkeit  $\frac{720}{7776} = \frac{120}{1296}$ . Alle anderen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich analog durch Kürzen des Zustandsvektor aus Aufgabe 2.



**Vierte Spalte:** Wenn der Spieler schon vier gleiche Augenzahlen hatte, würfelt er danach noch mit einem Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, hier die Zahl aus dem ersten Wurf zu würfeln, ist  $\frac{1}{6}$ . In diesem Fall hätte er dann *insgesamt* 5 gleiche Zahlen. Ansonsten hat der Spieler vier gleiche Zahlen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{5}{6}$ . Alle anderen Einträge sind 0: man kann ja nicht *insgesamt* nur drei gleiche Zahlen haben, wenn man schon im ersten Wurf vier gleiche hatte!

**Fünfte Spalte:** Wenn der Spieler schon im ersten Wurf 5 gleiche hatte, hat er auch im zweiten Wurf (der dann nicht mehr stattfindet), 5 gleiche. Nullen folgen analog zur vierten Spalte.

**Aufgabe 5:** Formulieren Sie eine allgemeine Regel, wann Übergangsmatrizen im rechten oberen Teil nur Nullen haben.

Übergangsmatrizen haben im rechten oberen Teil nur Nullen, wenn frühere Zustände nicht aus späteren heraus erreicht werden können, das Spiel also sozusagen nur „vorwärts“ geht (Ein Gegenbeispiel wäre das Schlangen-und-Leiter-Spiel, wo man auf frühere Felder „zurückfallen“ kann)

**Aufgabe 6:** Begründen Sie, warum ein Vektor bestehend aus den in Aufgabe 1 berechneten Wahrscheinlichkeiten als ein Zustandsvektor interpretiert werden kann.

Der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 720 \\ 7776 \\ 5400 \\ 7776 \\ 1500 \\ 7776 \\ 150 \\ 7776 \\ 6 \\ 7776 \end{pmatrix}$$

kann als Zustandsvektor zu Beginn des Spiels („Startvektor“) betrachtet werden. Er gibt sozusagen die „Startwahrscheinlichkeiten“ an. Der Startzustand ist somit nicht eindeutig (was in einem Vektor mit Nullen und einer Eins resultieren würde), sondern die verschiedenen Startzustände treten mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kleiner eins ein.

**Aufgabe 7:** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, nach den drei Würfeln einen Kniffel zu erhalten.

Wir arbeiten mit dem Zustandsvektor aus Aufgabe 5:

$$x = \begin{pmatrix} 720 \\ 7776 \\ 5400 \\ 7776 \\ 1500 \\ 7776 \\ 150 \\ 7776 \\ 6 \\ 7776 \end{pmatrix}$$

Da der Zustandsvektor bereits den ersten Wurf beschreibt, muss  $A$  nur mit zwei potenziert werden, um Wahrscheinlichkeiten nach drei Würfeln zu erhalten.

Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,45 & 0,31 & 0 & 0 & 0 \\ 0,41 & 0,46 & 0,48 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0,2 & 0,42 & 0,69 & 0 \\ 0,01 & 0,03 & 0,09 & 0,31 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$A^2 x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,26 \\ 0,45 \\ 0,24 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit, nach drei Würfeln einen Kniffel zu erhalten, kann im letzten Eintrag abgelesen werden (da dieser die Variation repräsentiert, in der fünf gleiche Zahlen erhalten werden) ist also circa 5 %.



Wie oft müsste man Würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% einen Kniffel zu erhalten?

Wir suchen das  $k$ , ab dem der letzte Eintrag von  $A^k x$  größer als 0,5 ist. Im GeoGebra lässt sich diese Zahl mithilfe eines Schiebereglers finden. So ergibt sich  $k = 9$ . Nach 10 Würfeln hat man also eine Wahrscheinlichkeit von über 50%, einen Kniffel zu erhalten.

*Differenzierung: Die GeoGebra-Datei kann den Lernenden bereits mit implementiertem Schieberegler zur Verfügung gestellt werden. Alternativ können die Lernenden diesen auch selbst erstellen.*