





Matropoly II

- Lösungshinweise -

In Anlehnung an das bekannte Gesellschaftsspiel liegt folgendes Spielfeld vor:

NUR	ZU BESUCH IM GEFÄNGNIS 	ZENTRAL- BIBLIOTHEK 200 €	FREI  PARKEN
	MENSA 100 €		BIBSEM 300 €
	LOS 2000 € 	MATHE INSTITUT 400 €	GEHE IN DAS GEFÄNGNIS 

Die Spielregeln:

Gewürfelt wird mit einem normalen Würfel (Augenzahlen 1 – 6) und die Spielfigur darf jeweils um die gewürfelte Augenzahl im Uhrzeigersinn vorrücken. In das Gefängnis kommt man nur über das „Gehe in das Gefängnis“-Feld. Ist man einmal im Gefängnis, kann dieses nicht mehr verlassen werden. Eine Aktion, die auf dem Spielbrett beschrieben ist, gilt nur dann, wenn die Spielfigur direkt auf dem entsprechenden Spielfeld landet, jedoch nicht, wenn man auf einem Spielfeld startet oder über dieses hinweg zieht.



Welcher Gewinn oder Verlust kann bei diesem Spiel in Abhängigkeit der Startposition und der Anzahl der Spielrunden erwartet werden?

Zusatzinformationen:

- Die Fragestellung zielt auf die Berechnung des Erwartungswertes der Einnahmen/Ausgaben bei dem Spiel ab.
- Differenzierungsmöglichkeit: Verwendung des Wortes „Erwartungswert“ in der Aufgabenstellung
- Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:
 - entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können

- *oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben*

Aufgabe 1: Auf dem Spielfeld sind Geldbeträge in unterschiedlichen Farben angegeben. Interpretieren Sie diese Geldbeträge im Kontext des Spieles sowie mathematisch.

Die grün angegebenen Geldbeträge sind im Kontext des Spiels Gehälter. Diese bekommt man ausgezahlt und folglich können diese mathematisch als positiv (Guthaben wird größer) interpretiert werden.

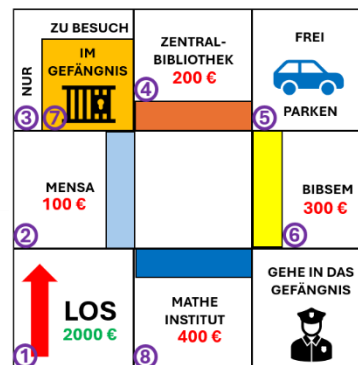
Die rot angegebenen Geldbeträge sind im Kontext des Spiels Mieten. Diese muss man bezahlen und folglich können diese mathematisch als negativ (Guthaben wird kleiner) interpretiert werden.

Aufgabe 2: Beschreiben Sie die möglichen Zustände in diesem Spiel.

Die Zustände in dem Spiel Matropolis geben an, auf welchen der einzelnen Spielfelder „Los“, „Mensa“, „Nur zu Besuch“, „Zentralbibliothek“, „Frei Parken“, „BibSem“, „Im Gefängnis“ und „Mathe Institut“, eine Spielfigur stehen kann.

Zusatzinformationen:

- *Für die weiteren Aufgaben ist es sinnvoll und einfacher, die einzelnen Zustände zu nummerieren.*
- *Die Vorgabe eines (zusätzlich) nummerierten Spielfeldes stellt eine Differenzierungsmöglichkeit dar.*



Aufgabe 3: Erstellen Sie die Übergangsmatrix für eine Spielrunde in dem angegebenen Spiel. Beschreiben Sie den Aufbau der Übergangsmatrix und begründen Sie die auftretenden Wahrscheinlichkeiten.

Die Übergangsmatrix einer Spielrunde in dem angegebenen Spiel sieht folgendermaßen aus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Spalten geben die Startpositionen an, die Zeilen die Zielpositionen. Die Einträge geben die Wahrscheinlichkeit an, von einer Startposition die Zielposition zu erreichen.

Beispielsweise gibt der Eintrag a_{21} an, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ das Feld „Mensa“ erreicht, wenn man auf dem Feld „Los“ startet. Die Wahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{6}$ ergeben sich aus dem einfachen Würfelwurf, der die Anzahl der zu ziehenden Felder bestimmt.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, nach drei Runden im Gefängnis zu landen, wenn man bei „Los“ startet.

„Los“ lässt sich durch den Zustandsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

darstellen. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, potenziert man die Übergangsmatrix mit 3 und multipliziert sie anschließend mit dem Zustandsvektor:

$$A^3 v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,09 \\ 0,09 \\ 0,09 \\ 0,08 \\ 0,1 \\ 0,4 \\ 0,07 \end{pmatrix}$$

Da das Gefängnis dem Zustand 7 entspricht, ist die Wahrscheinlichkeit, nach drei Runden im Gefängnis zu landen (wenn man bei „Los“ startet), 0,4.

Aufgabe 5: Ermitteln Sie den zu erwartenden Gewinn bzw. Verlust in einer Spielrunde

- wenn Sie auf dem Feld „Los“ starten.
- wenn Sie von dem Feld „Mensa“ starten.
- wenn Sie von dem Feld „Frei Parken“ starten.

Der zu erwartende Gewinn bzw. Verlust in einer Spielrunde kann mit Hilfe des Erwartungswertes berechnet werden

$$a) E_{Los}(\text{"Gewinn/Verlust"}) = \frac{1}{6} \cdot (-100) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-200) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-300) + \frac{1}{6} \cdot 0 = -100$$

$$b) E_{Mensa}(\text{Gewinn/Verlust}) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-200) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-300) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-400) = -150$$

$$c) E_{Frei\ Parken}(\text{"Gewinn/Verlust"}) = \frac{1}{6} \cdot (-300) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (-400) + \frac{1}{6} \cdot 2000 + \frac{1}{6} \cdot (-100) + \frac{1}{6} \cdot 0 = 200$$

Zusatzinformationen:

- die möglichen zu erreichenden Felder können (aufgrund des Würfels mit einem Laplace-Würfel) jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ erreicht werden
- zur Berechnung des Erwartungswertes werden die Gehälter als positive Zahl und die Mieten als negative Zahl eingebunden
- Felder, bei denen es weder Mieten noch Gehälter gibt, gehen als 0 in die Berechnung mit ein

Aufgabe 6: Berechnen Sie die zu erwartenden Gewinne bzw. Verluste in einer Spielrunde in Abhängigkeit der Startposition mit Hilfe einer Matrix-Vektor-Multiplikation.

Zur Berechnung mit einer Matrix-Vektor-Multiplikation muss zunächst eine passende Matrix aufgestellt werden:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Außerdem wird ein Vektor, der die Gehälter und Mieteinnahmen der einzelnen Felder des Spielfeldes ausgehend von Los enthält, aufgestellt:

$$g = \begin{pmatrix} 2000 \\ -100 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ -300 \\ 0 \\ -400 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung sieht dann folgendermaßen aus:

$$E(\text{"Gewinn/Verlust"}) = B \cdot g = \begin{pmatrix} -100 \\ -150 \\ 550 \\ \hline 3 \\ 200 \\ 200 \\ 650 \\ \hline 3 \\ 0 \\ 700 \\ \hline 3 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Einträge des Vektors entsprechen den Erwartungswerten für die Gewinne bzw. Verluste bei unterschiedlichen Startfeldern (beginnend mit „Los“ und dann im Uhrzeigersinn).

Zusatzinformationen:

- Die Matrix kann zeilenweise durch Überlegungen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die jeweiligen Spielfelder erreicht werden, aufgestellt werden. Dabei beziehen sich die einzelnen Zeilen auf unterschiedliche Startpositionen, beginnen mit dem Feld „Los“ und dann im Uhrzeigersinn. Die Spalten entsprechen den einzelnen Spielfeldern (Spalte 1: „Los“, Spalte 2: „Mensa“ etc.) Beispiel Zeile 1: Hier wird auf „Los“ gestartet. In der Spielrunde kann das Feld „Los“ und das Feld „Mathe Institut“ also nicht erreicht werden, in beide Einträge b_{11} und b_{18} wird eine 0 geschrieben. Die anderen Felder können mit der Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{6}$ erreicht werden.
- Aufgabe 3 und 4 können verwendet werden, um die Überlegungen zur benötigten Matrix und zum benötigten Vektor zu vereinfachen.

Aufgabe 7: Vergleichen Sie die Übergangsmatrix mit der in Aufgabe 6 aufgestellten Matrix. Was fällt Ihnen auf?

Die in Aufgabe 5 aufgestellte Matrix ist genau die transponierte Übergangsmatrix. Es gilt $B = A^T$

Zusatzinformationen:

- Dieser Zusammenhang kann folgendermaßen erklärt werden: In der Übergangsmatrix sind die Wahrscheinlichkeiten enthalten von einer bestimmten Startposition (Spalten) aus auf ein bestimmtes Spielfeld (Zeilen) zu gelangen. Wie oben erklärt beziehen sich in der aufgestellten Matrix die Zeilen auf die Startpositionen und die Spalten auf die Spielfelder. Der Zusammenhang ist also genau umgedreht und da das Transponieren Zeilen und Spalten vertauscht, hängt beides über diese Operation zusammen.
- Differenzierungsmöglichkeit: Die Lernenden diesen Zusammenhang beschreiben lassen.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die zu erwartenden Gewinne bzw. Verluste für zwei und drei Spielrunden.

Zur Berechnung des Erwartungswertes für die Gewinne bzw. Verluste für mehrere Spielrunden muss, aufgrund des in Aufgabe 6 festgestellten Zusammenhangs, die transponierte Matrix der entsprechend der Spielrunden potenzierten Übergangsmatrix bestimmt werden. Aufgrund der Rechen- und Transponierungsregeln für Matrizen gilt jedoch:

$$(A^n)^T = (A \cdot \dots \cdot A)^T = A^T \cdot \dots \cdot A^T = (A^T)^n$$

Hier geht am zweiten Gleichheitszeichen folgende Rechenregel ein: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Folglich kann zur Berechnung der Erwartungswerte nach n Zügen folgende allgemeine Rechnung durchgeführt werden:

$$E_n(\text{Gewinn/Verlust nach } n \text{ Zügen}) = (A^T)^n \cdot g = B^n \cdot g$$

Für den *gesamten* Gewinn nach n Spielrunden ergibt sich somit:

$$E_n(\text{Gewinn/Verlust}) = Bg + B^2g + B^3g + \dots + B^ng$$

Für zwei Spielrunden gilt folglich:

$$E_2(\text{Gewinn/Verlust}) = Bg + B^2g = \begin{pmatrix} -100 \\ -150 \\ 550 \\ 3 \\ 200 \\ 200 \\ 650 \\ 3 \\ 0 \\ 700 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{325}{3} \\ 1550 \\ 9 \\ 125 \\ 200 \\ 3 \\ 575 \\ 9 \\ 550 \\ 9 \\ 0 \\ 275 \\ 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8,33 \\ 22,22 \\ 308,33 \\ 266,67 \\ 263,89 \\ 277,78 \\ 0 \\ 325 \end{pmatrix}$$

Für drei Spielrunden gilt folglich:

$$E_3(\text{Gewinn/Verlust}) = Bg + B^2g + B^3g \approx \begin{pmatrix} 89,81 \\ 90,28 \\ 373,61 \\ 349,54 \\ 356,94 \\ 371,76 \\ 0 \\ 424,54 \end{pmatrix}$$

Zusatzinformationen:

- Die Aufgabe kann verwendet werden, um die Beweistechnik im Rahmen der Beweise von Rechenregeln bei Matrizen zu thematisieren. Differenzierung je nachdem, ob die Rechenregel $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ vorgegeben wird oder nicht.