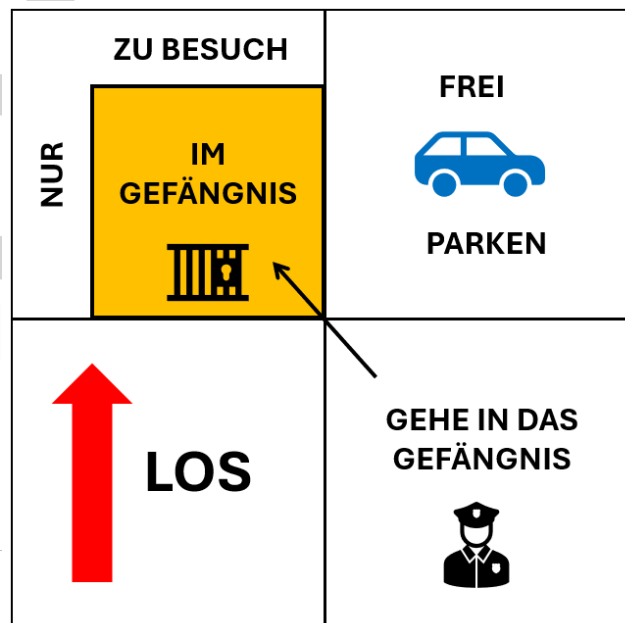


Matropoly I

– Lösungshinweis –

In Anlehnung an das bekannte Gesellschaftsspiel liegt folgendes Spielfeld vor:



Die Spielregeln:

Gewürfelt wird mit einem normalen Würfel (Augenzahlen 1 – 6) und die Spielfigur darf jeweils um die gewürfelte Augenzahl im Uhrzeigersinn vorrücken. In das Gefängnis kommt man nur über das „Gehe in das Gefängnis“-Feld. Ist man einmal im Gefängnis, kann dieses nicht mehr verlassen werden. Eine Aktion, die auf dem Spielbrett beschrieben ist, gilt nur dann, wenn die Spielfigur direkt auf dem entsprechenden Spielfeld landet, jedoch nicht, wenn man auf einem Spielfeld startet oder über dieses hinweg zieht.



Welches Startfeld ist das ungünstigste bei drei Spielrunden?

Zusatzinformationen: Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:

- entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können
- oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben

Aufgabe 1: Beschreiben Sie die möglichen Zustände in diesem Spiel.

Die Zustände in dem Spiel Matropoly geben an, auf welchen der einzelnen Spielfelder „Los“, „Nur zu Besuch“, „Frei Parken“ und „Im Gefängnis“, eine Spielfigur stehen kann.

Zusatzinformationen:

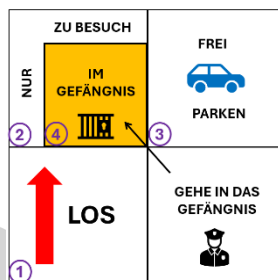
- Für die weiteren Aufgaben ist es sinnvoll und einfacher, die einzelnen Zustände zu nummerieren.

Materialien wurden in Anlehnung an

https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=159 erstellt

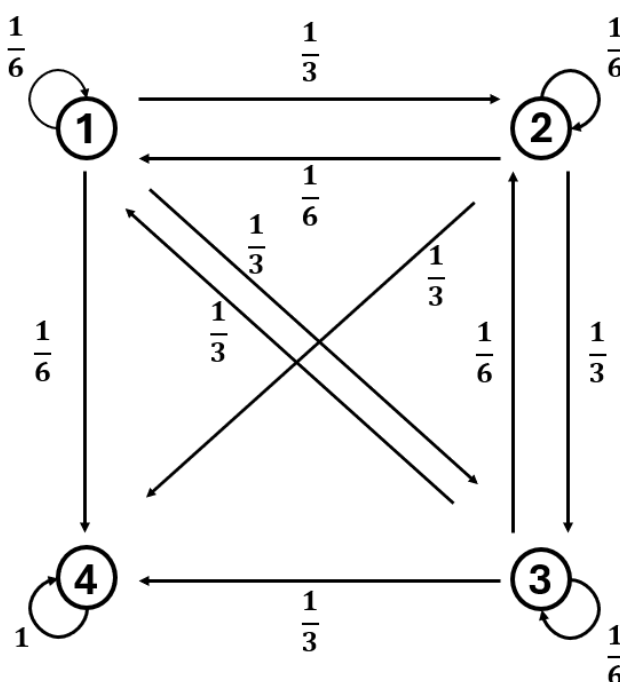
Copyright: Lehrstuhl für Mathematik V – Didaktik der Mathematik (Prof. Dr. Hans-Stefan Siller), 2024

- Die Vorgabe eines (zusätzlich) nummerierten Spielfeldes stellt eine Differenzierungsmöglichkeit dar.



Aufgabe 2: Erstellen Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix für einen Spielzug in dem angegebenen Spiel.

Der Übergangsgraph einer Spielrunde in dem angegebenen Spiel sieht folgendermaßen aus:



Die Übergangsmatrix einer Spielrunde in dem angegebenen Spiel sieht folgendermaßen aus:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Gibt es in diesem Spiel einen absorbierenden Zustand? Falls ja, beschreiben Sie diesen im Kontext des Spiels.

Laut Definition ist ein absorbierender Zustand ein Zustand, der nicht mehr verlassen werden kann. Man erkennt diesen in einer Übergangsmatrix daran, dass in der entsprechenden Spalte nur genau eine 1 (auf der Hauptdiagonalen) und sonst nur 0 enthalten sind.
Folglich gibt es in diesem Spiel einen absorbierenden Zustand, nämlich das Gefängnis.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, nach drei Spielrunden im Gefängnis gelandet zu sein. Betrachten Sie dabei unterschiedliche Felder als Startpositionen.

Die geforderten Wahrscheinlichkeiten können folgendermaßen berechnet werden:

$$P_{3,n} = A^3 \cdot x_n$$

x_n ist der Startvektor. Der Index n gibt nach der in (a) vorgegebenen Nummerierung die Startposition an, der Vektor hat an der entsprechenden Stelle eine 1 und sonst nur 0. Die Wahrscheinlichkeit für die unterschiedlichen Spielpositionen nach einem Spielzug berechnet man durch Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Startvektor. Da hier die Frage nach drei Spielrunden ist, muss die Matrix mit drei potenziert werden.

Die Wahrscheinlichkeit, im Gefängnis zu landen, steht im Ergebnisvektor im untersten Eintrag und kann dort abgelesen werden.

Es gilt:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 29 & 23 & 25 & 0 \\ 216 & 216 & 216 & 0 \\ 7 & 23 & 23 & 0 \\ 54 & 216 & 216 & 0 \\ 17 & 7 & 29 & 0 \\ 108 & 54 & 216 & 1 \\ 125 & 71 & 139 & 1 \\ 216 & 108 & 216 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fall 1: Startposition „Los“: } P_{3,1} = A^3 \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 29 & 23 & 25 & 0 \\ 216 & 216 & 216 & 0 \\ 7 & 23 & 23 & 0 \\ 54 & 216 & 216 & 0 \\ 17 & 7 & 29 & 0 \\ 108 & 54 & 216 & 1 \\ 125 & 71 & 139 & 1 \\ 216 & 108 & 216 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 216 \\ 7 \\ 54 \\ 17 \\ 108 \\ 125 \\ 216 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fall 2: Startposition „Nur zu Besuch“: } P_{3,2} = A^3 \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 29 & 23 & 25 & 0 \\ 216 & 216 & 216 & 0 \\ 7 & 23 & 23 & 0 \\ 54 & 216 & 216 & 0 \\ 17 & 7 & 29 & 0 \\ 108 & 54 & 216 & 1 \\ 125 & 71 & 139 & 1 \\ 216 & 108 & 216 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 216 \\ 23 \\ 216 \\ 7 \\ 54 \\ 71 \\ 108 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fall 3: Startposition „Frei Parken“: } P_{3,3} = A^3 \cdot x_3 = \begin{pmatrix} 29 & 23 & 25 & 0 \\ 216 & 216 & 216 & 0 \\ 7 & 23 & 23 & 0 \\ 54 & 216 & 216 & 0 \\ 17 & 7 & 29 & 0 \\ 108 & 54 & 216 & 1 \\ 125 & 71 & 139 & 1 \\ 216 & 108 & 216 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 216 \\ 23 \\ 216 \\ 29 \\ 216 \\ 139 \\ 216 \end{pmatrix}$$

Fall 4: Startposition „Im Gefängnis“: $P_{3,4} = A^3 \cdot x_4 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{54} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{17}{108} & \frac{7}{54} & \frac{29}{216} & 0 \\ \frac{108}{125} & \frac{54}{71} & \frac{216}{139} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Was versteht man bei diesem Spiel unter einer ungünstigen Startposition?

Eine Startposition ist ungünstig, wenn man ausgehend von dieser mit einer hohen Wahrscheinlichkeit in einem Spielzug auf dem Feld „Im Gefängnis“ landet, da man dann nicht weiterspielen kann und droht zu verlieren.

Aufgabe 6: Welche Startposition ist in diesem Spiel die ungünstigste, wenn drei Runden gespielt werden?

Das Feld „Im Gefängnis“ ist das ungünstigste, da man dieses Feld nicht verlassen kann. Nimmt man dieses Feld aus der Betrachtung raus, das ist das Feld „Nur zu Besuch“ das ungünstigste, da hier die Wahrscheinlichkeit, ins Gefängnis zu kommen, am größten ist.

Zusatzinformationen:

- die durchzuführende Fallunterscheidung kann als Differenzierungsmöglichkeit genutzt werden:
 - Differenzierung entweder dadurch, ob vorgegeben wird, dass eine Fallunterscheidung betrachtet werden soll
 - Oder dadurch, die Situation einzuschränken und bspw. das Gefängnis-Feld von vorneherein auszuschließen