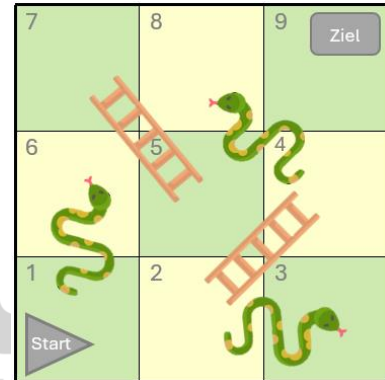


Schlangen und Leitern mit Übergangsmatrizen

– Lösungshinweis –

Beim Schlangen-und-Leiter-Spiel treten mehrere Spieler gegeneinander an. Jeder Spieler startet auf Feld 1. Es wird reihum gewürfelt (bei einem 3x3-Feld mit einem Würfel mit den Zahlen 1,2 und 3, die dann jeweils doppelt vorkommen). Der Spieler, der an der Reihe ist, rückt mit seiner Spielfigur die gewürfelte Anzahl an Feldern vor. Landet er auf einem Feld mit dem Kopf einer Schlange, rutscht er die Schlange entlang wieder zurück. Landet er auf einem Feld mit dem unteren Ende einer Leiter, so klettert er die Leiter hinauf. Das Spiel ist vorbei, sobald ein Spieler im Ziel ankommen ist. Man benötigt dabei nicht die exakte passende Augenzahl, um ins Ziel zu kommen.



Wie viele Runden müssen zwei Spieler gegeneinander spielen, bis das Spiel fast sicher – mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% – vorbei ist?

Zusatzinformation: Im Rahmen des Vertiefungskurses gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten:

- entweder es wird nur die obere, offene Fragestellung den Lernenden gegeben und die Teilaufgaben unten dienen als Hilfestellungen, die bei Bedarf gegeben werden können
- oder es erfolgt eine schrittweise, vorgegebene Bearbeitung anhand der unteren Teilaufgaben

Aufgabe 1: Begründen Sie, welche Zustände für einen Spieler beim Schlangen-und-Leiter-Spiel auf dem 3x3-Feld betrachtet werden müssen.

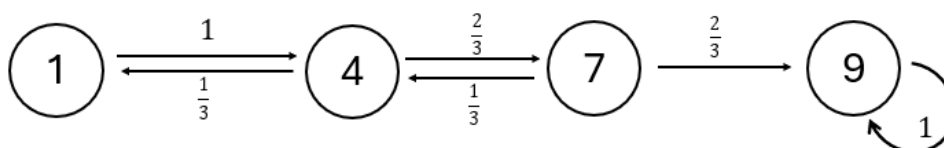
Es müssen die Zustände betrachtet werden, bei denen ein Spieler auf Feld **1, 4, 7 oder 9** steht.

Begründung: Nur Felder, auf denen ein Spieler tatsächlich stehen kann, müssen betrachtet werden. Nur bei diesen Feldern können nämlich später Übergangswahrscheinlichkeiten auf das Feld oder von diesem Feld weg angegeben werden. Auf den Feldern 2, 3, 5, 6 und 8 führt eine Leiter oder eine Schlange direkt weiter auf ein anderes Feld.

Aufgabe 2: Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen für das Spiel, stellen Sie die Übergangsmatrix auf und geben Sie einen Zustandsvektor für den Beginn des Spiels an.

Beachte: Es wird mit einem Würfel mit den Zahlen 1, 2 und 3 gewürfelt.

Übergangsgraph



Zusatzinformation: Auf den Pfeilen werden die Wahrscheinlichkeiten angegeben, bei einem Wurf von einem Zustand in einen anderen überzugehen. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, von Feld 1 auf Feld 4 überzugehen, gleich $\frac{1}{3}$: Würfelt man eine 1, so bewegt man sich auf Feld 2 und von dort mithilfe der Leiter auf Feld 4. Würfelt man eine 2, so bewegt man sich auf Feld 3, von dort durch die Schlange zurück auf Feld 2 und von dort durch die Leiter auf Feld 4. Würfelt man eine 3,

so bewegt man sich direkt auf Feld 4. Analog ermittelt man die anderen Wahrscheinlichkeiten im Übergangsgraphen.

Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Zusatzinformation: Die Spalten geben die Zustände vor dem Wurf an (1, 4, 7 und 9), die Zeilen die Zustände danach (1, 4, 7 und 9). Die Einträge der Matrix entsprechen den Wahrscheinlichkeiten auf den Pfeilen im Übergangsgraphen. So steht beispielsweise in der ersten Spalte in der zweiten Zeile die Wahrscheinlichkeit, sich durch einen Wurf von Feld 1 auf Feld 4 zu bewegen.

Zustandsvektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusatzinformation: Der Spieler steht zu Beginn auf Feld 1, daher die 1 im ersten Eintrag.

Aufgabe 3: In den folgenden Teilaufgaben wollen wir die Übergangsmatrix in der Spielsituation interpretieren, um ihre Bedeutung besser zu verstehen.

- a) Interpretieren Sie die Ausdrücke A^6 und $a_{3,4}$ und erklären Sie die Bedeutung der 0 und der 1 auf der Hauptdiagonalen von A .

- A^6 ist eine Matrix, die die Wahrscheinlichkeiten angibt, nach sechs Würfeln von einem Zustand in den anderen übergegangen zu sein.
- Der Eintrag $a_{3,4}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei einem Wurf von Feld 7 ins Ziel (d.h. auf Feld 9) zu kommen.
- Die 0 auf der Hauptdiagonalen gibt an, dass es unmöglich ist, vom Startfeld direkt wieder auf das Startfeld zu gelangen. Die 1 gibt an, dass ein Spieler sich nicht mehr von diesem Spielfeld wegbewegt, sondern bei diesem unabhängig von der gewürfelten Augenzahl bleibt. Dies ist im Ziel der Fall (Es handelt sich um einen absorbierenden Zustand).

- b) Begründen Sie, ohne zu rechnen, anhand des Spiels, ob der Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte für alle Potenzen von A gleich 0 bleibt.

Nein, denn ein Spieler kann von Feld 1 auf Feld 6 gelangen und von dort aus fällt er durch die Schlange auf Feld 1 zurück. Die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des Spiels (d.h. nach mehreren Würfeln), von Feld 1 wieder auf Feld 1 zu gelangen, ist also ungleich 0. Es gibt somit eine Potenz von A , in der der Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte nicht 0 ist.

- c) Ermitteln Sie, ob die Matrix Fixvektoren und absorbierende Zustände hat. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.

Berechnung der Fixvektoren

Fixvektoren sind Vektoren x , für die $Ax = x$ gilt. Sie lassen sich über ein Gleichungssystem ermitteln:

$$Ax = x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Als Gleichungssystem ergibt sich:

- I. $\frac{1}{3}x_2 = x_1$
- II. $x_1 + \frac{1}{3}x_3 = x_2$
- III. $\frac{2}{3}x_2 = x_3$
- IV. $\frac{2}{3}x_3 + x_4 = x_4$

Aus (IV) folgt $\frac{2}{3}x_3 = 0$, also $x_3 = 0$. Eingesetzt in (III) ergibt sich $x_2 = 0$. Zusammen erhält man aus (II) schließlich $x_1 = 0$. Jeder Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

mit beliebigem x_4 ist somit ein Fixvektor. Einen Vektor, der in der Spielsituation interpretierbar ist, erhalten wir jedoch nur, wenn $x_4 = 1$ ist. Dann ist x der Zustandsvektor für einen Spieler im Zielfeld.

Zusatzinformation: Die Gleichung kann auch mithilfe des Gauß-Algorithmus gelöst werden, falls dieser bereits behandelt wurde.

Interpretation im Kontext: Das Zielfeld ist der einzige Zustand, in dem ein Wurf nichts an der Position eines Spielers ändert. Eine Multiplikation mit A (d.h. ein Wurf) resultiert also wieder in dem Zustandsvektor, der einen Spieler auf dem Zielfeld beschreibt.

Ermittlung der absorbierenden Zustände und Interpretation

Die Matrix hat einen absorbierenden Zustand, nämlich dass ein Spieler auf Feld 9 steht, da hier eine 1 auf der Hauptdiagonalen steht. Inhaltlich lässt sich der absorbierende Zustand damit begründen, dass man das Zielfeld nicht mehr verlassen kann – die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf wieder auf dem Zielfeld zu stehen, ist also 1.

d) Erklären Sie den Begriff der Absorptionswahrscheinlichkeit im Kontext des Spiels.

Die Absorptionswahrscheinlichkeiten sind die Wahrscheinlichkeiten, nach einer bestimmten Anzahl an Würfeln am Ziel zu sein.

Aufgabe 4: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler nach höchstens drei Würfeln am Ziel ist.

Hinweis: Diese Aufgabe stellt eine Vorbereitung auf die übergreifende, zu beantwortende Frage dar. Es wird zunächst nur ein Spieler und zudem eine klar festgelegte Anzahl an Würfeln betrachtet.

Um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ein Spieler nach höchstens 3 Würfeln am Ziel ist, müssen wir A^3 berechnen. Diese gibt die Wahrscheinlichkeiten an, nach drei Würfeln von einem Zustand in einen anderen übergegangen zu sein. Wir erhalten (beispielweise mit GeoGebra)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0,19 & 0 & 0 \\ 0,56 & 0 & 0,19 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0 & 0 \\ 0,44 & 0,44 & 0,81 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix multiplizieren wir mit dem Zustandsvektor zu Beginn des Spiels (Startposition):

$$A^3 x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,19 & 0 & 0 \\ 0,56 & 0 & 0,19 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0 & 0 \\ 0,44 & 0,44 & 0,81 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,56 \\ 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit, nach drei Würfeln im Ziel zu sein, lässt sich nun im letzten Eintrag ablesen. Sie beträgt 44 %.

Aufgabe 5: Wie oft muss man würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% am Ziel zu sein?

Hinweis: Diese Aufgabe ist eine direkte Vereinfachung der übergreifenden, zu beantwortenden Frage auf einen Spieler, diesmal jedoch ohne bekannte Anzahl der Würfe.

Der letzte Eintrag im Vektor $A^k x_1$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, nach k Würfeln am Ziel zu sein. In GeoGebra variieren wir k mithilfe eines Schiebereglers so, dass dies der Fall ist. Um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% am Ziel zu sein, benötigen wir $k = 17$ Würfe.

Differenzierung: Die GeoGebra-Datei kann den Lernenden bereits mit implementiertem Schieberegler zur Verfügung gestellt werden. Alternativ können die Lernenden diesen auch selbst erstellen.

Aufgabe 6: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel mit zwei Spielern nach höchstens drei Runden vorbei ist?

Zusatzinformation:

- *In dieser Aufgabe werden zwei Spieler betrachtet, jedoch wieder mit einer festgelegten Anzahl an Würfeln bzw. Runden.*
- *Hier wird an Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus Klasse 11 bzw. 9 angeknüpft (Unabhängigkeit von Ereignissen, Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$)*

Das Spiel ist nach drei Runden vorbei, wenn mindestens einer der Spieler nach drei Würfeln im Ziel ist (also Spieler A oder Spieler B). Die beiden Spieler sind unabhängig voneinander.

Betrachte die Ereignisse:

A: Spieler A ist nach drei Würfeln am Ziel.

B: Spieler B ist nach drei Würfeln am Ziel.

Das Spiel ist also vorbei, wenn Ereignis A oder Ereignis B eintritt. Somit ist

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,44 + 0,44 - 0,44 \cdot 0,44 = 0,69$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Alternative Lösung 1:

Das Spiel ist nur dann **nicht** vorbei, wenn weder Spieler A noch Spieler B am Ziel ist. Somit ist

$$1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0,56 \cdot 0,56 = 0,69$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Alternative Lösung 2:

Das Spiel ist vorbei, wenn Spieler A am Ziel ist (also Ereignis A eintritt) oder Spieler B am Ziel ist und Spieler A noch nicht. Somit ist

$$P(A) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,44 + 0,56 \cdot 0,44 = 0,69$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 7: Wie viele Runden müssen zwei Spieler gegeneinander spielen, bis das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% vorbei ist?

Wir gehen folgendermaßen vor:

1. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit p , mit der ein Spieler im Ziel sein muss, damit das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% vorbei ist. Dabei gehen wir ähnlich wie in Aufgabe 6 vor.
2. Wir ermitteln – wie in Aufgabe 5 – die Anzahl der benötigten Runden, damit ein Spieler mit dieser Wahrscheinlichkeit p im Ziel ist.

Zu 1.: Mit den Ereignissen aus Aufgabe 6 muss $P(A \cup B) \geq 0,99$ gelten. Wir kennen nun $P(A)$ und $P(B)$ nicht, wissen aber, dass beide identisch sind. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit p . Analog zu Aufgabe 6 muss dann

$$P(A \cup B) = p + p - p \cdot p = 2p - p^2 \geq 0,99$$

gelten.

Wir lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2p - p^2 &\geq 0,99 \\ \Leftrightarrow 0 &\geq p^2 - 2p + 0,99 \end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel erhält man als Lösung für $p^2 - 2p + 0,99 = 0$ die beiden Lösungen $p_1 = 0,9$ und $p_2 = 1,1$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist damit $[0,9; 1,1]$. Da Wahrscheinlichkeiten größer als 1 nicht existieren, reduziert sich die Lösungsmenge in diesem Fall auf $[0,9; 1]$.

Zu 2.: Wir suchen nun nach der Anzahl der Runden, nach denen $p \geq 0,9$ ist. Wie in Aufgabe 5 ermittelt man mit GeoGebra, dass dies nach 9 Runden der Fall ist.



Stellen Sie begründet eine Vermutung für die Grenzmatrix $G = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ auf und überprüfen Sie diese mithilfe von geeigneten digitalen Werkzeugen.

Lässt man die Anzahl der Würfe gegen unendlich gehen, sollte sich die Wahrscheinlichkeit, von einem beliebigen Zustand aus (d.h. von einer beliebigen Spalte der Matrix aus) zum Ziel zu kommen, 1 annähern.

Vermutung daher:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies kann mithilfe von GeoGebra überprüft werden.

Zusatzinformation: Es ist kein Zufall, dass in der Grenzmatrix viermal der Fixvektor steht. Zu beweisen, warum dies so ist, erfordert jedoch fortgeschrittenes Wissen auf Universitätsniveau.