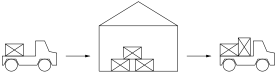
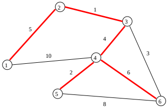
Kombinatorische Optimierung



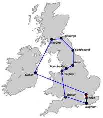
Zuweisungsprobleme

Rucksackpackproblem

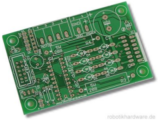
Kombinatorische Optimierung



Aufspannende Bäume



Travelling Salesman



VLSI Design

Zuweisungsproblem I

Gegeben:

- n Arbeiter $E_1, E_2, \ldots, E_n$
- n Arbeitsvorgänge $T_1, T_2, \ldots, T_n$
- Kosten c_{ij} für Zuweisung $E_i \longrightarrow T_j$

Ziel:

Finde eine Zuweisung mit minimalen Kosten!

Mathematisch: Variable $x_{ij} \in \{0, 1\}$ mit

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls Arbeiter } i \text{ nicht Aufgabe } j \text{ zugewiesen wird,} \\ 1, & \text{falls Arbeiter } i \text{ Aufgabe } j \text{ zugewiesen wird} \end{cases}$$

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{unter} \quad \forall i: \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j: \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Zuweisungsproblem II

Wie viele zulässige Punkte (Zuweisungen) gibt es?

- Fasse $x_{ij} \in \{0,1\}$, $i,j = 1,\dots,n$, als Einträge einer $n \times n$-Matrix auf
- Nebenbedingungen: jede Zeile und jede Spalte besitzt genau einen Eintrag eins
- n Möglichkeiten, die 1 in der ersten Zeile zu platzieren; $n-1$ Möglichkeiten, die 1 in der zweiten Zeile zu platzieren, usw.
- es gibt $n! = n(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$ zulässige Punkte
- naiver Ansatz: werte Zielfunktion an allen zulässigen Punkte aus und wähle den besten Punkt

Benötigte Auswertungen:

n	10	20	30	50	70	90
eval	$3.63\cdot 10^{6}$	$2.43\cdot 10^{18}$	$2.65\cdot 10^{32}$	$3.04\cdot 10^{64}$	$1.20\cdot 10^{100}$	$1.49\cdot 10^{138}$

Rucksackpackprobleme

Modell für Projektmanagement; Auswahl von Mitarbeitern bzw. Resourcen

Naiver Ansatz: 2^N Kombinationen

Gegeben:

- ein Rucksack, N Gegenstände und ein Höchstgewicht A
- Gegenstand i hat Gewicht a_j und Wert c_j für $j = 1, \ldots, N$

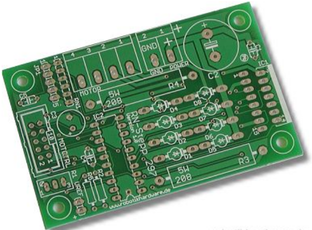
Aufgabe:

Packe Rucksack mit maximalem Wert, dessen Gewicht höchstens A beträgt.

VLSI Design

Problemstellung:

- Eine Firma möchte n Löcher in eine Platine bohren.
- Möglichst viele Platinen sollen produziert werden.
- Bohrzeit für einzelnes Loch kann nicht beeinflusst werden.
- Fahrzeit (=Reihenfolge der Bohrlöcher) kann optimiert werden. Gesucht: Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit minimalem Gesamtabstand

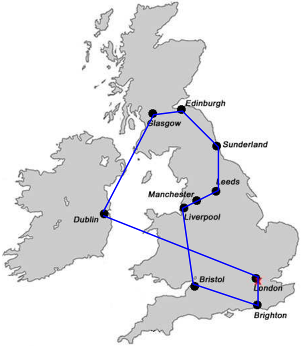


robotikhardware.de

Naiver Ansatz: $n!$ Kombinationen

Travelling Salesman Problem (Rundreiseproblem)

- Gegeben: Städte $V = \{1, \ldots, n\}$, Verbindungen zwischen den Städten $E \subset V \times V$
- Länge c_{ij} der Verbindung $(i, j) \in E$.
- Eine Tour ist ein geschlossener gerichteter Pfad, der jede Stadt genau einmal enthält.
- Ziel: Finde Tour minimaler Länge.



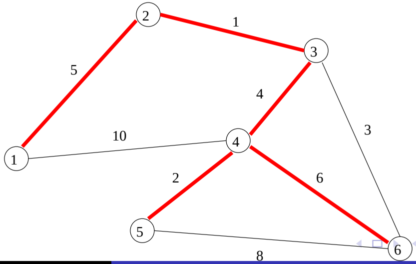
Auspannende Bäume

Problemstellung:

- Telekommunikationsfirma möchte Teile eines Telefonnetzes mieten.
- Anforderung: gegebene Menge von Städten sollen bedient werden

Ziel:

- möglichst geringe Mietkosten (mathematisch: Finde minimalen aufspannenden Baum!)

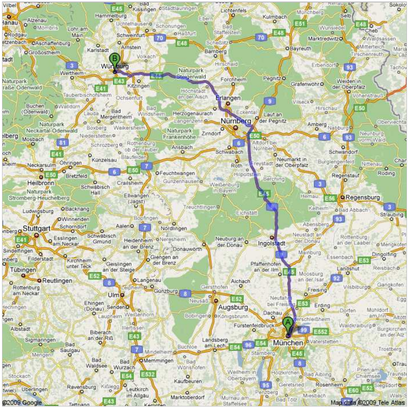


Kürzeste Wege Probleme

München nach Würzburg - Google Maps http://maps.google.de/maps?f=d&source=s_d&saddr=M%C3%BCnc...

Google maps Deutschland

Route nach Würzburg
279 km – ca. **2 Stunden, 42 Minuten**



Komplexität eines Algorithmus

Beispiel:

- Gegeben: Computer mit 10^{10} Operationen pro Sekunde (10 GHz).
- Problem P (z.B. Zuweisungsproblem), welches gelöst werden soll.
- n bezeichne die Größe des Problems.
- 5 verschiedene Algorithmen zur Lösung, welche n, n^2, n^4, 2^n bzw. $n!$ Operationen benötigen

ops \ size n	20	60	$\cdots$	100	1000
n	0.002 μs	0.006 μs	$\cdots$	0.01 μs	0.1 μs
n^2	0.04 μs	0.36 μs	$\cdots$	1 μs	0.1 ms
n^4	16 μs	1.296 ms	$\cdots$	10 ms	100 s
2^n	0.1 ms	3 yrs	$\cdots$	10^{12} yrs	.
$n!$	7.7 yrs	.	.	.	.

Kombinatorische Optimierung

Hauptziel:

konstruiere effiziente Algorithmen für kombinatorische Optimierungsprobleme (falls überhaupt möglich)

Querbeziehungen

- Optimierung
- Informatik, Datenstrukturen
- Operations Research
- Algorithmentheorie und Komplexitätstheorie
- Graphentheorie

Beispiele:

Routingprobleme und kürzeste Wege Probleme, Zuweisungsprobleme, VLSI Design, Travelling Salesman Probleme (Rundreiseprobleme), Rucksackpackprobleme, Schedulingprobleme, Maschinenbelegungsplanung, Netzwerkoptimierung (Netzwerkflüsse, Transportprobleme), Sequenzangleichung von DNA Sequenzen (sequence alignment), Lagerhaltungsprobleme, ...

W- und P-Seminare

Eignung für W- und P-Seminare:

- viele praxisrelevante Problemstellungen; leicht zu formulieren; anschaulich
- mathematische Modellierung mittels Graphen, Optimierung, ...
- experimentieren möglich; Entwicklung von Ideen für Algorithmen
- kaum mathematische Vorkenntnisse nötig

aus dem Vieweg-Programm
Mathematik für das Lehramt

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen?

Weitere Informationen:

gerdts@mathematik.uni-wuerzburg.de
www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼gerdts
oder
kanzow@mathematik.uni-wuerzburg.de
www.mathematik.uni-wuerzburg.de/∼kanzow