Lernplanung

Inhaltsverzeichnis

Bei der Lernplanung geht es um den Entwurf einer *Lerneinheit* oder einer *Lernsequenz.* Eine Lerneinheit dauert ein bis höchstens zwei Unterrichtsstunden. Eine Lernsequenz umfaßt etwa bis zu sechs Lerneinheiten.

Aufbauend auf einer fachlichen und methodischen Analyse des Themas und einer Klarlegung der Lernvorausetzungen der Schüler formuliert man möglichst operationalisierte Feinziele der Lerneinheit bzw. der Lerneinheiten. Eventuell gibt man auch ein Grobziel für eine Lernsequenz an. Nach der Frage nach dem Was und dem Warum muß man sich das Wie überlegen. Hierbei sind Alternativen zu diskutieren und der endgültig gewählte Weg ist dann didaktisch zu rechtfertigen. Persönliche Meinungen sind im allgemeinen nicht gefragt, da der Lernende selten über ausreichende praktische Unterrichtserfahrungen verfügt. Alle diese Vorüberlegungen münden dann in eine Beschreibung des geplanten Unterrichtsverlaufs ein. Eine kleinschrittige Beschreibung im fünf Minutentakt ist wegen der fehlenden Erfahrung unrealistisch. Es genügt die Inhalte der Phasen einer Lerneinheit — auch Artikulationsstufen genannt — genau zu beschreiben. Das häufig in der Literatur zu findende tabellenartige Schema ist in der Praxis wegen des beschränkten Schreibraums in den Spalten unbrauchbar.

1 Didaktische Analyse

1.1 Fachwissenschaftliche Relevanz

Entscheidend ist, den mathematischen Inhalt durch eine sachlogische Analyse zu erfassen. Diese umfaßt eine Beschreibung der Struktur des Lerngegenstands, eine Einordnung in größere Zusammenhänge und eine Erläuterung der Bedeutung des Lehrgegenstandes in der Mathematik.

Man unterscheidet Begriffe, Verfahren oder Sätze, die sich ihrerseits auf Begriffe oder Verfahren beziehen können. Folgende Fragen können helfen:

Begriffsumfang: Welche Begriffe treten auf?

Begriffsinhalt: Was ist darunter zu verstehen? Wie lauten einschlägige Definitionen? Welche Eigenschaften sind vorhanden?

Begriffsnetz: Welche Zusammenhänge zu anderen Begriffen bestehen? Was sind Ober-, Unter-, Nachbar- oder analoge Begriffe?

Verfahren: Von welchem Typ ist das Verfahren (Berechnung oder Konstruktion)?

Verfahrensschritte: Wie wird das Verfahren benutzt? In welcher Reihenfolge sind die Schritte mit welchen Hilfsmitteln durchzuführen?

Algorithmisierung: Kann das Verfahren in einen Algorithmus übersetzt werden, den ein Computer abarbeiten kann?

Effizienz: Welchen Aufwand verursacht das Verfahren (Zeit, Speicherplatz)? Bestehen Gemeinsamkeiten oder Unterschiede zu anderen Verfahren?

Lehrsatz: Was ist die Aussage des Satzes?

Satzlogik: Hat die Aussage die Struktur einer Implikation (Wenn—dann) oder einer Äquivalenz (Genau dann—wenn)? Was ist die Voraussetzung und was ist die Behauptung?

Geltungsbereich: Was sind Beispiele und Gegenbeispiele? Was geschieht, wenn die Voraussetzung abgeändert wird? Gilt auch der Kehrsatz? Kann man den Satz umformulieren? Die Aussagenlogik bietet die *Kontraposition* an:

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p) \qquad (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p) \tag{1}$$

Formulierung: Wie lautet eine schülergemäße Formulierung?

Stellenwert: Welche Bedeutung hat der Begriff oder der Satz für den Aufbau einer Theorie oder im Unterricht?

1.2 Methodische Relevanz

Die einsetzbaren Lehrverfahren und Gestaltungsideen sind zu diskutieren. Kann der Lehrinhalt deduktiv, induktiv oder etwa durch lokales Ordnen erarbeitet werden? Welche didaktisches Prinzipien sind einsetzbar? Ist das Vorgehen exemplarisch? Welches Argumentationsniveau und welche Repräsentationsmodi sind angemessen? Was ist der Stundentyp (Einführungs-, Vertiefungs- oder Übungsstunde)? Welche Medien kann man sinnvoll einsetzen? Welche evaluativen Entscheidungen sind zu treffen (Maßnahmen zur Sicherung und Kontrolle des Lernerfolgs)?

1.3 Personale Relevanz

Welche Beiträge werden geleistet zu der mathematischen Bildung des Schülers, zur Bewältigung von Umweltsituationen und zum Erreichen affektive Ziele, wie Aufbau einer Haltung, Einstellung gegenüber Werten.

2 Voraussetzungen

Diese betreffen die Mathematik und den Entwicklungsstand des Schülers.

2.1 Fachliche Voraussetzungen

Diese umfassen mathematische Kenntnisse, manuelle Fertigkeiten und Fähigkeiten, die sich aus der didaktischen Analyse des Temas ergeben.

2.2 Denk- und entwicklungspsychologische Voraussetzungen

Folgende Fähigkeiten werden benötigt:

Fähigkeit zu Erlebnissen: motivationale Bereitschaft für Mathematik;

Fähigkeit des geometrischen Sehens: Erkennen der Eigenschaften einer Figur;[1]

Fähigkeit der Vorstellung: in Gedanken mit geometrischen Objekten operieren;

Fähigkeit zu abstrahieren: lösen der geometrischen Eigenschaften von der konkreten Figur; absehen von konkreten Zahlen und aufstellen eines Terms oder einer Gleichung;

Fähigkeit zum Argumentieren: Fähigkeit zum schlußfolgernden Denken in mathematischen Inhalten;

Fähigkeit sich kreativ zu verhalten: Einzeichnen von Hilfslinien, Bewegen einer Figur, beweglichmachen von Teilen einer Figur, abändern der Bedingungen einer Situation.

2.3 Lernsoziale Voraussetzungen

Die Zusammensetzung der Klasse, ihr Grundverhalten, Einstellung zur Arbeit, Stellung des Lehrers und beobachteter Unterrichtsstil beeinflussen die weiteren Planungsüberlegungen.

---

[1] STRUNZ, K.: *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht,* Heidelberg 1968

3 Lernziele

Der Beitrag der Lerneinheit zu den Forderungen des Lehrplans und zu übergeordneten Lernzielen ist herauszustellen. Man unterscheidet *Fachübergreifende Ziele*, *Leitziele*, *Richtziele*, *Grobziel*, *Feinziel*, *Feinstziele*. Die persönlichen Lernziele teilen sich auf in psychomotorische, kognitive und affektive Ziele[2] .Es folgen drei Beispiele zu Lernzielfestlegungen.

3.1 Lernziele zu Proportionalitäten:

Die Schüler sollen fähig sein:

Fachübergreifendes Ziel: Denkweisen zu übertragen, zu spezialisieren und zu verallgemeinern.

Leitziel: mathematische Theorien anzuwenden.

Richtziel: Sachverhalte zu mathematisieren.

Grobziel: Größen zweier Größenbereiche mit Hilfe direkter und indirekter Proportionalitäten einander zu zu ordnen.

Feinziele:

1. an Beispielen auf verschiedenen Repräsentationsebenen zu entscheiden, ob eine direkte oder eine indirekte Proportionalität vorliegt: In einer Tabelle ist zu erkennen, ob die Quotienten bzw. die Produkte der Maßzahlen entsprechender Größen konstant sind. Im Schaubild ist der Graph einer direkten Proportionalität eine Gerade, d.h. die Punkte liegen auf einer Geraden.
2. Proportionalitäten zu definieren, formal zu beschreiben und wichtige Eigenschaften zu nennen: $x \mapsto a \cdot x, x \mapsto a / x$, Summen- und Verfielfachungseigenschaft bei direkten Proportionalitäten.
3. Informationen über die Funktion zwischen Repräsentationsformen (Tabelle, Graph, Pfeildiagramm, Schaubild, Term) zu transferieren.
4. Beispiele und Gegenbeispiele für Proportionalitäten anzugeben.
5. die Proportionalitätskonstante in Sachsituationen zu interpretieren: Preis, Geschwindigkeit, spezifisches Gewicht, Arbeit, Leistung.
6. Sachaufgaben graphisch und rechnerisch zu lösen: Ablesen fehlender Werte im Schaubild, Aufstellen von Gleichungen und Auflösen nach den gesuchten Größen.
7. die Begriffe direkte und indirekte Propotionalität zu diskriminieren.
8. direkte Proportionalitäten zu iterieren: Wachstumsprozesse rechnerisch und graphisch beschreiben.

3.2 Lernziele zur Prozentrechnung:

Die Schüler sollen fähig sein:

Fachübergreifendes Ziel: Denkweisen zu übertragen, zu spezialisieren und zu verallgemeinern.

Leitziel: mathematische Theorien anzuwenden.

---

[2] vgl. die ausführlichen Darstellungen in:
WITTMANN, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig 19816, S. 34-58
ZECH, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik*, Beltz, Weinheim und Basel 19968, S. 51-88

Richtziel: Sachverhalte zu mathematisieren.

Grobziele:

1. Größen eines Größenbereichs mit Hilfe direkter Proportionalitäten, früher Prozentoperatoren genannt, einander zu zu ordnen.
2. Prozentsätze in Diagrammen darzustellen.
3. die Grundaufgaben funktionaler Zuordnungen zu lösen.
4. Zusammenhänge zwischen Prozent- und Zinsrechnung herzustellen

Feinziele:

1. an Beispielen zu entscheiden, ob ein absoluter oder relativer Vergleich angemessen ist.
2. relative Vergleiche mit geeigneten Strategien durchführen können: Die Nenner werden gleichnamig gemacht. Der Nenner 100 wird benutzt.
3. Prozentsätze zu definieren und zu berechnen: Der Zähler eines Bruchs mit dem Nenner 100 heißt Prozentsatz. Es gilt $p\% := p/100$.
4. die Begriffe Grund-, Prozentwert und Prozentsatz zu erklären und zu gebrauchen: Wenn die Werte zweier Variabeln in der Gleichung $W := p- \cdot G$ gegeben sind, ist der Wert der dritten Variablen zu bestimmen.
5. den Begriff Promille erklären und anzuwenden: In manchen Bereichen werden Brüche mit dem Nenner 1000 benutzt.
6. die Begriffe der Prozentrechnung und Zinsrechnung einander zuzuordnen: Grundwert, Kapital, Prozentwert–Zinsen, Prozentsatz–Zinsfuß.
7. Jahres- und Monatszinsen zu berechnen.

3.3 Lernziele zu Flächeninhalten:

Die Schüler sollen fähig sein:

Fachübergreifendes Ziel: Denkweisen zu übertragen, zu spezialisieren und zu verallgemeinern.

Leitziel: mathematische Theorien anzuwenden: hier euklidische Geometrie.

Richtziel: Sachverhalte zu mathematisieren: ebene Figuren beschreiben.

Grobziel: den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren zu bestimmen.

Feinziel: den Flächeninhalt eines Trapezes zu bestimmen.

Feinstziele

1. anschauliche Vorstellungen zu dem gesuchten Flächeninhalt zu beschreiben: Belegen mit Platten, Farbverbrauch beim Anmalen.
2. zwischen Fläche, Umfang und Flächeninhalt zu unterscheiden.
3. Strategien der Flächenverwandlung bei Parallelogrammen zu übertragen und Zahlenbeispiele zu berechnen: in Dreiecke zerlegen, in ein flächengleiches Rechteck verwandeln.
4. einen Term für den Flächeninhalt herzuleiten.

5. Sachaufgaben durch Termeinsetzungen zu lösen unter Berücksichtigung einer sinnvollen Genauigkeit bei Verwendung eines Taschenrechners.
6. funktionale Betrachtungen an der Flächenformel des Trapezes durchzuführen.

4 Allgemeine methodische Überlegungen

In der Detailreflexion sind Alternativen bzgl. der Motivation (Einstieg), der Erarbeitung und der Lernkontrolle zu diskutieren.

4.1 Motivation

4.1.1 Motivation durch die Sache selbst

Diese intrinsische Motivation lenkt vom Lehrer weg zur Sache selbst. Ein mathematisches Thema motiviert den Schüler, wenn es einen Wert hat, den der Schüler noch nicht besitzt. Als Werte mathematischer Sachverhalte gelten: die Ästhetik einer Sache, affektive Verhaltensformen: Freude oder Befriedigung über eine Leistung, erkenntnistheoretischer Zuwachs, der zur Lösung neuer Aufgaben befähigt. In der Literatur wird dies auch die Motivation durch die affektiven Werte der Funktionsfreude genannt. Der Lernende freut sich über das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten, Beispielen, Gegenbeispielen, neuen Zusammenhängen, Analogien oder gemeinsamen Eigenschaften oder er freut sich über das Herstellen einer Ordnung oder das Erkennen von Sachverhalten.

Wenn der mathematische Sachverhalt zu wenig bezugskräftig ist, um zu motivieren, kann der Unterrichtsgegenstand problematisiert werden.

Mathematische Kontraste: Es werden Fälle gesucht, in denen eine beobachtete Gesetzmäßigkeit nicht mehr gilt, etwa die Konstanz der Differenzen oder Summen der Größen gegenüberliegender Seiten oder Winkel in Vierecken.

Anschauungskontraste: Flächeninhalt von Rechtecken verschiedener Form; optische Täuschungen;

4.1.2 Motivation durch die äußere Gestaltung

Die Ausagekraft einer Figur kann durch Farben verstärkt werden. Hübsche Modelle locken zur Beschäftigung mit ihnen: Spiegel, Körpermodelle. Die Repräsentationsformen und der intermodale Transfer sind sorgfältig zu planen: Videos, Computerprogramme.

4.1.3 Motivation durch die Person des Schülers

Leistungsbewußtsein und das Verhältnis zu den Mitschülern können die Motivationslage entscheidend beeinflussen.

4.1.4 Motivation durch die Person des Lehrers

Entscheidend ist, daß der Lehrer für die Sache begeistern kann und nicht nur die bekannten Strafmechanismen wie Noten oder psychischen Druck einsetzt.

4.2 Einstiege

Unterschiedliche Zugänge betonen unterschiedliche Begriffseigenschaften. Die Variation des Zugangs schult das bewegliche Denken und respektiert individuelle Unterschiede.

4.3 Repräsentationsformen

Die enaktive, ikonische und symbolische Repräsentation des Sachverhaltes und der entsprechende intermodale Transfer (enaktivieren, ikonisieren, verbalisieren und symbolisieren) ist zu beschreiben.

4.4 Arten der Problemstellung

4.4.1 Mathematisch variable Problemstellungen

Jede Variable des Begriffs wird verändert. Man verspricht sich davon eine Einleitung von Generalisierungsprozessen. Bei der Einführung von Größen benutzt man beim Messen verschiedene nicht normierte Einheiten vor der Festlegung einer normierten Einheit.

4.4.2 Transversale Problemstellungen

Hier geht es nicht um die Variation innerhalb eines Begriffs, sondern um das Aufzeigen von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Begriffen oder Verfahren (gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften von Verknüpfungen, Relationen, Größen oder Konstruktionen).

4.4.3 Funktionale Problemstellungen

Die Art der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen wird mittels elementarer Funktionen beschrieben, z. B. Proportionalitäten in sogenannten Formeln. Bei den mathematisch variablen Problemstellungen werden alle Variablen eines Begriffs geändert. Die Änderungen werden nicht immer durch Funktionen beschrieben. Insbesonders werden additive und multiplikative Änderungen des Arguments untersucht.

4.4.4 Reversible Problemstellungen

Die Terminologie bezieht sich auf das operative Prinzip. Die Problemlösung erfordert die Umkehrung eines bereits bekannten Gedankengangs: Auflösen einer Formel nach einer anderen Variablen, benutzen der Umkehrfunktion bzw. Gegenoperation, sofern diese existieren. Hier unter fällt auch der systematische Wechsel zwischen den drei Grundaufgaben der Operatorrechnung.

4.5 Gesamtreflexion

Nach den genannten Detailüberlegungen sollten sich anbietende Gesamtbehandlungen reflektiert und Gründe für die gewählte angegeben werden.

5 Verlaufsplanung

Die mangelnde Erfahrung verbietet eine kleinschrittige Beschreibung des geplanten Unterrichtsablaufes und die Spekulation über erwartetes Schülerverhalten. Statt dessen sollten die Lernphasen einer Unterrichtseinheit klar beschrieben werden.

5.1 Problemstellung

Der gewählte Einstieg wird beschrieben: Medieneinsatz, Lehrervortrag, Schülerverhalten. In bestimmten Fällen bereiten in dieser Phase Rechenfertigkeitsübungen die folgende Problemlösung vor. Am Ende dieser Phase sollte die zu lösende Aufgabe von den Schülern erfaßt sein. Im Idealfall formulieren die Schüler selbst die Fragen bzw. das Thema der Stunde.

5.2 Problemlösung

Die üblichen[3] heuristischen Strategien aus der Theorie des Problemlösens werden eingesetzt: Erfassen der für die Lösung relevanten Informationen, Reaktivieren von Kenntnissen bzw. Einholen von Informationen über die in dem Problem beschriebenen Zusammenhänge, systematisches Probieren, Vorwärts-, Rückwärtsarbeiten, Veranschaulichen, Suche nach bereits bekannten ähnlichen Aufgaben, Verallgemeinern, Spezialisieren, Analogisieren, Transformieren des Problems in eine andere

[3] POLYA, G.: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*, Birkhäuser, Basel und Stuttgart , Bd. 1 1966, Bd. 2 1967
KÖNIG, H.: *Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen*, in: MU 38(1992),24-38

mathematische Sprache, Suchen nach Invarianten, oder Symmetrien.

5.2.1 Problemvertiefung

Die Wiederholung des Lösungsweges und anschließende Variationen der Aufgabe sollen das neu erworbene Wissen sichern. In dieser Lernphase bieten sich die Aktivitäten der sogenannten *operativen Übungen* und der *funktionalen Betrachtungen* an.

5.2.2 Problemanwendung

Der neu erworbene mathematische Begriff oder das Verfahren wird in Sachaufgaben angewandt. Dabei ist insbesonders auf eine sinnvolle Genauigkeit zu achten. Die Anwendung zählt bei manchen Autoren ebenfalls zur Probemvertiefung, insbesonders dann, wenn keine tiefergehende Vertiefung im vorher beschriebenen Sinne möglich ist.

5.2.3 Problemkontrolle

Verschiedene Aufgabentypen sind zu beschreiben.