Problemlösen

Inhaltsverzeichnis:

1. Überblick

Das Lösen von Aufgaben nimmt im heutigen Mathematikunterricht sicher breiten Raum ein. Allerdings werden damit häufig vorgegebene Verfahren geübt; d.h. es handelt sich um Routineaufgaben. Bei der Lösung von Problemaufgaben im Unterrichtsgespräch besteht die Gefahr, dass die Schritte, die für eine selbständige Lösung von besonderer Bedeutung sind, von den „guten“ Problemlösern, von Lehrern und besonders fähigen Schülern, durchgeführt werden. Den schwachen und mittelmäßigen Schülern bleibt wie bei Routineaufgaben die Durchführung eines bestimmten Verfahrens – und kaum Raum, um selbständiges Problemlösen zu lernen.
Deshalb sollen hier die Besonderheit des Problemlösens als selbständige Anwendung von Mathematik dargelegt werden und Hinweise für eine entsprechende Unterrichtsgestaltung gegeben werden

Definition von Problemaufgaben / Schritte beim Problemlösen

Problemlöseaufgaben grenzt man ab gegen Routineaufgaben, bei denen vorgegebene Verfahren zu einer Lösung führen. In Problemaufgaben verhindert eine Barriere eine unmittelbare Lösung, es werden mehrere Schritte benötigt, um zu einer Lösung zu kommen, z.B. eine Analyse der Aufgabe, Umstrukturierungen, mehrere Schritte der Synthese. Die Fähigkeit, mathematische Probleme zu lösen, setzt Kenntnisse der entsprechenden Begriffe, Sätze und Verfahren voraus, verlangt darüber hinaus aber die Bereitschaft, sich selbständig mit einem Problem auseinander zu setzen, sein eigenes Wissen zu organisieren, mit heuristischen Regeln nach Lösungen zu suchen und die eigenen Lösungsschritte zu kontrollieren und darzustellen.

Unterrichtsgestaltung: Raum für Selbsttätigkeit / Heuristische Strategien und ihre Vermittlung / Motivation / Dosierung von Hilfen

Unter der Problemlösefähigkeit versteht man also die Fähigkeit, Mathematik selbständig zu benutzen. Um diese Fähigkeit zu fördern, ist der Unterricht entsprechend zu gestalten – gerade eine solche Fähigkeit wird nicht durch Zusehen erworben! Der Unterricht muss Raum und Zeit bieten für die Selbsttätigkeit und Kreativität der Schülerinnen und Schüler und geeignete Hilfen, um sich diese Fähigkeit anzueignen. Dabei geht es um das Bewusstmachen und die Vermittlung heuristischer Strategien. Um die Bereitschaft zu wecken, sich mit Problemen auseinander zu setzten, sollten motivierende Fragestellungen mit einem mittleren Schwierigkeitsgrad gesucht werden. Dies ist wichtig, um Frustrationen zu vermeiden, ebenso wie vorsichtig dosierte Hilfen während eines Problemlöseprozesses.

Rolle im Mathematikunterricht

Problemlösen ist eine bedeutsame Fähigkeit bei zentralen mathematischen Tätigkeiten:
- beim Beweisen von Sätzen
- beim Lösen von Konstruktionsaufgaben
- beim Anwenden der Mathematik auf außermathematische Problemstellungen.

Die selbständige Auseinandersetzung führt zu einem tieferen Verständnis des einzelnen Problems. Allerdings ist zu diskutieren, inwieweit durch einen nur auf Problemlösen bezogenen Unterricht bei den Schülerinnen und Schülern eine geordnete Wissensstruktur aufgebaut werden kann und automatisierte Fertigkeiten erworben werden.
Es gibt Diskussionen um die Möglichkeit und Notwendigkeit des Problemlösens für schwächere Schülerinnen und Schüler.

2. Besonderheiten von Problemaufgaben

Welche Merkmale lassen eine Aufgabe zu einer Problemaufgabe werden?
Dies hängt nicht nur von der Aufgabe ab, sondern vom Entwicklungsstand und den Fähigkeiten der Kinder und von ihren Vorkenntnissen und Vorerfahrungen aus dem Unterricht. Dennoch lassen sich bestimmte Schwierigkeiten identifizieren.:

Bekanntheitsgrad

Bekannte Aufgabentypen in „üblicher“ Darstellung, die direkt an bekannte Lösungsverfahren erinnern, stellen die typischen Routineaufgaben dar. Schon Abweichungen in der Präsentation können sie in Problemaufgaben verwandeln.

Mathematische Komplexität

Mit der Zahl der Bedingungen, die berücksichtigt werden müssen, und der Zahl der Lösungsschritte oder der Länge der Argumentationskette nimmt die Schwierigkeit einer Aufgabe zu.

Darstellungsebene

Entsprechend dem Entwicklungsstand der Kinder bedeuten verschiedene Darstellungsebenen, auf denen die Aufgaben präsentiert werden bzw. auf denen die Lösungen erarbeitet werden sollen, unterschiedliche Schwierigkeiten.

Beispiel:
Treffen mit 10 Personen. Wie oft werden Hände geschüttelt?
Lösungsmöglichkeiten:
Praktisch-handelnd, zeichnerisch, algebraisch, kombinatorisch.

Informationsangebot

Die Anforderung wird höher, wenn Informationen fehlen oder überflüssige Informationen angeboten werden.. Denn das bedeutet, dass für das Problem wesentliche und unwesentliche Informationen erkannt werden müssen bzw. Lücken benannt werden müssen.

Erkennbarkeit des Aufgabentyps

Ein wesentlicher Schritt beim Problemlösen ist das Erfassen der mathematischen Struktur einer Aufgabe, d.h. wesentliche Merkmale und Beziehungen sind zu identifizieren, auch implizite Bedingungen zu erfassen. Die dafür notwendigen Denkschritte sind ein wichtiges Merkmal für die Aufgabenschwierigkeit.

Beispiel:
Eine geometrische Figur aus dem Hintergrund herauslösen. In einem Binom einen komplizierten Teilterm als Summand identifizieren.

Reversibilität

Müssen übliche Lösungsschritte umgekehrt werden, muss die „Denkrichtung“ geändert werden, so erhöht dies den Schwierigkeitsgrad.

Im Allgemeinen tragen verschiedene Kombinationen dieser Merkmale zum Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe bei.
Bei Aufgabenfolgen stellt das „Umschalten“ zwischen Aufgaben eine zusätzliche Anforderung dar: Bei ähnlichen Sachsituationen kann sich die mathematische Struktur unterscheiden bzw. von der äußeren Sachsituation ganz unterschiedliche Aufgaben können eine analoge mathematische Struktur aufweisen.

3. Heuristische Strategien

Die Heuristik oder Erfindungskunst befasst sich mit dem Lösen von Problemaufgaben.
Dabei handelt es sich **nicht** um Wege, die sicher zu einer Lösung führen, sondern nur um günstige Strategien, mit denen sich eher eine Lösung entdecken lässt. Aus seiner Selbstbeobachtung als forschender Mathematiker entwickelt Polya „Regeln des Entdeckens“ (Polya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Band II, S.148) und beschreibt folgende Phasen des Problemlösens (Polya, Schule des Denkens, 1949, S.49).
Dabei stellt er jeweils wieder die Fragen „Wo soll ich beginnen? Was kann ich tun? Was kann ich dadurch erreichen?“.

Vertraut werden mit der Aufgabe:

Man soll von der Formulierung ausgehen, sich die Aufgabe als Ganzes lebendig vor Augen stellen, noch ohne auf Einzelheiten einzugehen.

Erarbeiten eines besseren Verständnisses:

Man prägt sich die Formulierung ein, zerlegt die Aufgabe in ihrer Hauptteile, untersucht die Einzelheiten und klärt so Teile, die später eine Rolle spielen.

Verfolgen einer nützlichen Idee:

Man geht von den Hauptteilen aus, aktiviert sein Gedächtnis und versucht eine Verbindung zu früher erworbenem Wissen herzustellen. Man prüft und kombiniert Einzelheiten, versucht eine Bedeutung zusehen, Bekanntes wiederzuerkennen, eine nützliche Idee zu finden, die den Weg zum Ziel zeigt. Dabei zeigen Ideen oft nur einen Teil des Weges, man muss vielleicht mehrere kombinieren, sie können auch in die Irre führen. Mit jeder Idee entsteht eine neue Situation, die zu prüfen ist. Es entwickelt sich ein besseres Verständnis der Aufgabe.

Ausführung des Plans:
Man geht von der „glücklichen Idee“ aus, die zur Lösung führen soll. Man führt alle arithmetischen, algebraischen oder geometrischen Operationen Schritt für Schritt durch, kontrolliert diese Schritte und stellt sie dar. So gelangt man zu einer vollständigen und gesicherten Lösung.

Rückschau:
Man geht von der Lösung aus, setzt sie mit früheren Erfahrungen in Verbindung, überschaut die Lösung und versucht sie zu verbessern, zu kürzen, anschaulicher zu begründen etc. Man gelangt so zu einem bewussteren Verständnis der Lösung, eventuell zu alternativen Lösungen und erwirbt so ein geordnetes Wissen.

Allerdings beobachtet man beim Problemlösen oft nicht diese lineare Abfolge, sondern eher Kreisprozesse: ein Teilidee wird ausgearbeitet, man gelangt zu einer neuen Situation, die erneut analysiert werden muss und für die erneut Lösungsideen gesucht werden.

Bei der Suche nach einem Weg zur Lösung kann man noch zahlreiche Strategien beschreiben: Von gegeben Daten aus Schlüsse ziehen, Berechnungen oder Konstruktionen ausführen, um dem Ziel ein Stück näher zu kommen, also „Vorwärts arbeiten“. Oder umgekehrt vom Ziel aus bestimmen, was man benötigt, also vom Ziel aus nach „rückwärts arbeiten“.
Erweist sich die Aufgabe als zu schwierig, kann man sie vielfältig variieren, etwa durch Beschränkung auf einen Teil der Bedingungen, durch Übergang auf allgemeinere Fälle oder auf einfachere Sonderfälle. Eine andere Darstellungsart, ein Wechsel des Bezugsrahmens führt vielleicht zu anderen Lösungswegen.
Wichtig ist das Mobilisieren und Organisieren der eigenen Vorkenntnisse aus dem Gedächtnis, also das eigene Wissen bereit zu stellen und zu überblicken. Für einen möglichen Transfer von Lösungen, für den Einbau der Lösungen in die eigene Wissensstruktur und für den Erwerb heuristischer Regeln ist vor allem die Reflexion der einzelnen Schritte und die Diskussion der eigenen Lösung von besonderer Bedeutung.

Für bestimmte Aufgabentypen wurden zu den einzelnen Phasen konkretere Handlungsanweisungen für die Schüler entwickelt, z.B. von Reichold eine „Übersicht zum Finden des Ansatzes bei Sach- und Anwendungsaufgaben“ (nach Zech, Schema 27, S.341).

In vielen Fällen sind dabei Entscheidungen über das weitere Vorgehen zu treffen. Dafür empfiehlt Polya folgende Regeln:

Vernünftiges Verhalten
Man handle nie gegen sein Gefühl, aber man versuche mit offenem Sinn klare Gründe für oder gegen seinen Plan zu erkennen.

Sparsames Wirtschaften, aber keine vorausbestimmbare Schranke
Man bleibe so nahe bei der Aufgabe wie möglich. Aber man sei darauf gefasst, sich so weit von der Aufgabe zu entfernen, wie es die Umstände verlangen.

Beharrlichkeit, aber Vielseitigkeit
Man bleibe bei dem Punkt, den man gerade untersucht, solange die Hoffnung besteht, ihm eine nützliche Anregung abzugewinnen.
Doch sollte man sich bemühen, bei jedem Schritt irgendeinen noch nicht erforschten Grund zu betreten und aus allem , was man untersucht, eine nützliche Anregung zu ziehen.

Dazu kommen **Vorzugsregeln,** die empfehlen , zunächst das Einfachere, stärker mit der Aufgabe Verbundene auszuführen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten im Unterricht an solche heuristischen Regeln heran zu führen:

- In einem fragend-entwickelnden Unterricht kann beim Lösen einer Aufgabe parallel bei jedem Arbeitsschritt die entsprechende Tätigkeit bewusst gemacht und notiert werden. Zech spricht hier vom „kognitiven Modellieren“ (Zech, S.335).
- Schriftliche „Handlungsorientierungen“ im Sinne von Galperin und Lompscher (Zech, S.336) mit Impulsen und kurzen Fragen dienen den Schülern als Begleiter im Problemlöseprozess. Natürlich werden diese Handlungsorientierungen vorher im Unterricht erarbeitet, und schrittweise sollte entsprechendes Problemlöseverhalten verinnerlicht werden.
- Eine weitere Möglichkeit ist auch das Training von Teilschritten; so werden diese Teilschritte bewusst gemacht, stärker reflektiert.
    - z. B. Daten aus einer Aufgabe in eine Skizze übertragen,
    - z. B. im Text sprachliche Hinweise auf bestimmte Rechenoperationen kennzeichnen,
    - z. B. Überprüfen, welcher von mehreren Termen zum Aufgabentext passt,
    - z. B. zu einem Thema bekannte Formeln und Sätze zusammenzustellen,
    - z. B. vorliegende Lösungen auf Fehler untersuchen.

Insgesamt geht es darum „Denkstrategien zu motivieren, zu propagieren, bewusst zu machen und zu üben“ (Zech, S.353).

4. Motivation

Das Problemlösen setzt die Bereitschaft voraus, sich auf das Problem einzulassen, sich auch bei Widerständen längere Zeit mit dem Problem auseinander zu setzen und auch nach der „zündenden“ Lösungsidee diese Lösung auszuarbeiten, zu kontrollieren und darzustellen. Daher ist die Motivation der Schülerinnen und Schüler während des ganzen Problemlöseprozesses von großer Bedeutung.(Zech, Kap.4.2)

Eigenschaften von Aufgaben bzw. ihrer Präsentation die der Motivation dienen können:

- Die **Anwendbarkeit** der Mathematik stellt sicher eine wichtige Motivation dar. Der Bezug zur Umwelt kann unterschiedlich sein:
    - Probleme können an die Lebenswelt und die aktuellen Interessen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen.
    - Probleme können für die schulische und berufliche Zukunft der Lernenden wichtig erscheinen.
    - Probleme können die sich mit bedeutsamen Fragestellungen aus der Realität, etwa aus der Technik, der Wirtschaft, der Kunst, der Natur etc. beschäftigen.

  Allerdings hängt es von sehr individuellen Einstellungen ab, was persönlich oder allgemein als bedeutsam erscheint. Außerdem bringen Anwendungsaufgaben zusätzliche Schwierigkeiten beim Verständnis des Sachverhalts und der Modellbildung mit sich, die eher abschreckend wirken.
- Bei innermathematischen Problemstellungen kann man sogenannte **„strukturelle Motivationen“** nutzen:
    - Neuigkeit, z.B. durch den Wechsel von Arbeitsmaterial, Medien, Themen, Sozialformen,
    - Überraschung, Erstaunen über eine bestimmte Gesetzmäßigkeit,
    - Konflikt, Diskrepanz zwischen Erwartung und Beobachtung,
    - Freude an der Ästhetik von geometrischen Formen, Freude an systematischer Ordnung und glattem Funktionieren .

- Eine **Zielorientierung**, die das Problem in einen größeren Zusammenhang stellt, seine Bedeutung hervorhebt und das Ziel kennzeichnet, verhindert Unsicherheit bei den Schülerinnen und Schülern und ermöglicht es ihnen, die Fragestellung zu ihren Kenntnissen in Beziehung zu setzen
- **Selbsttätigkeit** statt passivem Aufnehmen wirkt meist motivierend. Dafür müssen Schülerinnen und Schüler von Anfang an Möglichkeiten sehen, an der Aufgabe zu arbeiten, durch Skizzen, Berechnungen oder konkretes Handeln.
- Hoffnung auf **Erfolg** ist eine wichtige Motivation. Zu leichte Aufgaben erscheinen eher als langweilig, während zu schwierige Aufgaben zu Misserfolgen und Frustration und damit zur Ablehnung führen. Daher ist es von großer Bedeutung, Aufgaben von mittlerem Schwierigkeitsgrad auszuwählen.
- **Wohl dosierte Hilfen** während des Lösungsprozesses können ebenfalls Frustrationen vermeiden.
- Bedeutsam ist auch der **Umgang mit Fehlern oder Lösungsansätzen, die in Sackgassen führen**. Will man die Bereitschaft zum Experimentieren, zum kreativen Umgang mit Aufgaben wecken, sollte man Beurteilungen zurückstellen und zunächst neue Ideen positiv aufnehmen.
- Der Auftrag, die eigene Lösung anderen Schülerinnen und Schülern, in anderen Gruppen, in der Klasse, in der Schule zu präsentieren, bildet eine gute **Motivation für die Kontrolle und Darstellung** einer Lösung.

Literatur

Polya, G.: Schule des Denkens. Bern 1949 (?), 1967^2 ,(1980^3)
Polya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Basel 1966(Bd.1 1979^2 ; Bd.2 1983^2)
Zech, F. : Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim, Basel 1998^9