

Mathematische Begriffe lehren und lernen

Inhaltsverzeichnis:

Typen mathematischer Begriffe / Definitionen / Eigenschaften.....	1
Beziehungen zwischen Begriffen.....	1
Begriffsentwicklung.....	1
Didaktische Funktion eines Begriffs.....	2
Verstehen eines Begriff.....	2
Modelle langfristigen Lernens von Begriffen.....	3
Begriff und Problem.....	4
Unterrichtsphasen beim Lehren von Begriffen.....	4
Begriffsbildung als kreatives Tun.....	5

Im Mathematikunterricht sind Schülerinnen und Schülern unterschiedlichen *Alters* verschiedenen unterschiedliche *Typen* mathematischer Begriffe zu lehren, die unterschiedliche *didaktische Funktionen* haben. Es kann daher nicht ein allgemeingültiges „Rezept“ zum Lehren von Begriffen geben. Die Mathematikdidaktik fordert deshalb angemessenes didaktisches Handeln und zeigt Wege zu seiner Realisierung auf. Die folgenden Ausführungen sollen eine Hilfe zu einer begründeten und erfolgversprechenden Planung des Lehrens mathematischer Begriffe sein. Ihnen liegt ein Theoriegerüst zu Grunde, das ausführlich beschrieben ist in:

Hans-Joachim Vollrath: Grundlagen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe, Heidelberg (Spektrum) 2001

Sachanalyse

Am Anfang steht die Sache. In einer Analyse sind zunächst die mathematischen Fragen zu klären:

Um was für einen Begriff handelt es sich?

Wie kann man den Begriff definieren?

Was sind die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs?

Welche Modelle, Darstellungen gibt es für den Begriff?

Welche Eigenschaften hat dieser Begriff?

Welche Beziehungen bestehen zu anderen Begriffen?

Welche Bedeutung hat der Begriff innerhalb seines mathematischen Kontextes?

Was lässt sich über die Entstehungsgeschichte dieses Begriffs sagen?

Typen mathematischer Begriffe

Allgemein unterscheidet man:

Objekte, Mengen von Objekten, Relationen, Abbildungen, Verknüpfungen, Verknüpfungsgebilde.

Man kann aber auch auf das zugehörige Gebiet verweisen: z.B. algebraischer, geometrischer, stochastischer Begriff.

Definitionen

Begriffe, lassen sich definieren.

Eine *Definition* nennt die Begriffsbezeichnung (Definiendum) und die definierende Eigenschaft (Definiens).

Definitionen hängen vom Kontext ab; so ist z.B. entscheidend, dass alle Begriffe, die in der definierenden Eigenschaft auftreten, bereits definiert sind.

Beispiele (Modelle) sind Objekte, die unter den Begriff fallen.

Eigenschaften

Neben der definierenden Eigenschaft besitzen Begriffe weitere Eigenschaften, die sich entsprechend dem Kontext beweisen lassen.

Beziehungen zwischen Begriffen

Mathematische Begriffe stehen in unterschiedlichen Beziehungen zueinander:

Unterbegriff-Oberbegriff-Nachbarbegriff.

Das Beziehungsgefüge wird im *Begriffsnetz* dargestellt.

Begriffsentwicklung

Zentrale mathematische Begriffe haben meist eine lange Entwicklung hinter sich. Beispiele: Zahl, Funktion, Ableitung, Wahrscheinlichkeit.

Didaktische Analyse

Mathematische Begriffe haben im Unterricht unterschiedliche *didaktische Funktionen*.

Der jeweils zugeordneten Funktion entspricht der *Aufwand* und damit die Zeit, die für die Erarbeitung des Begriffs vorgesehen ist.

Die unterschiedlichen Rollen und der unterschiedliche Aufwand hängen mit ihrem mathematischen Gewicht zusammen, aber auch mit den sachlichen Voraussetzungen, die benötigt werden, und den Kontexten, in denen sie stehen.

Entsprechend stellt das Lernen dieser Begriffe unterschiedliche Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler.

Folgende Fragen sind also zu klären:

Welche Funktion soll der Begriff im Mathematikunterricht haben?

Für welche Zeiträume wird das Lehren des Begriffs geplant?

Lernziele

Lehren ist zielgerichtetes Handeln. Es ist daher für das Lehren eines Begriffs zu fragen, welche Ziele erreicht werden sollen.

Bei kurz- und mittelfristig zu lernenden Begriffen wird man fragen:

Welche Kenntnisse und Fähigkeiten sollen die Lernenden im Zusammenhang mit dem Begriff erwerben?

Was leistet der Begriff für den langfristigen Lernprozess, in den er eingebettet ist?

Bei langfristig zu lernenden Begriffen wird man fragen, welche Ziele in den einzelnen Etappen erreicht werden sollen.

Didaktische Funktion eines Begriffs

Begriffe können als *Leitbegriffe* eines *Themenstrangs* dienen, der sich über mehrere Jahrgangsstufen erstreckt. Man denke etwa an die Begriffe Zahl, Funktion, Figur oder Abbildung.

Begriffe können als *Schlüsselbegriffe* eine *Unterrichtssequenz* strukturieren. Das kann etwa der Begriff des Bruchs für die Bruchrechnung sein, der Begriff der proportionalen Zuordnung für die Schlussrechnung, der Begriff der Symmetrie für die Lehre von den Dreiecken und Vierecken.

Ein Begriff kann *zentraler Begriff* einer *Unterrichtseinheit* sein, der in ihr erarbeitet wird. Hier ist an Begriffe zu denken wie Primzahl, Quadratwurzel, Potenzfunktion, gleichseitiges Dreieck, Kreis, Tangente, Scherung, Prisma usw.

Schließlich dienen Begriffe als *Arbeitsbegriffe* dazu, beim Arbeiten bestimmte Sachverhalte griffig zu formulieren, um über sie sprechen zu können. Hier ist an Begriffe wie Zähler, Nenner, Klammer, Grundzahl, Hochzahl, Ecke, Seite, Kante usw. zu denken.

Verstehen eines Begriff

Das Verstehen eines mathematischen *Begriffs* lässt sich durch typische Kenntnisse und Fähigkeiten beschreiben.

Lernende haben einen mathematischen *Begriff verstanden*, wenn sie

- die Bezeichnung des Begriffs kennen,
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt,
- begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt,
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen,
- Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen.

Bei langfristig zu lernenden Begriffen ist es sinnvoll, entsprechend den einzelnen Etappen verschiedene *Ausprägungen des Verstehens* zu unterscheiden.

Planung für das Lehren eines Leitbegriffs

Leitbegriffe strukturieren Themenstränge, die sich über mehrere Jahrgangsstufen erstrecken. Es wird deshalb *langfristiges Lernen* angestrebt. Entsprechend dem Begriff und der geistigen Entwicklung der Lernenden ist ein *Modell* für das angestrebte Lernen dieses Begriffs zu entwickeln.

Im Gymnasium wird in der Regel eine Kombination aus *Lernen in Stufen* und *Lernen durch Erweiterung* angestrebt.

Die einzelnen Etappen beim langfristigen Lehren eines Leitbegriffs sind in der Regel in *Unterrichtssequenzen* organisiert.

Es sind also folgende Fragen zu klären?

Über welche Jahrgangsstufen soll der Begriff gelehrt werden?

Welche Lernziele sollen in den einzelnen Jahrgangsstufen erreicht werden?

In welchen Unterrichtssequenzen soll sich das Lernen in den einzelnen Jahrgangsstufen vollziehen?

Durch welche Maßnahmen soll in den einzelnen Unterrichtssequenzen der Lernfortschritt erreicht werden?

Wie kann man am Ende feststellen, welche Art des langfristigen Lernens bei den Schülerinnen und Schülern tatsächlich stattgefunden hat?

Modelle langfristigen Lernens von Begriffen

Wenn im Mathematik Begriffe langfristig gelernt werden, dann lassen sich unterschiedliche Resultate beobachten. Sie legen es nahe, unterschiedliche Qualitäten langfristigen Lernens zu betrachten.

Lernen durch Ansammeln

Das Kind lernt im Laufe der Jahre viele Einzelheiten des Begriffs kennen, von denen diejenigen behalten werden, die einen besonderen Eindruck hinterlassen. Sie werden weitgehend isoliert voneinander gemerkt, Beziehungen werden nicht gesehen. In diesem Fall wurde Wissen über den Begriff lediglich *angesammelt*.

Lernen als Zusammensetzen eines Puzzles

Das Kind hat Wissen über den Begriff im Zusammenhang erworben, so dass es Beziehungen zwischen den Teilen und zugleich sieht, welchen Beitrag sie zum Ganzen leisten. Das Wissen über den Begriff wird langfristig wie in einem *Puzzle* erworben. Diese Metapher betont also beim Lernen den Aufbau von Bereichen des Wissens und Könnens, die miteinander verbunden sind und ein sinnvolles Ganzes ergeben.

Lernen als Ersteigen von Stufen

Durch *Reflexion* bereits erworbenen Wissens entsteht ein Wissen anderer Qualität. Die Lernenden ersteigen dabei eine höhere *Stufe* des Verstehens. Im Laufe der Jahre sind unter Umständen mehrere Stufen nacheinander zu ersteigen. Bei diesem Lernen spielt die *Analyse* die entscheidende Rolle.

Beispiele: Übergang von der natürlichen Zahl als Rechenzahl zur Zahl mit bestimmten Eigenschaften; Übergang vom Quadrat als einprägsamer Figur zum Quadrat als Viereck mit bestimmten Eigenschaften.

Lernen durch Erweiterung

Beim Treiben von Mathematik bieten sich zahlreiche Möglichkeiten des Operierens mit Objekten. Eine Fülle ganz unterschiedlicher Probleme kann gelöst werden. Aber man stößt doch auch immer wieder an Grenzen. Hier spielt die *Synthese* die entscheidende Rolle: Neues wird erkannt, indem Begrenzungen bewusst überschritten werden, und Altes wird im Licht des Neuen neu gesehen.

Beispiele: Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen; Übergang vom Flächeninhalt des Vielecks zum Flächeninhalt des Kreises.

Planung für das Lehren eines Schlüsselbegriffs

Schlüsselbegriffe strukturieren Unterrichtssequenzen. Sie werden mittelfristig gelernt. In der Regel sind sie eng mit *Problemen* verbunden. Für diese Probleme können sie unterschiedliche Rollen spielen. Es sind also die Fragen zu klären:

*Für welche Probleme kann und soll der Begriff eine Schlüsselfunktion übernehmen?
Welche Rolle kann und soll der Begriff für das Problem spielen?*

Für die Planung der Unterrichtssequenz sind Entscheidungen über

- die *Auswahl* der Inhalte,
- die *Anordnung* der Inhalte und
- die *Verteilung* der Inhalte

zu fällen. Konkret wird man also die Themen und Inhalte der einzelnen *Unterrichtseinheiten* angeben.

Planung für das Lehren eines zentralen Begriffs einer Unterrichtseinheit

Das Lehren des zentralen Begriffs einer Unterrichtseinheit erfordert eine Reihe typischer didaktischer Maßnahmen, die ein erfolgreiches Lernen des Begriffs ermöglichen.

Zunächst ist zu klären, ob alle Voraussetzungen gegeben sind, um den Begriff zu erarbeiten. Ist das der Fall, so kann mit der Planung begonnen werden.

Zunächst ist nach einer geeigneten Hinführung zu suchen, die motivierend ist und zum Begriff hinführt.

Es ist eine griffige Formulierung der Erklärung (Definition) zu finden, die korrekt und merkfähig ist.

Man sollte überlegen, welche Beispiele und welche Eigenschaften behandelt werden sollen und können.

Man sollte sich einen Überblick über das Begriffsnetz verschaffen, in dem der Begriff eingebunden ist.

Schließlich sind Aufgaben zur Sicherung und zur Vertiefung bereitzustellen.

Begriff und Problem

Beim Entwickeln von Mathematik werden die Begriffe im Kontext von *Problemen* gebildet. Das ist in unterschiedlicher Weise möglich:

- Begriffe als Quelle von Problemstellungen,
- Begriffe als Mittel zur Präzisierung von Problemstellungen,
- Begriffe als Lösungshilfe für Probleme,
- Begriffe als Lösungen von Problemen,
- Begriffe als Mittel zur Sicherung von Problemlösungen.

Unterrichtsphasen beim Lehren von Begriffen

Hinführen

Die Schülerinnen und Schüler werden mit einer sie motivierenden Frage konfrontiert, die zu einer Situation führt, in der ein Bedürfnis entsteht, den neuen Begriff einzuführen.

Herausarbeiten

Aus einer zunächst vagen Vorstellungen über den Begriff wird die definierende Eigenschaft herausgearbeitet, die zu einer Erklärung, bei fortgeschrittenen Fähigkeiten auch zu einer mathematisch präzisen Definition führt.

Erkunden

Der neu gebildete Begriff wird erkundet: Beispiele werden gesucht, Gegenbeispiele werden entdeckt, Eigenschaften werden vermutet, begründet oder widerlegt.

Verbinden

Das neu erworbene Wissen ist in vorhandenes Wissen einzubinden. Es werden also Beziehungen zwischen dem neuen Begriff und bereits bekannten Begriffen hergestellt.

Sichern

Die Aneignung des Wortlauts der Definition, das Abfragen der Definition und noch wichtiger der Rückgriff auf die definierende Eigenschaft bei Begründungen dienen zur Sicherung des Gelernten.

Definieren lernen

Ist ein Begriff im Unterricht *definiert* worden, dann kann ein solcher Vorgang Anlass sein, etwas über das Definieren zu lernen.

In einer Reflexionsphase können die Lernenden z.B. erkennen, dass der neue Begriff dadurch gebildet worden ist, dass man einen bekannten Begriff einer einschränkenden Bedingung unterworfen hat.

Man sollte die Schüler dabei auch ermutigen, selbst Begriffe zu bilden und zu untersuchen. Dies kann für Schülerinnen und Schüler ein Anstoß sein, auch in der Mathematik *kreativ* zu werden.

Kontrollieren

Ziel des Lehrens ist das Lernen. Ob das angestrebte Lernen stattgefunden hat, ist zu *prüfen*. Diese Kontrolle bezieht sich zwar zunächst auf die Lernenden. Sie gibt aber zugleich der Lehrkraft eine Rückmeldung über die *Effektivität* des Lehrens.

Die Kontrolle erfolgt durch Fragen und durch Beurteilen der Antwort, durch Stellen einer Aufgabe und Beurteilung des Ergebnisses.

Korrigieren

Die Kontrollen können Fehlvorstellungen über den Begriff anzeigen. Sie erfordern häufig ein genaueres Hinsehen der Lehrenden.

Auf Fehler sind die Lernenden hinzuweisen und Fehlvorstellungen sind mit pädagogischem Geschick und Einfühlungsvermögen zu korrigieren.

Vertiefen

Als Möglichkeit einer Vertiefung bietet es sich an, die Definition kritisch zu betrachten. So kann man etwa den Einfluss der in der definierenden Eigenschaft geforderten Bedingungen erforschen, indem man sie z.B. abändert. Oder man sucht nach einer gleichwertigen (äquivalenten) Eigenschaft, die für eine Definition Frage käme.

Begriffsbildung als kreatives Tun

Das selbständige Bilden eines mathematischen Begriffs ist eine kreative Handlung. Ein sinnvolles Handlungsmuster zur Bildung und Erforschung eines Begriffs ist z. B.:

- die Betrachtung einer Eigenschaft zur Charakterisierung des Begriffs,
- die Wahl einer Begriffsbezeichnung,
- die Angabe einer Definition,
- die Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen,
- das Suchen von Eigenschaften und
- die Erforschung der Beziehungen zu Nachbarbegriffen.