Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Argumentieren mit multiplen und dynamischen Darstellungen

13.05.2014 – Andreas Bauer
Mathematikdidaktisches Kolloquium Bielefeld

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Argumentieren

Argumentieren

- Begriff hat Aufwertung erfahren
- Genaue Bedeutung ist unklar

Teil des Beweisens zum Absichern von Vermutungen
(Pedemonte 2007)

Weniger formale Alternative zum Beweisen
(Wittmann 2009)

Argumentieren

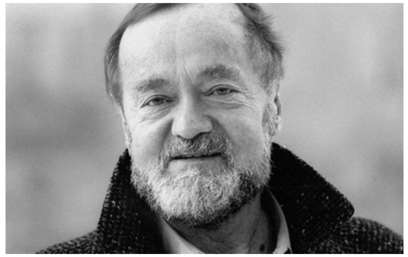
19th ICMI Study:

„[…] wir verstehen Argumentation als jeglichen schriftlichen oder mündlichen Diskurs, welcher nach gemeinsamen Regeln durchgeführt wird und auf einen gegenseitig akzeptablen Schluss bezüglich einer Aussage abzielt, deren Inhalt oder Wahrheit zur Debatte steht. Dies schließt Beweise als Spezialfall mit ein.“

Durand-Guerrier et al (2012), S. 349

Das Toulmin-Schema

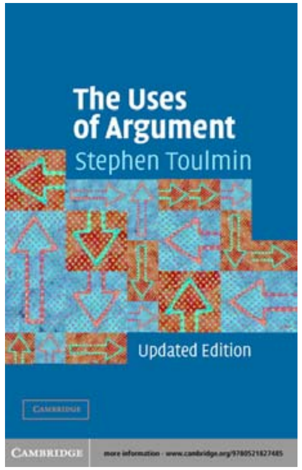
Stephen Edelston Toulmin



* 22. März 1922 in London

† 04. Dezember 2009 in Los Angeles

Bekanntestes Werk: „The Uses of Argument“ (1958)



Das Toulmin-Schema

- Modell zur Analyse von argumentativen Äußerungen
- hat sich in zahlreichen Studien bewährt
- Analyse durch Rekonstruktion der Funktion von Äußerungen in Argumenten
- „funktionale Argumentanalyse“

Das Toulmin-Schema

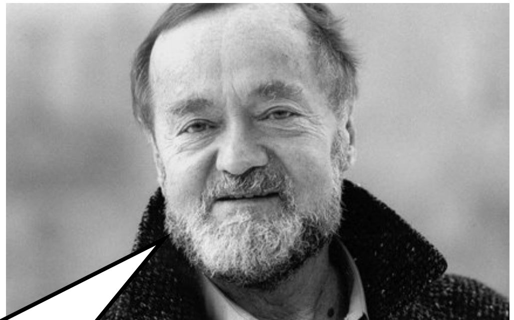
Behauptung
(claim)

Das Toulmin-Schema

Datum
(data)

→

Behauptung
(claim)



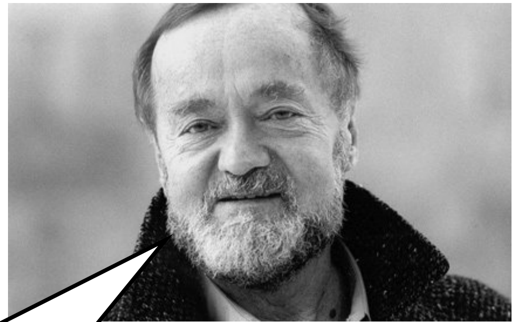
„The foundation of the claim …“

Das Toulmin-Schema

Datum
(data)

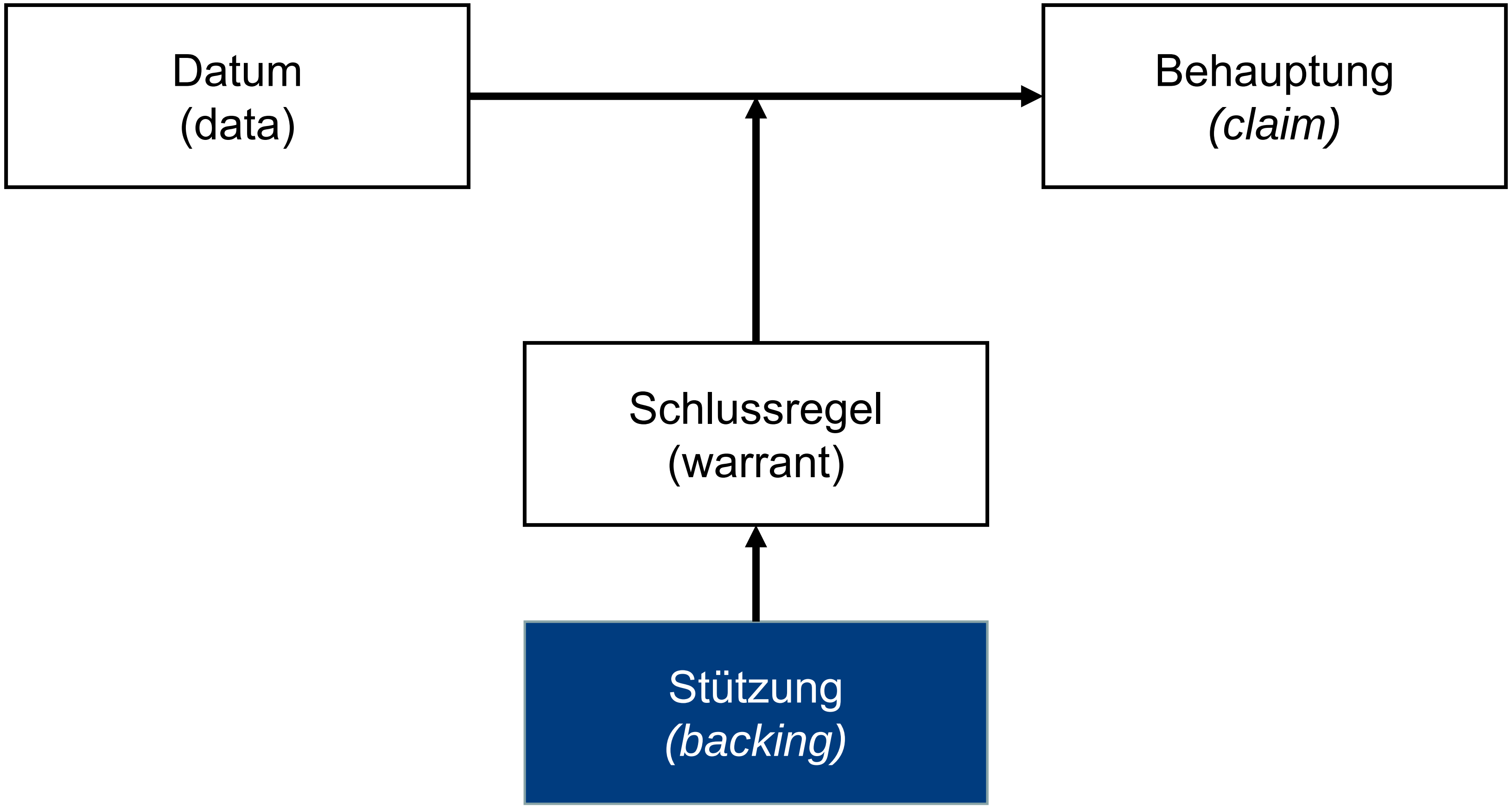
Behauptung
(claim)

Schlussregel
(warrant)

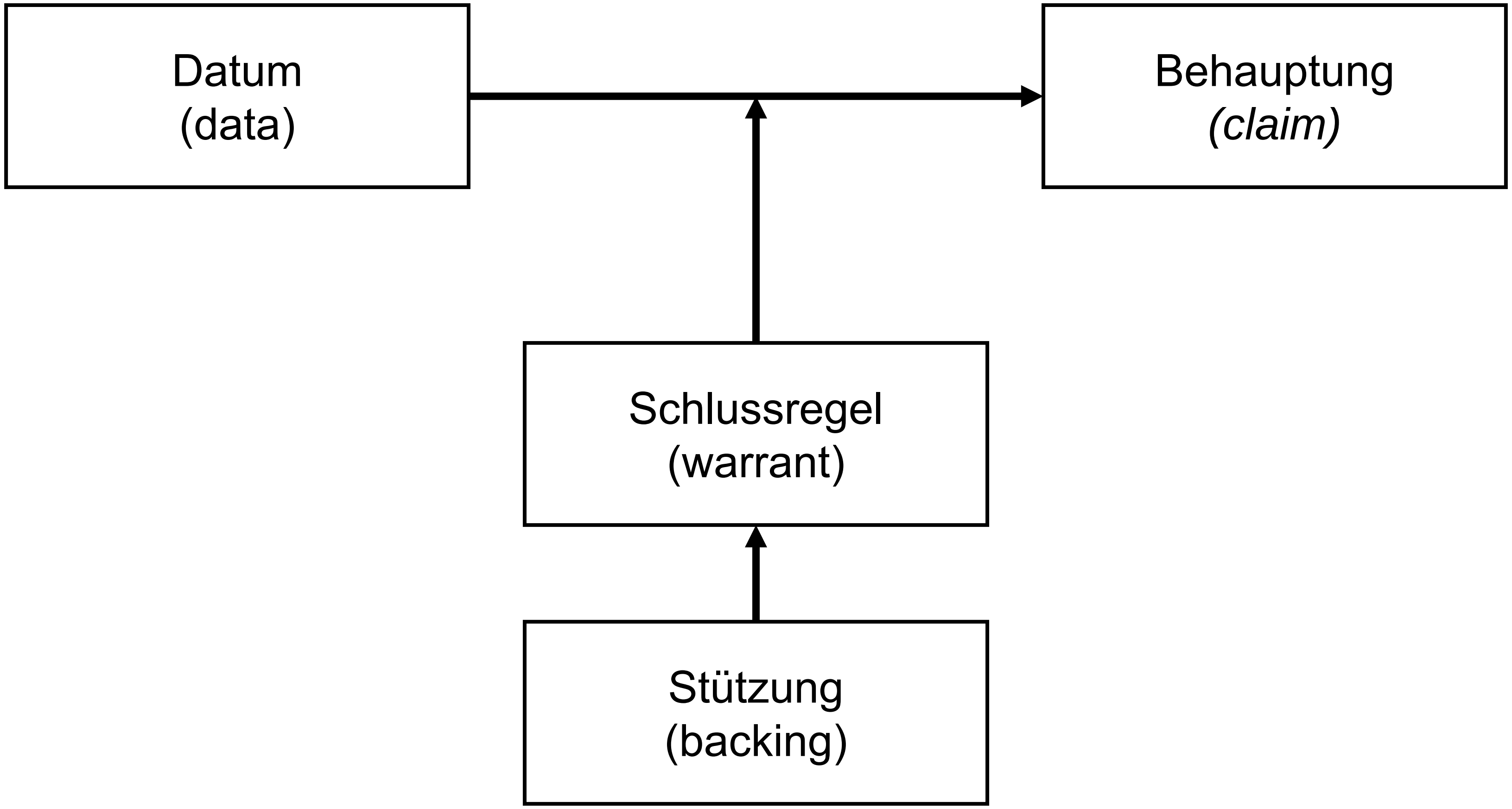


„How do you get there?“

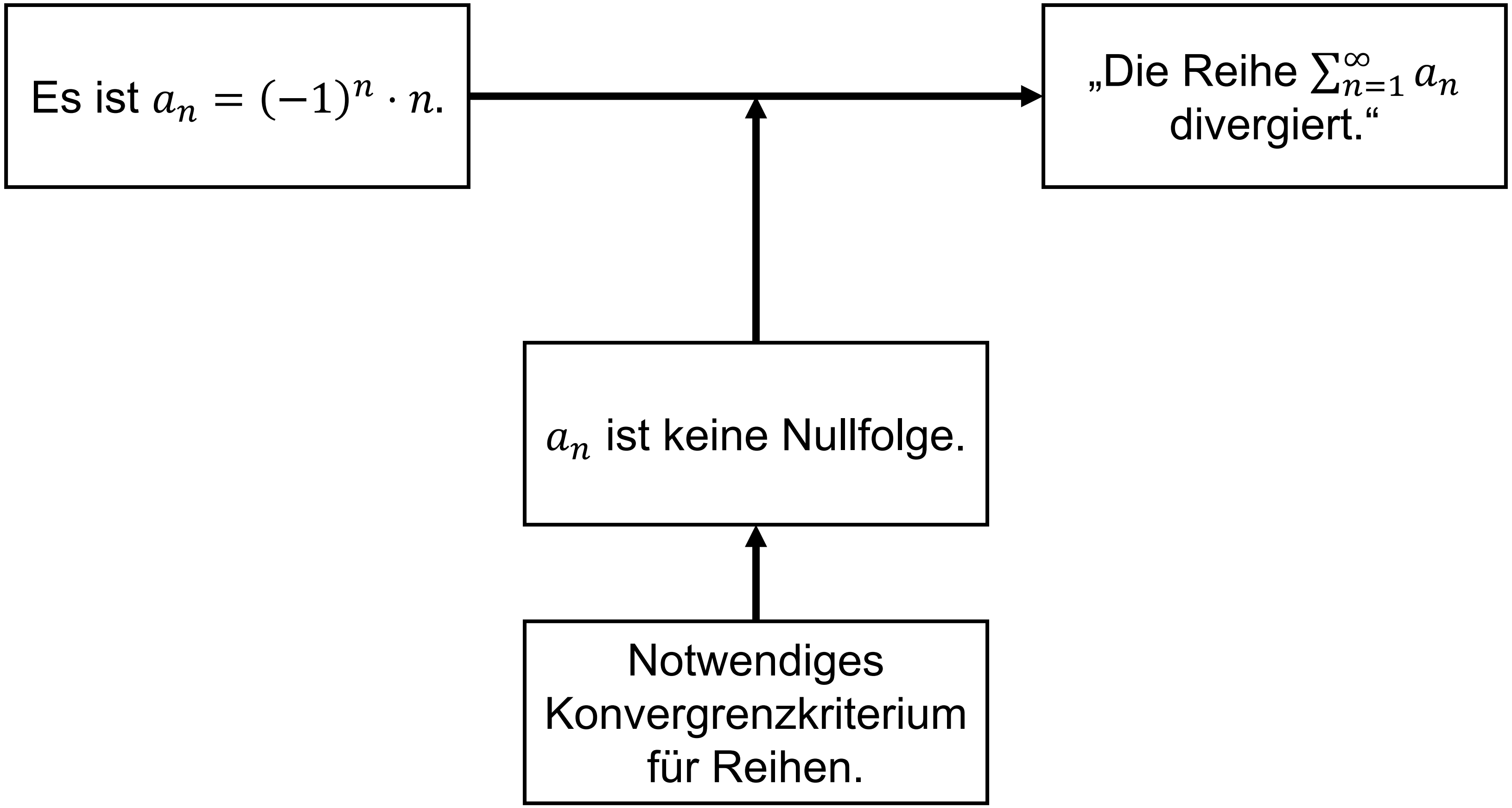
Das Toulmin-Schema



Das Toulmin-Schema

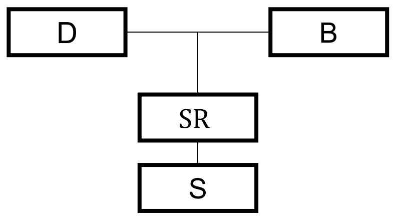


Das Toulmin-Schema



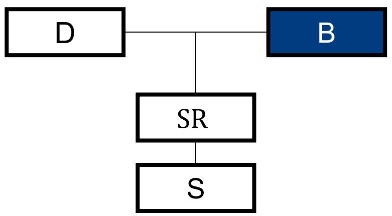
Das Toulmin-Schema

„Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, denn es ist $a_n = (-1)^n \cdot n$. Das ist keine Nullfolge und damit divergiert die Reihe nach dem notwendigen Konvergenz-kriterium für Reihen.“



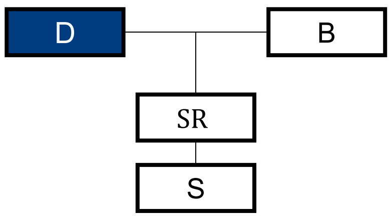
Das Toulmin-Schema

„Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, denn es ist $a_n = (-1)^n \cdot n$. Das ist keine Nullfolge und damit divergiert die Reihe nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen.“



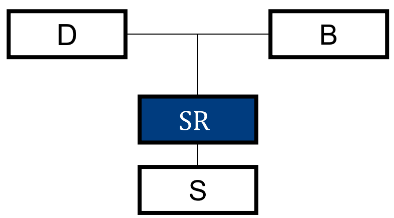
Das Toulmin-Schema

„Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, denn es ist $a_n = (-1)^n \cdot n$. Das ist keine Nullfolge und damit divergiert die Reihe nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen."



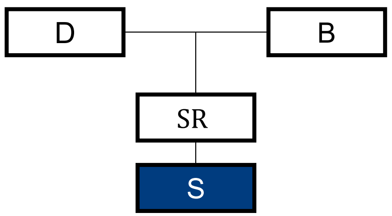
Das Toulmin-Schema

„Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, denn es ist $a_n = (-1)^n \cdot n$. Das ist keine Nullfolge und damit divergiert die Reihe nach dem notwendigen Konvergenz-kriterium für Reihen.“



Das Toulmin-Schema

„Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, denn es ist $a_n = (-1)^n \cdot n$. Das ist keine Nullfolge und damit divergiert die Reihe nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen."



Repräsentationen

Was ist eine Repräsentation?

„Eine Repräsentation ist zuerst einmal etwas, das für etwas anderes steht.“

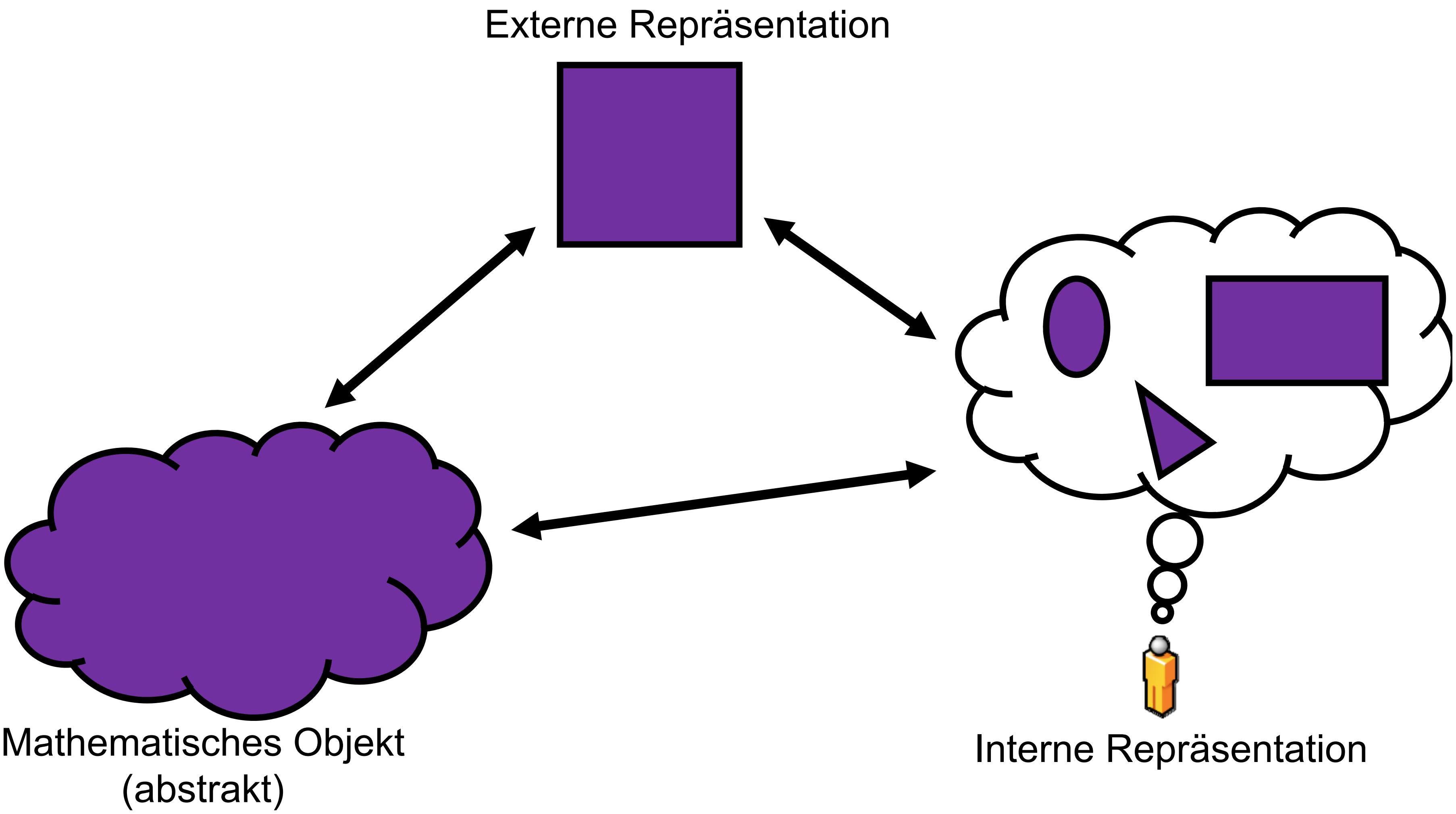
Palmer (1978), S. 262

Was ist eine Repräsentation?

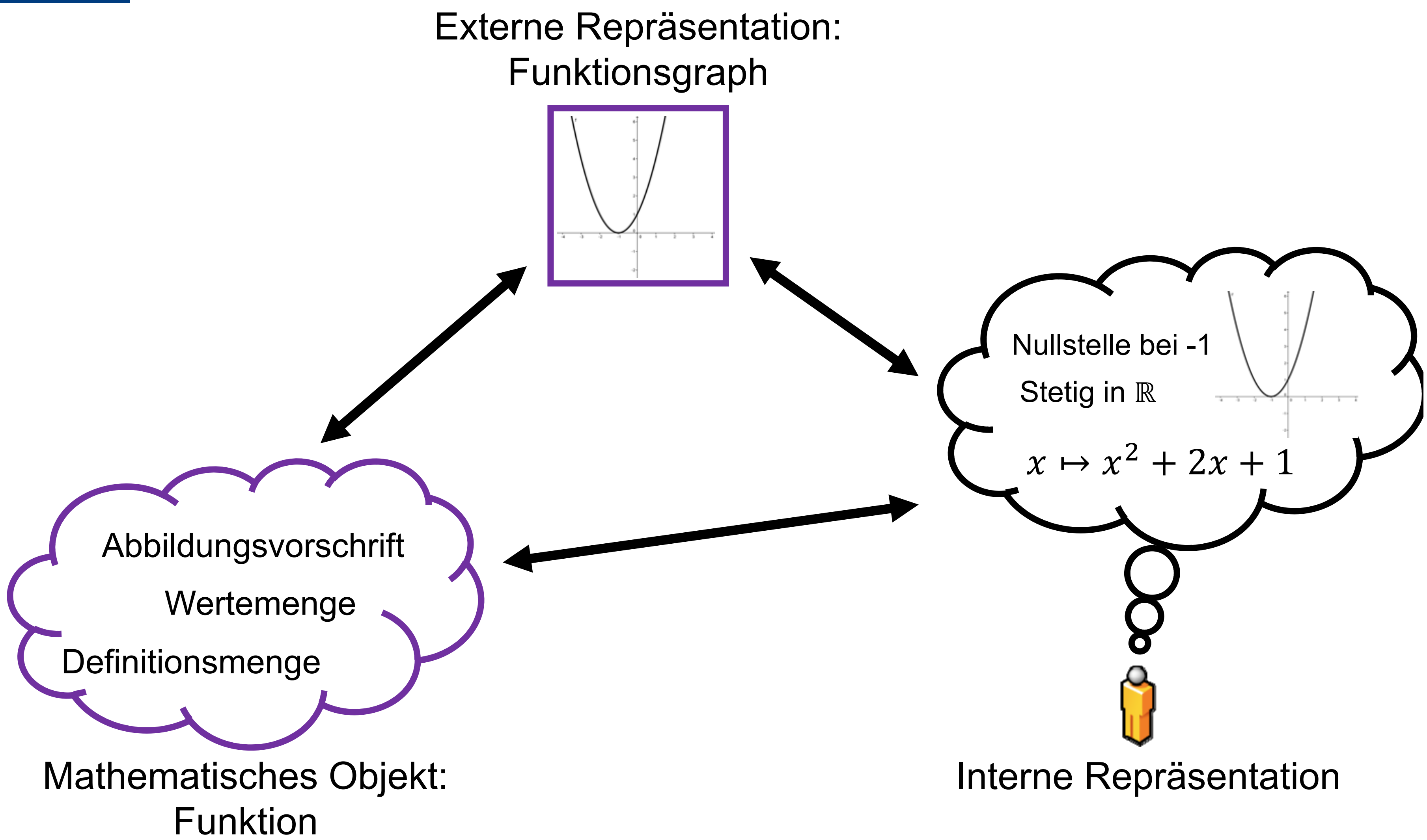
„Ein Zeichen ist etwas, das *für einen Geist* für ein anderes Ding steht."

Peirce (2000), S. 188

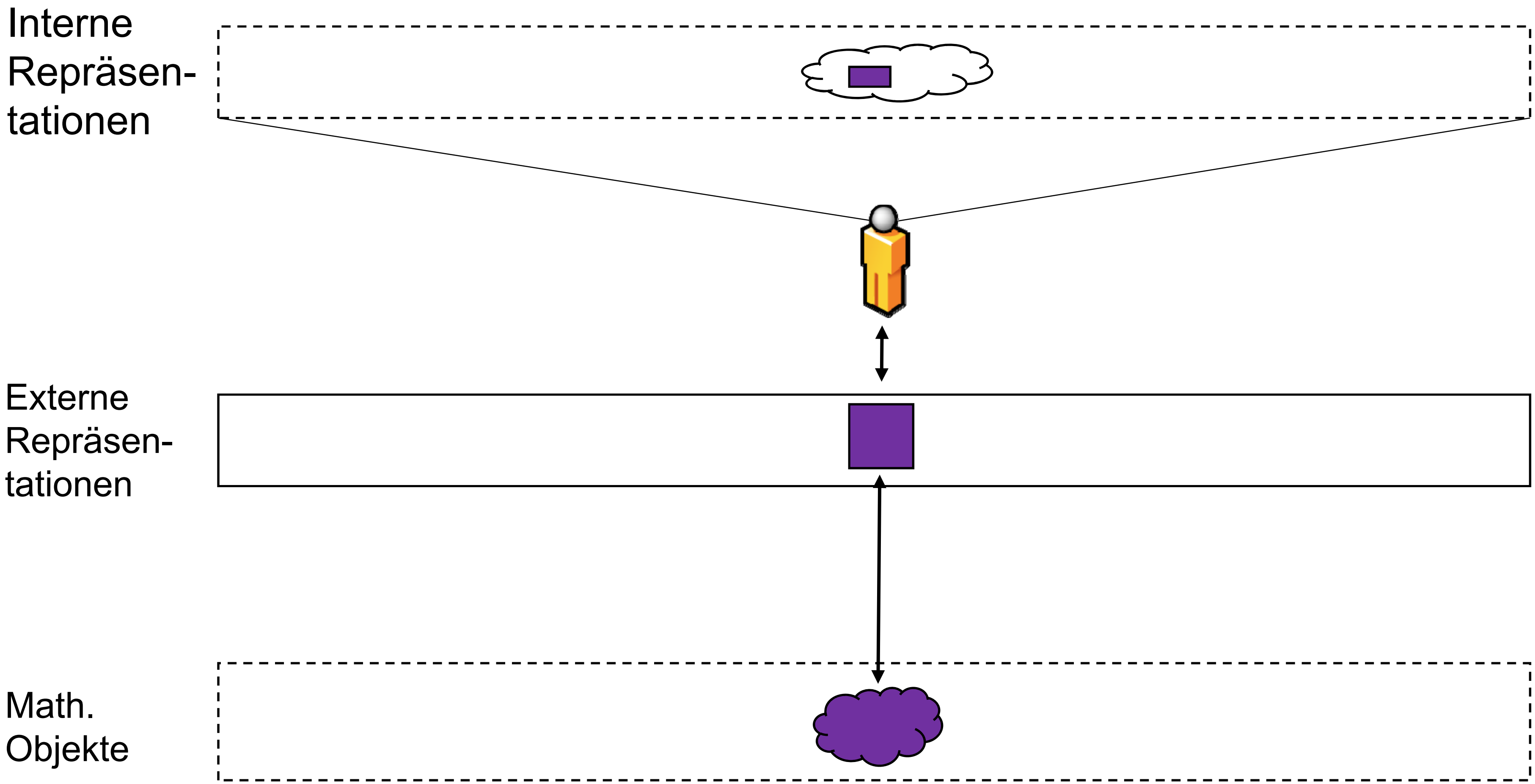
Was ist eine Repräsentation?



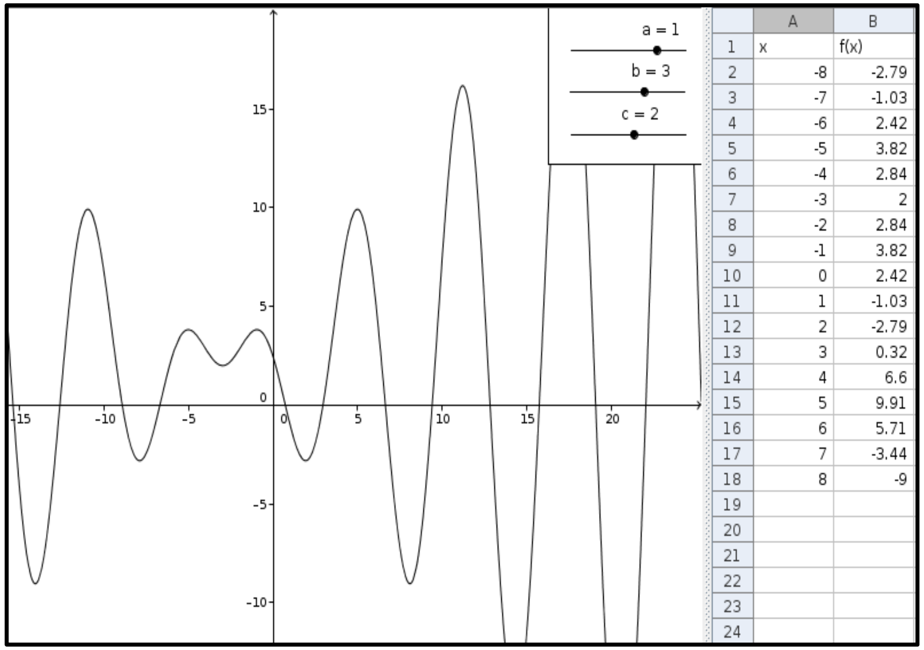
Was ist eine Repräsentation?



Was ist eine Repräsentation?



Motivation

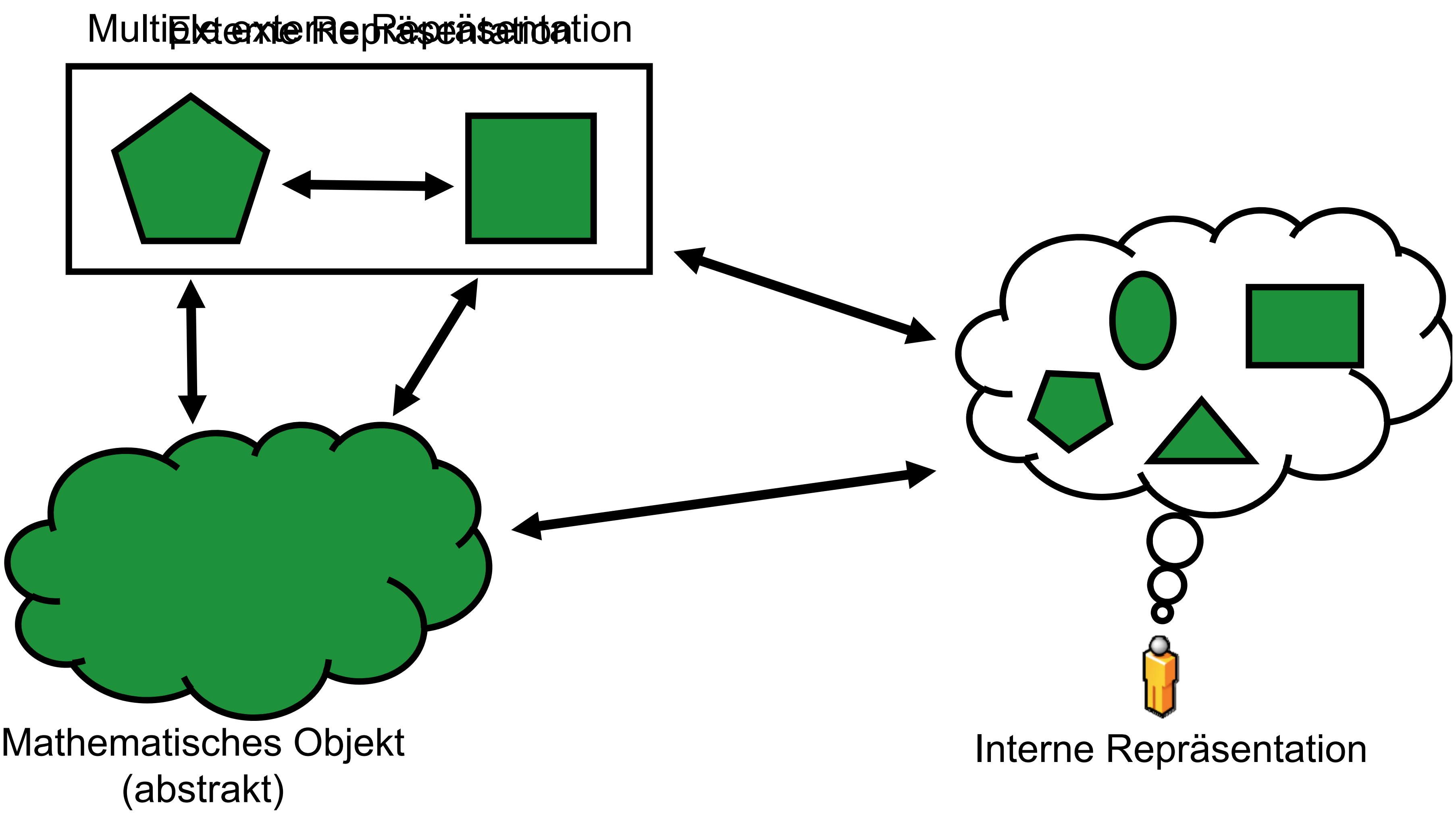

a = 1
b = 3
c = 2
15
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
A
B
1 x f(x)
2 -8 -2.79
3 -7 -1.03
4 -6 2.42
5 -5 3.82
6 -4 2.84
7 -3 2
8 -2 2.84
9 -1 3.82
10 0 2.42
11 1 -1.03
12 2 -2.79
13 3 0.32
14 4 6.6
15 5 9.91
16 6 5.71
17 7 -3.44
18 8 -9
19
20
21
22
23
24


TI-nspire CAS
Texas Instruments
RAD AUTO REAL
2.15
-4.31
4.31
0.5
-0.330839
-1.29
esc
tab
menu
ctrl
clear

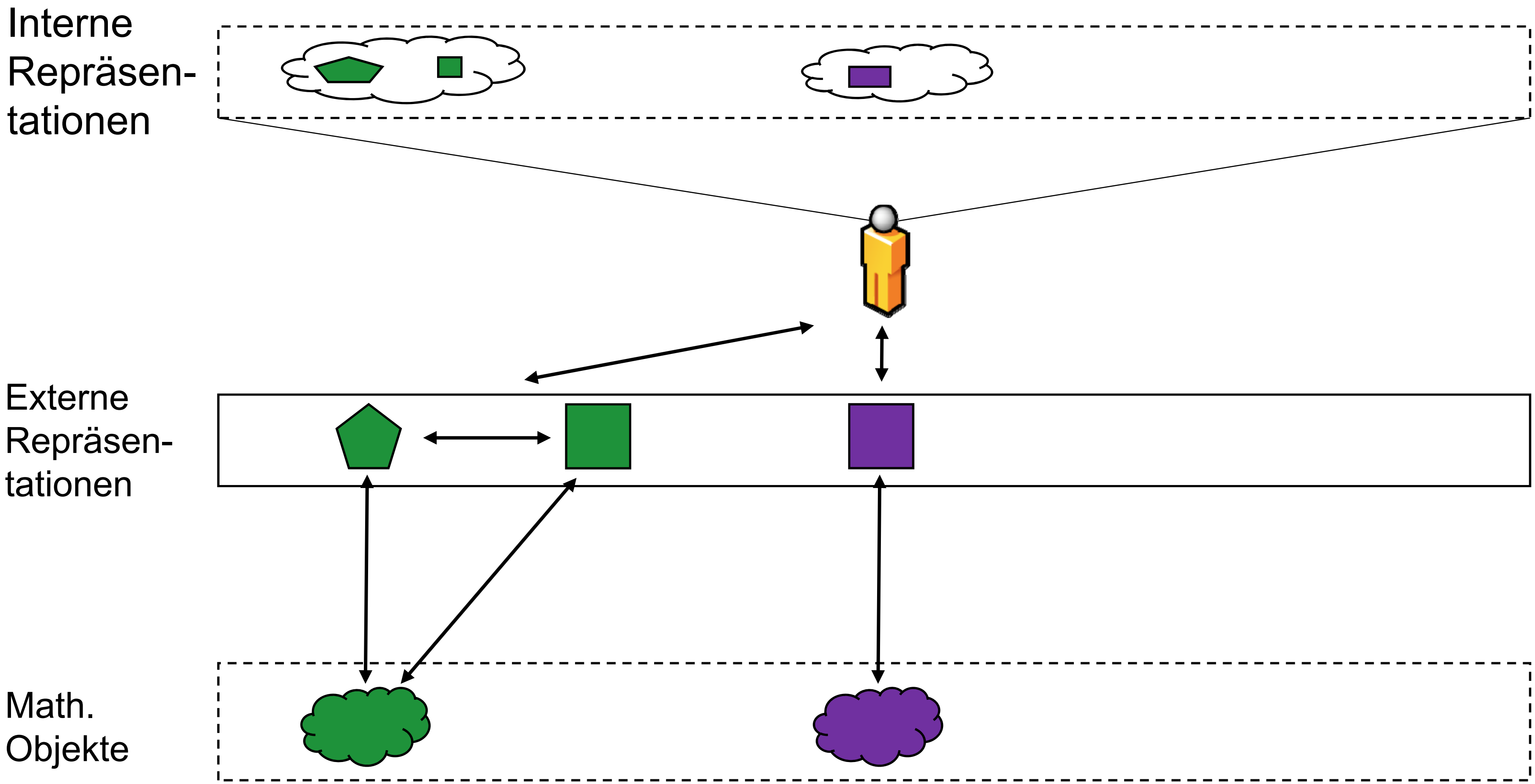
Definition: MER

Eine **multiple externe Repräsentation** (MER) liegt vor, wenn unterschiedliche Repräsentationen, die das gleiche Bezugsobjekt besitzen, gemeinsam dargestellt werden.

Taxonomie der Repräsentationen



Taxonomie der Repräsentationen

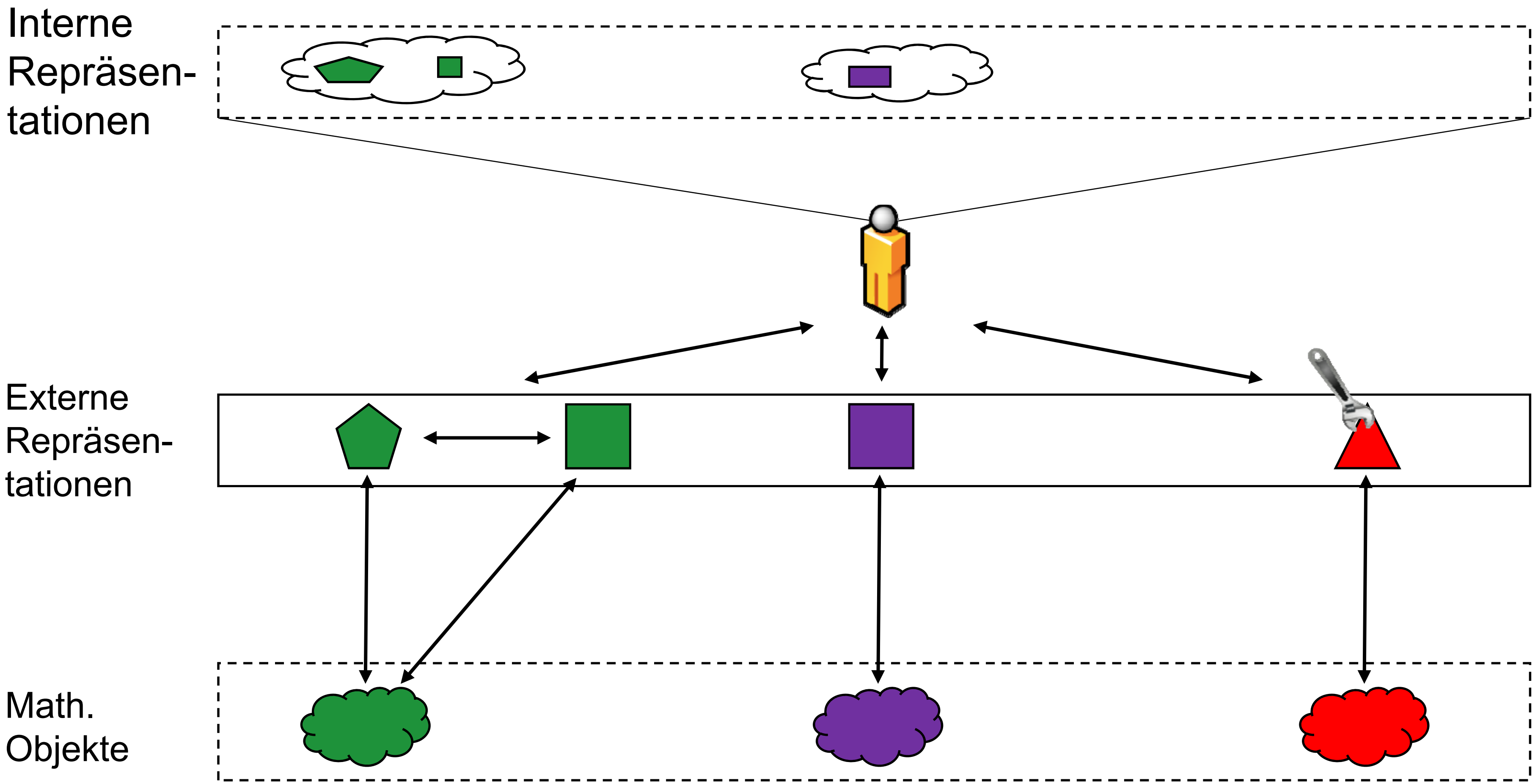


Definition: DER

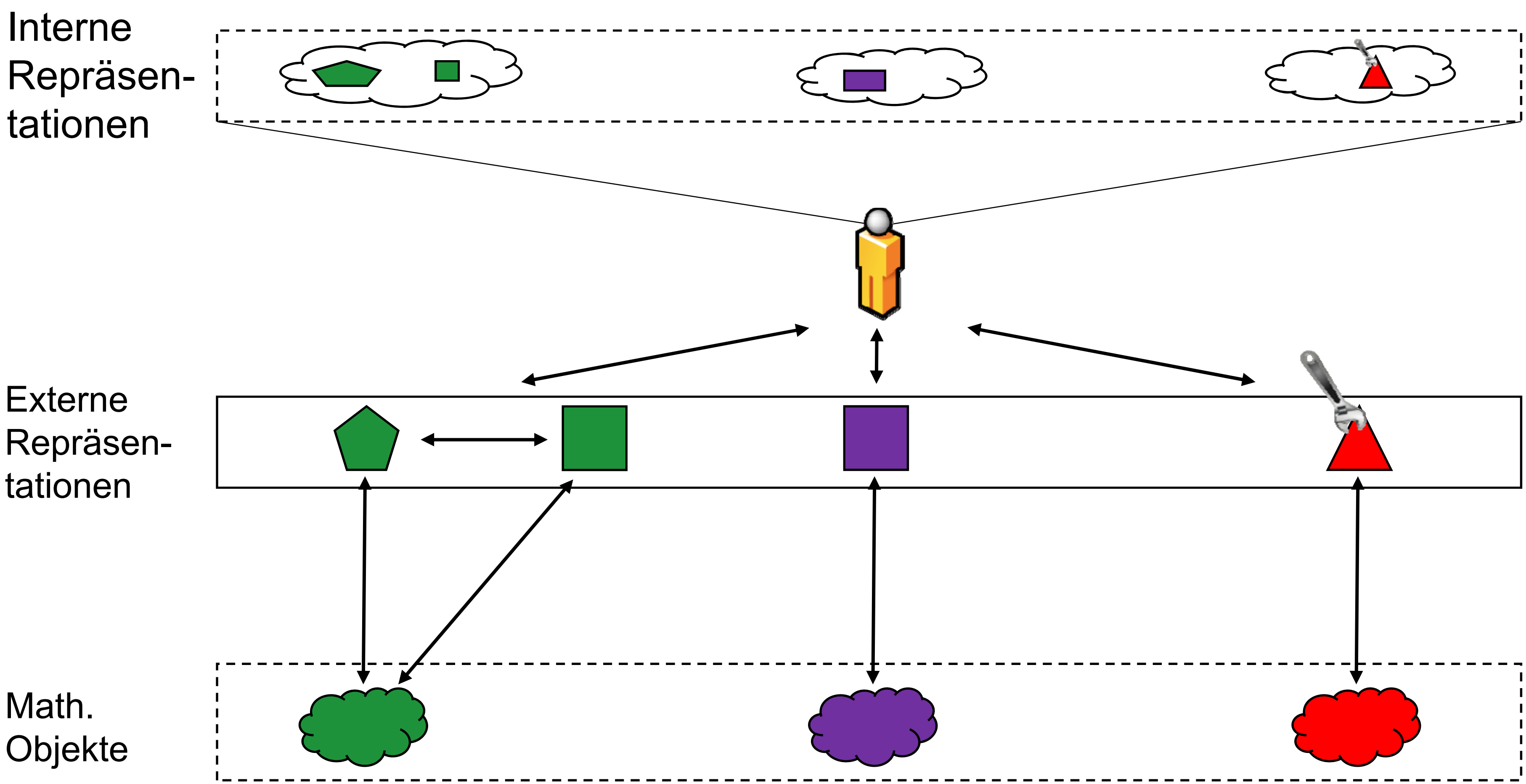
Eine **dynamische externe Repräsentation** (DER) liegt vor, wenn sich eine gezeigte Repräsentation während der Betrachtung verändert oder verändern lässt.

Dabei kann sich die Art der Repräsentation ändern oder auch die Eigenschaften des dargestellten mathematischen Objekts (Variation).

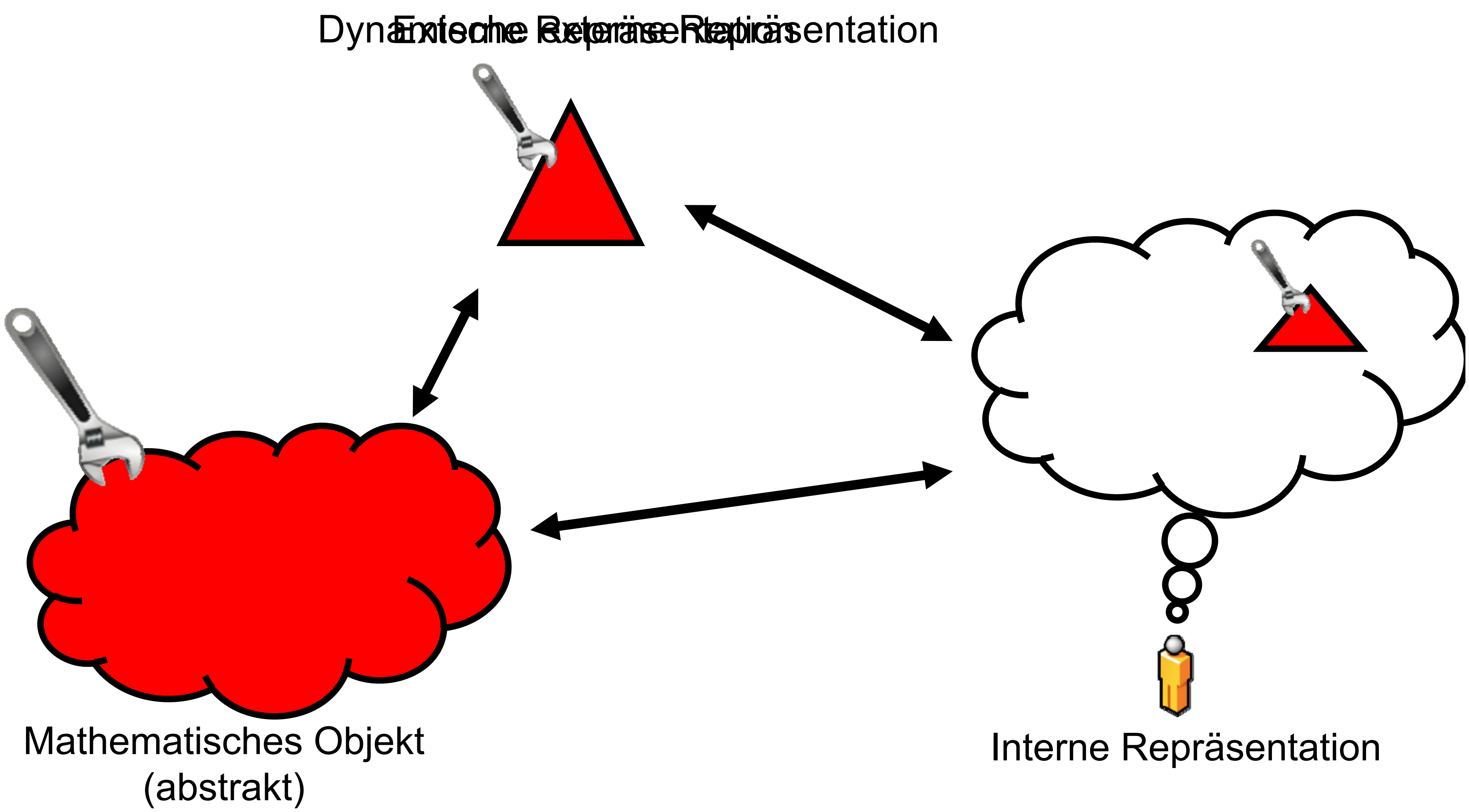
Taxonomie der Repräsentationen



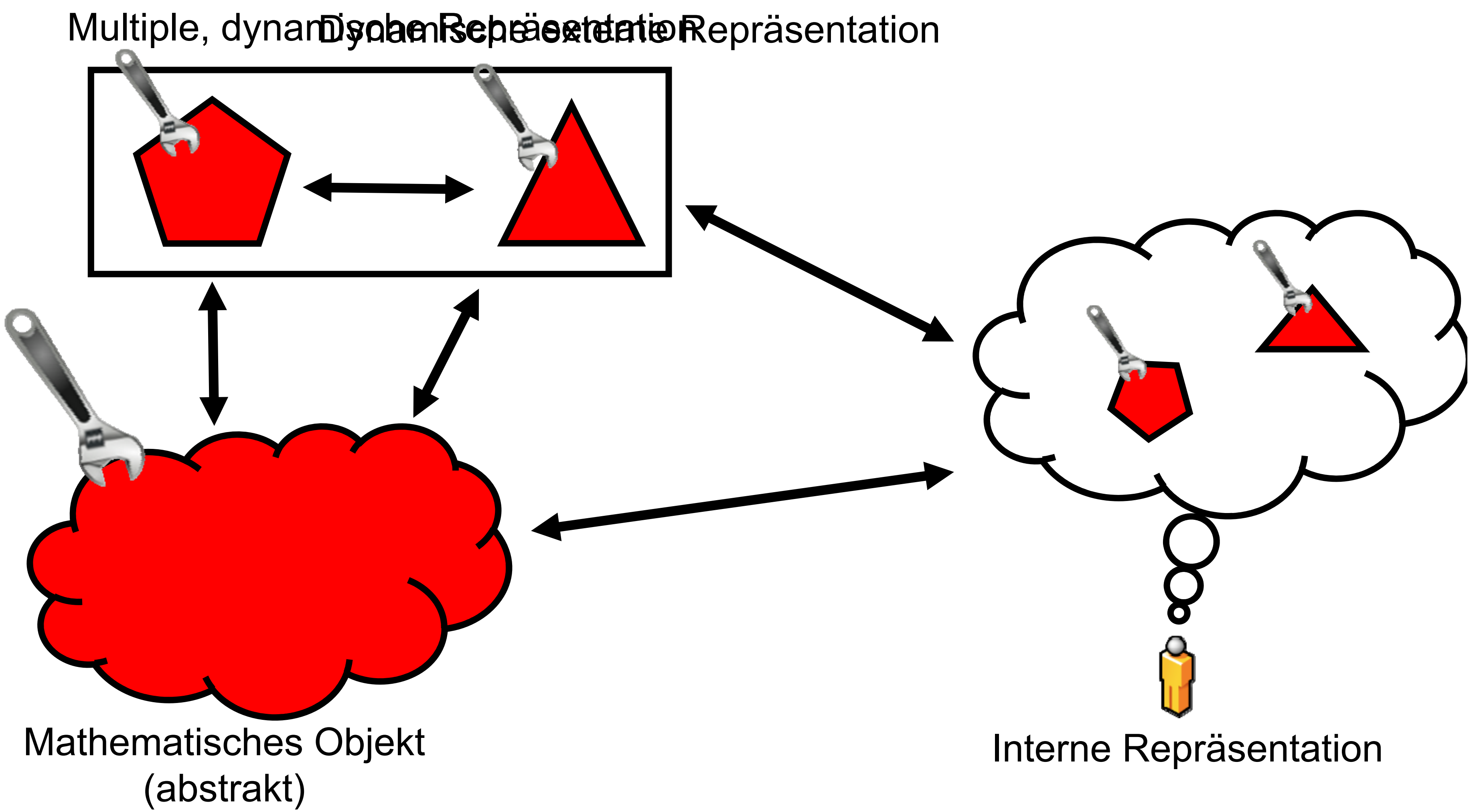
Taxonomie der Repräsentationen



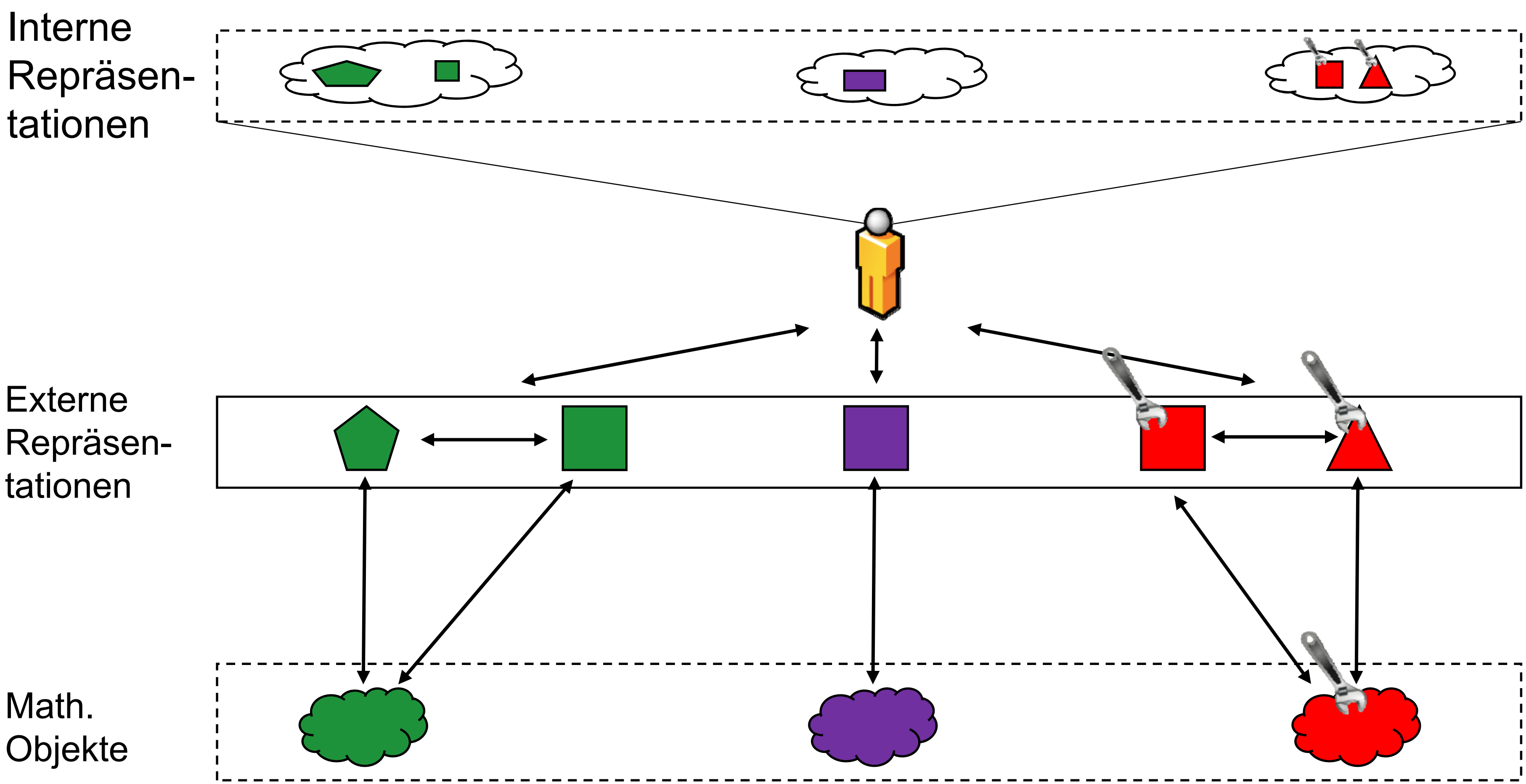
Taxonomie der Repräsentationen



Taxonomie der Repräsentationen



Taxonomie der Repräsentationen



Taxonomie der Repräsentationen

Multiple, statische Repräsentation	Multiple, dynamische Repräsentation
Isolierte, statische Repräsentation	Isolierte, dynamische Repräsentation

Multiplizität

Dynamik

Exkurs: Cognitive Load

Grundhypothese:

Die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses ist endlich. Wird sie überschritten, ist dies für das Lernen hinderlich.

Die Cognitive Load Theory (CLT) wurde Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre v.a. von John Sweller und Paul Chandler formuliert.

(Übersicht zur CLT bei de Jong (2010))

Exkurs: Cognitive Load

Arten von Cognitive Load:

- Intrinsic load (intrinsische Last)

  Last, die durch die subjektive Schwierigkeit des Lerngegenstands bedingt ist.

- Extraneous load (irrelevante / Fremdlast)

  Last, die durch das Lernmaterial hinzukommt und nicht zum Lernen beiträgt.

- Germane load (zugehörige / relevante Last)

  Last, die durch die kognitiven Prozesse entsteht, die beim Lernen selbst stattfinden.

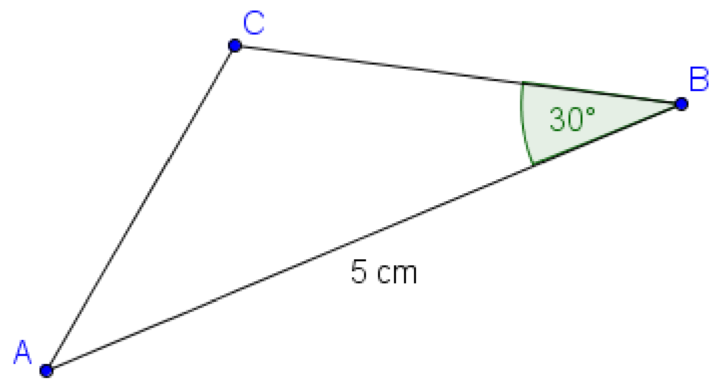
Exkurs: Cognitive Load

Einfluss der Repräsentation auf CL:

Scaife & Rogers (1996), S. 189

- „computational offloading“: bestimmte Informationen sind aus bestimmten Repräsentationen leichter abzulesen

„Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Winkel, der durch die Dreieckseiten bei B eingeschlossen wird, beträgt 30°. Die C gegenüber liegende Seite ist 5 cm lang.“



Exkurs: Cognitive Load

Einfluss der Repräsentation auf CL:

Scaife & Rogers (1996), S. 189

- „re-representing“: bestimmte Aufgaben sind mit manchen Repräsentationen einfacher, mit anderen schwieriger

LXVIII · X 68 · 10

Überlegungen aus der Literatur

Multiple Repräsentationen
(Ainsworth 2006)

- Ermöglichen umfassenderes, vernetzteres Bild von Mathematik
- Interaktionen der Teilrepräsentationen bieten vielfältige Lernmöglichkeiten
- Übersetzung zwischen und Verbindung von Repräsentationen schwierig
- Erhöhen cognitive load

Dynamische Repräsentationen

- Dynamik bietet zusätzliche Informationen durch Variation, insb. beim Argumentieren (Bender 1989)
- Dynamische externe führen zu dynamischen internen Repräsentationen (Roth 2005)
- Können cognitive load erhöhen (Schnotz 2002)

⇨ Es gibt Gründe *für und gegen* multiple oder dynamische externe Repräsentationen!

Fragen

Werden multiple und/oder dynamische Repräsentationen von Schülerinnen und Schülern in Argumentationen überhaupt genutzt?

Inwieweit beeinflusst die Art der in der Aufgabenstellung gegebenen Repräsentation die Repräsentationsarten, die in schriftlichen Schülerargumentationen verwendet werden?

Untersuchung: Versuchsdurchführung

Überblick:

- 89 Schülerinnen und Schüler
- Jahrgangsstufe 11
- Jeweils 4 Aufgaben
- Themenfeld: Funktionen
- 45 Minuten Bearbeitungszeit

Untersuchung: Versuchsdurchführung

Test A

Funktionenschar	Rechteck im Dreieck	Funktionenschar	Dreieck in Parabel
ISR	IDR	IDR	MDR

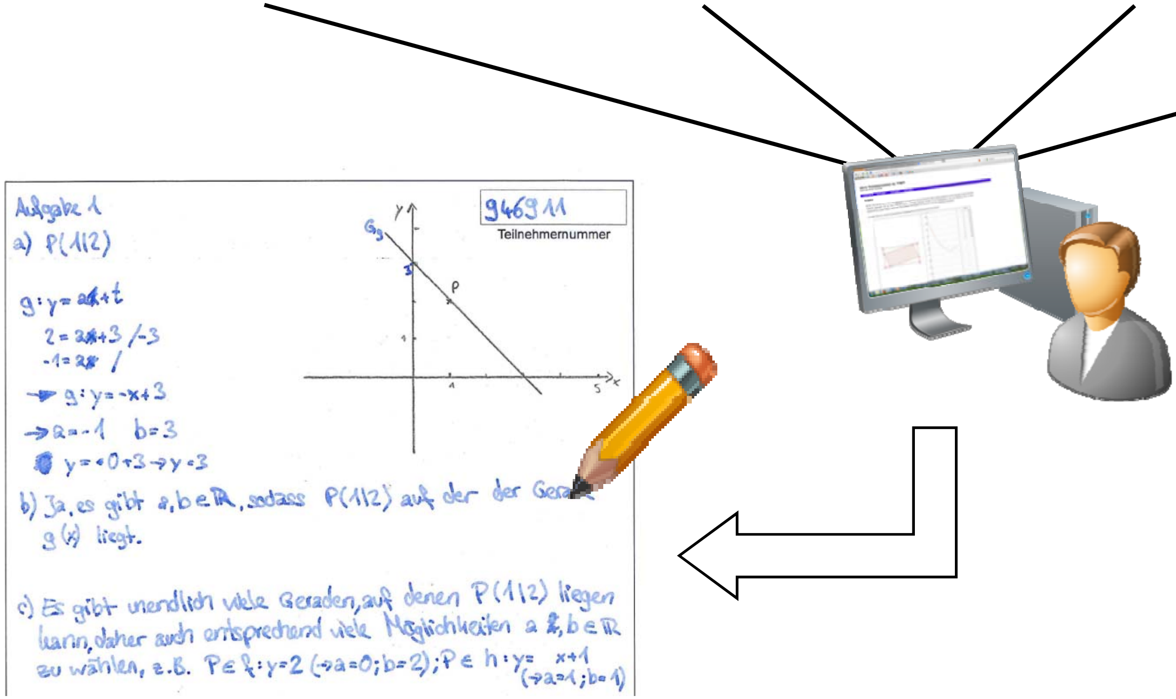
Test B

Gleichung	Polynomgraph	Gleichung	Sinusgraph
ISR	MSR	MSR	MDR

Untersuchung: Versuchsdurchführung

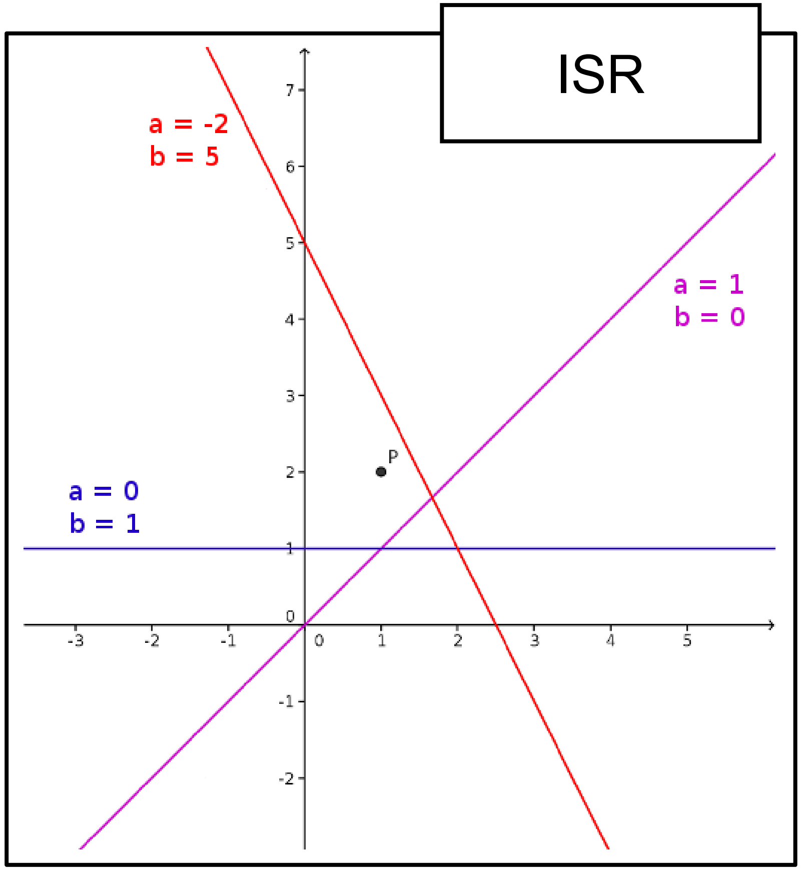
Test A

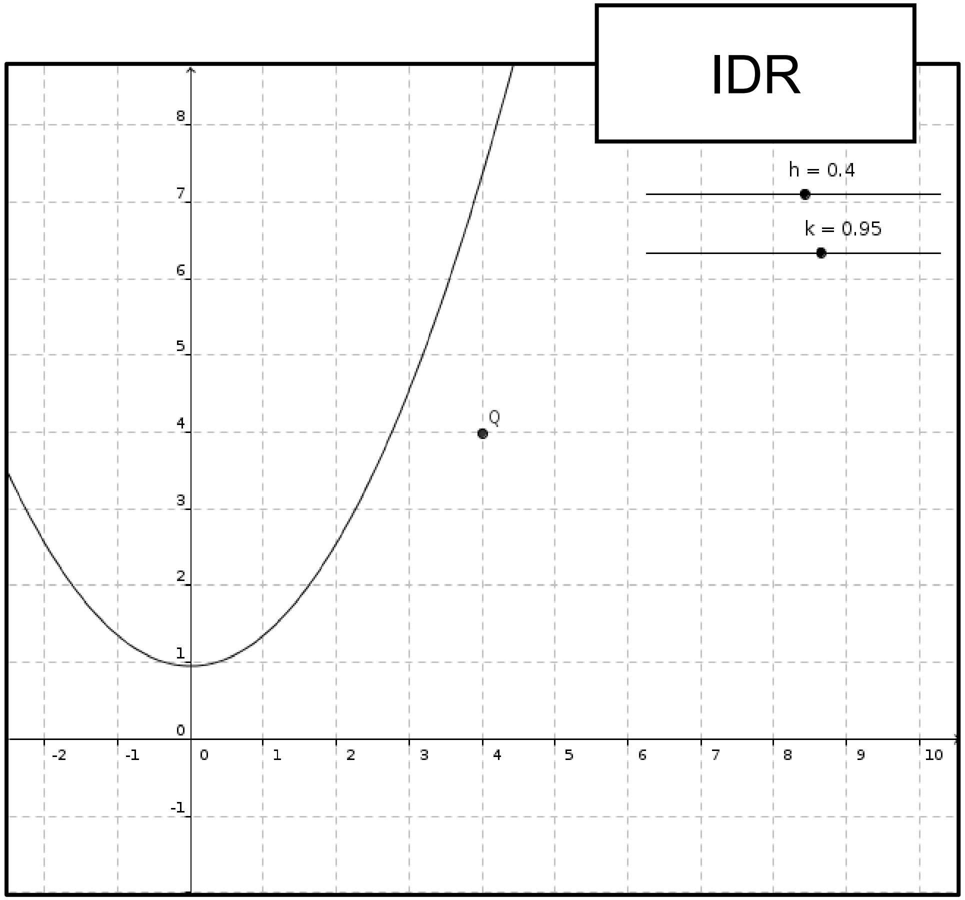
Funktionenschar	Rechteck im Dreieck	Funktionenschar	Dreieck in Parabel
ISR	IDR	IDR	MDR



Untersuchung: Auswertung

Aufgabenpaar: Funktionenschar





Untersuchung: Auswertung

Aufgabe 1

a) P(1|2)

$g: y = a\cancel{x} + t$

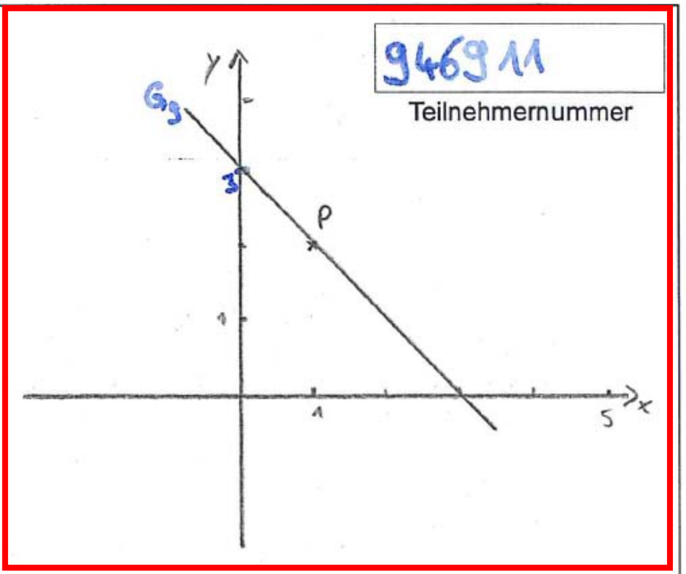
$2 = a\cancel{x} + 3 \quad / -3$

$-1 = a\cancel{x} \quad /$

$\rightarrow g: y = -x + 3$

$\rightarrow a = -1 \quad b = 3$

$y = \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3$



b) Ja, es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, sodass P(1|2) auf ~~der~~ der Gerade g(x) liegt.

Geg.: ISR

…s gibt unendlich viele Geraden, auf denen P(1|2) liegen kann, daher auch entsprechend viele Möglichkeiten a ~~x~~, $b \in \mathbb{R}$ zu wählen, z.B. $P \in f: y = 2$ ($\rightarrow a = 0; b = 2$); $P \in h: y = x + 1$ ($\rightarrow a = 1; b = 1$)

Untersuchung: Auswertung

Geg.: IDR

A3:

a) Ja, für $h = 0{,}2$ und $k = 0{,}75$

b) Man weiß ja, dass je ~~groß~~ kleiner h wird, desto breiter ist die Öffnung der Parabel.
Dann muss man nur noch die Parabel nach unten verschieben.

c) Ja, z. B. für $h = 0{,}3$ u. $k = -0{,}9$ oder
$h = 0{,}4$ u. $k = -2{,}5$ oder
$h = 0{,}05$ und $k = 3{,}2$
Es gibt mehrere Werte, weil egal um wie viel man die Parabel nach unten oder oben verschiebt, man kann die Öffung anpassen.
ABER: für $h = 0$ und $k = 4$ gibt es keine Parabel mehr, sondern eine Gerade.

d) Indem ich es verschoben habe
Da der Punkt Q die y-Koordinate 4 hat, sieht man, dass wenn $k = 4$ ist sich eine

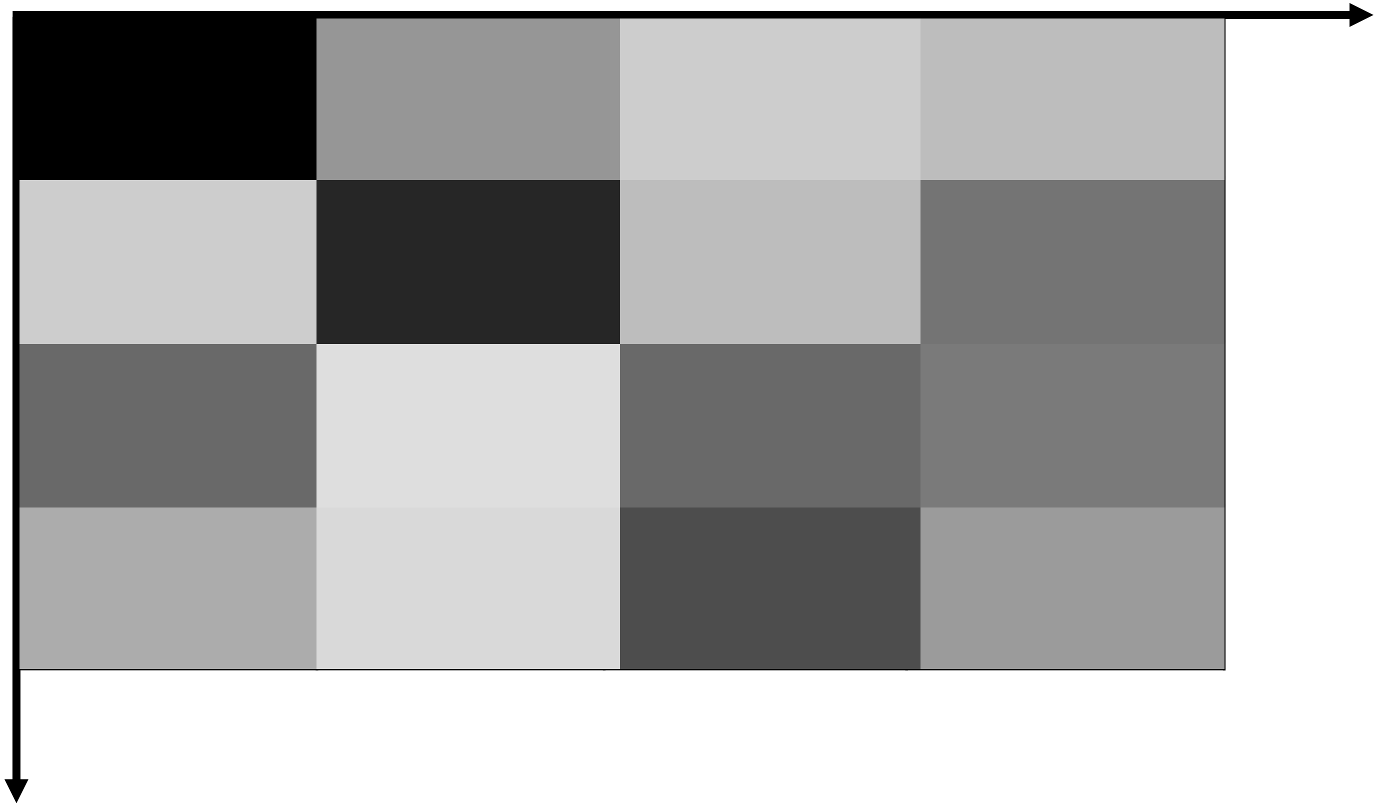
Untersuchung: Auswertung

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch
ISR Isoliert, statisch				
IDR Isoliert, dynamisch				
MSR Multipel, statisch				
MDR Multipel, dynamisch				

Merkmale der Argumente

Art der gegebenen Repräsentation

Untersuchung: Ergebnisse



Untersuchung: Ergebnisse

Aufgabenpaar: Funktionenschar (Verteilung)

	Stat. Arg.	Dyn. Arg	χ^2	Isol. Arg.	Mult. Arg.	χ^2
A1 (ISR)	13	30		25	18	
Anteil	0.30	0.70		0.58	0.42	
A3 (IDR)	3	39	4.48*	33	9	3.50
Erw. Hfgk.	12.70	29.30		24.42	17.58	

*$p < .05$

Untersuchung: Ergebnisse

Aufgabenpaar: Funktionenschar (Wechsler)

		A3 (IDR)				**A3 (IDR)**	
		Stat. Arg.	Dyn. Arg.			Isol. Arg.	Mult. Arg.
A1 (ISR)	Stat. Arg.	1	10	**A1 (ISR)**	Isol. Arg.	20	4
	Dyn. Arg.	2	28		Mult. Arg.	12	15
		$p < .05$				$p > .05$	

Untersuchung: Ergebnisse

Zusammenfassung:

		Verteilung		Wechsler	
		S → D	I → M	S → D	I → M
„Funktionen-schar“	A1/A3 ISR → IDR	*		*	
„Fläche als Parabel“	A2/A4 IDR → MDR	(**)		(*)	*
„Gleichungen“	B1/B3 ISR → MSR		**		***
„Symmetrie an Graphen“	B2/B4 MSR → MDR		(*)		(*)

Untersuchung: Interpretation

- Externe Repräsentationen besitzen Einfluss, insbesondere in Bezug auf „Wechsler“
- Einfluss bei Verteilung nicht so zielgerichtet wie „naiv“ erwartet
- Effekt besonderes stark bei B1/B3 (Gleichungen)

  ⟶ Vorkenntnisse, Metawissen (vgl. Renkl et al, 2013)
- Nebenwirkungen

Untersuchung: Interpretation

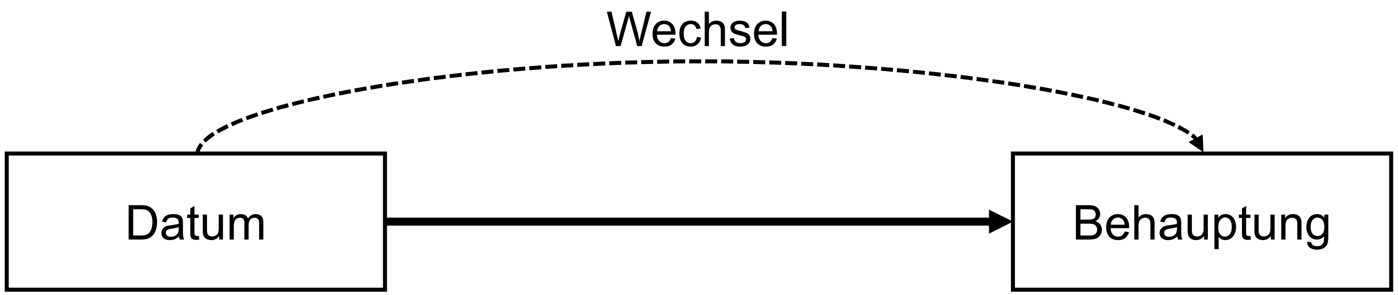
- Auffällig: besonders bei MDR unerwartete Ergebnisse
  - Cognitive Load?
  - Einfluss der Aufgabenstellung?
  - Einfluss der Platzierung der Aufgabe?

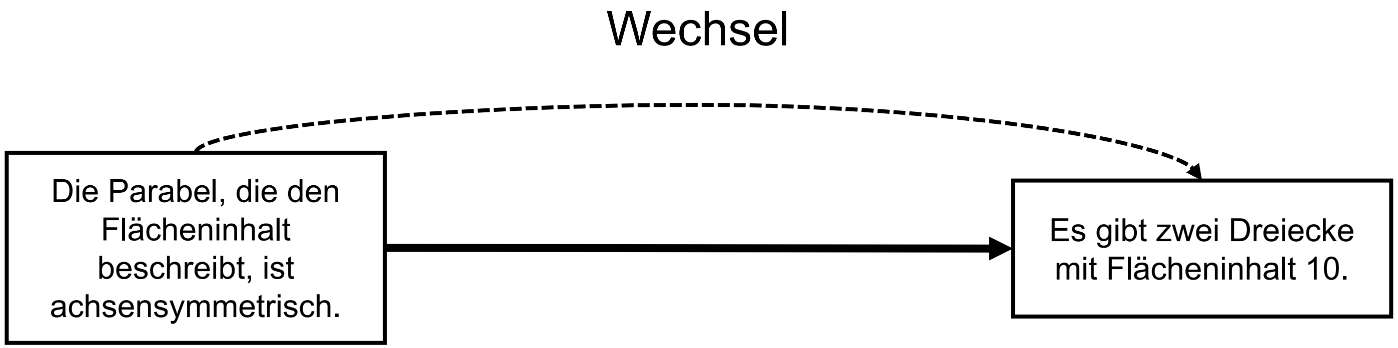
Untersuchung: qualitativ

- *Wie* wurden multiple und/oder dynamische Repräsentationen in Argumenten genutzt?
- Analyse der Argumente mit Toulmin-Schema
  - Wo spielen MER welche Rollen?
  - Wie und wozu werden Repräsentationswechsel vorgenommen?
  - Wo werden die Möglichkeiten von DER genutzt?
- Schwierigkeit: Geringe Explizität der Argumente

Untersuchung: qualitativ

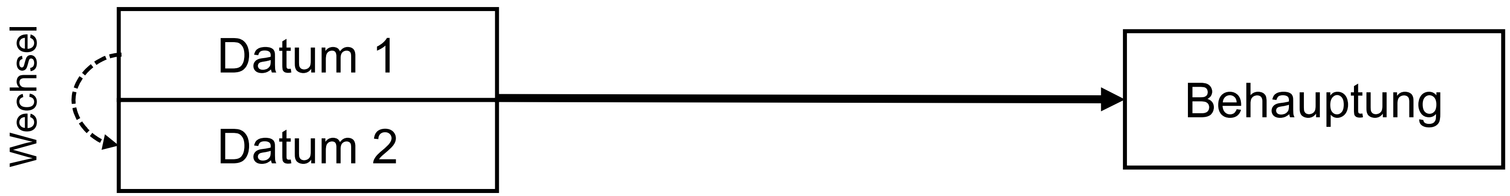
Häufigster Fall (multiple Rep.):

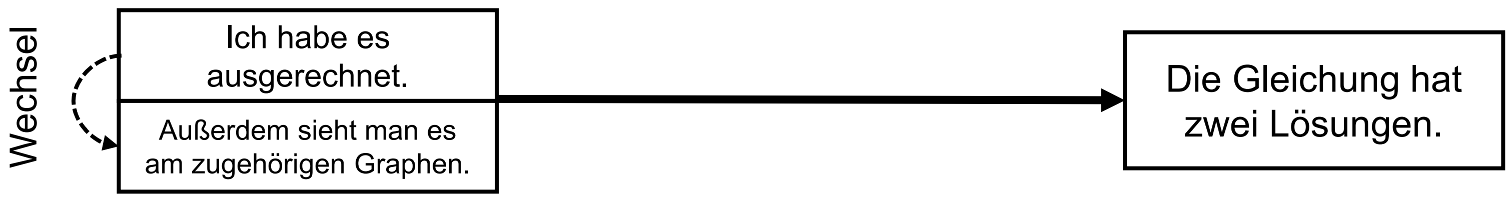




Untersuchung: qualitativ

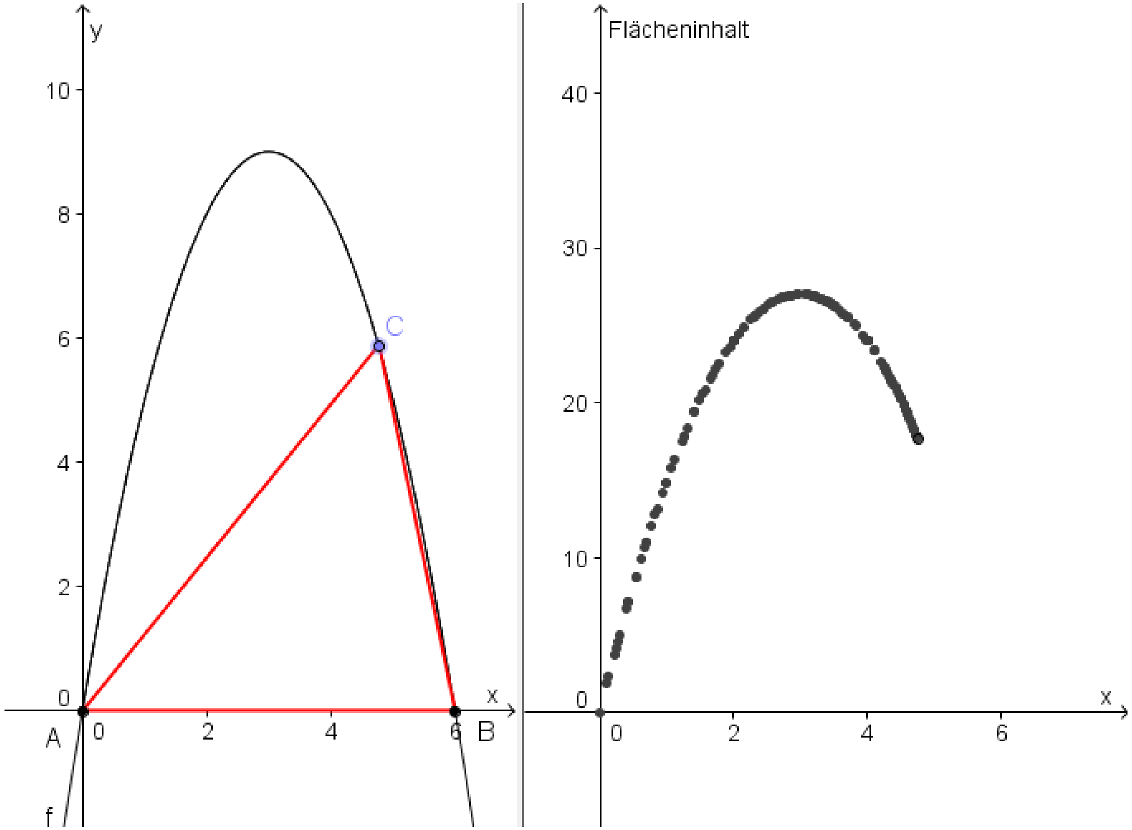
Mehrteiliges Datum:





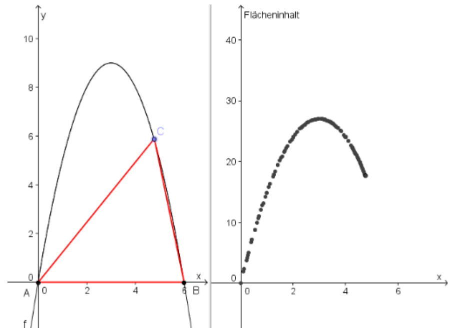
Untersuchung: qualitativ

Wechsel über Schlussregel



Untersuchung: qualitativ

Wechsel über Schlussregel



Die Parabel rechts hat zwei mal den y-Wert $\sqrt{47}$.

Es existieren zwei Dreiecke mit Flächeninhalt $\sqrt{47}$.

Zwei verschiedene x-Werte rechts entsprechen zwei verschiedenen Punkten C.

Schlussregel gibt nicht nur die Verbindung von Datum und Behauptung an …

… sondern auch die zwischen den genutzten Repräsentationen.

Vorschau: FördyRso

- Idee für eine Untersuchung zu dynamischen Repräsentationen und cognitive load
- **FördyRso** =
  „Förderung mit dynamischen Repräsen-tationen im sonderpädagogischen Umfeld“

Vorschau: FördyRso

- beim Arbeiten mit Repräsentationen werden häufig externe Repräsentation im Arbeitsgedächtnis umgeformt, um neue (interne) Repräsentationen zu erhalten
- dies verursacht cognitive load

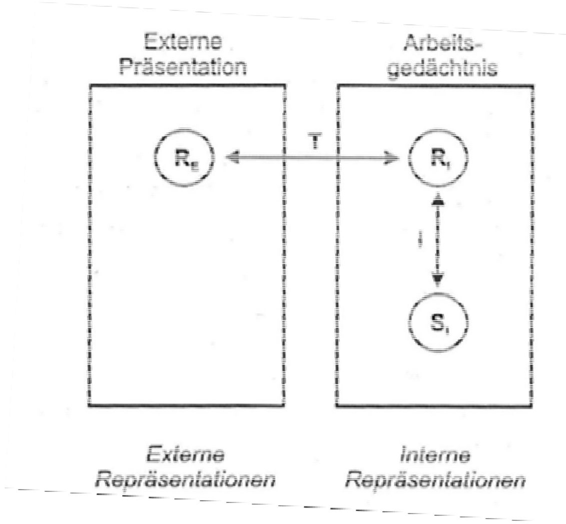


Abb. aus Vogel (2006)

Vorschau: FördyRso

- Grundprinzip von FördyRso: kognitive Prozesse werden mit Hilfe von digitalen Werkzeugen aus dem Arbeitsgedächtnis in eine *dynamische* externe Repräsentation verlagert (Supplantation)

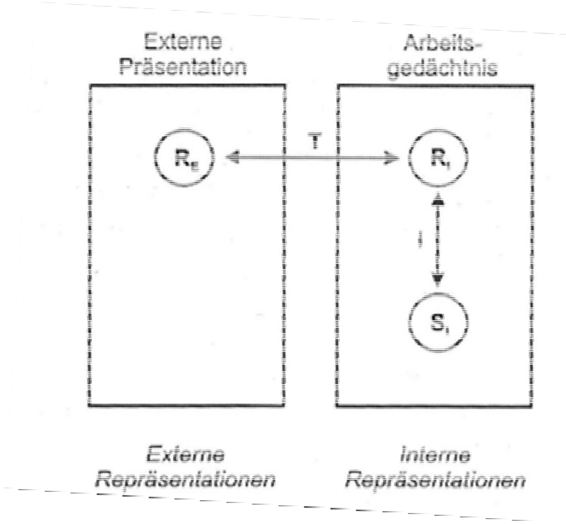
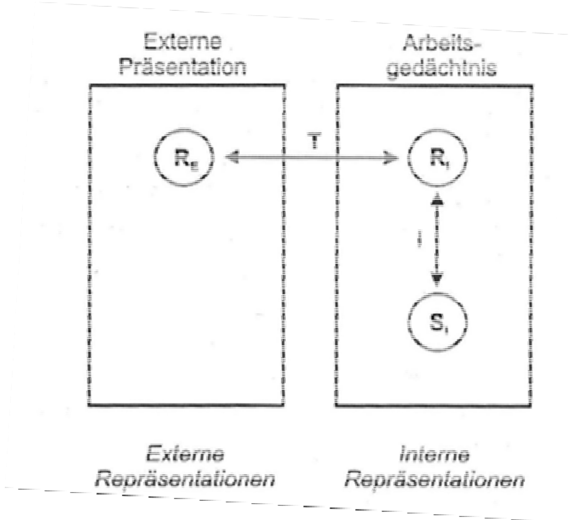


Abb. aus Vogel (2006)

Vorschau: FördyRso

- Menschen mit einer Lernbehinderung haben häufig eine deutlich geringere Kapazität des Arbeitsgedächtnisses (Mähler 2007)

⇨ Entlastung durch DER könnte cognitive overload verhindern



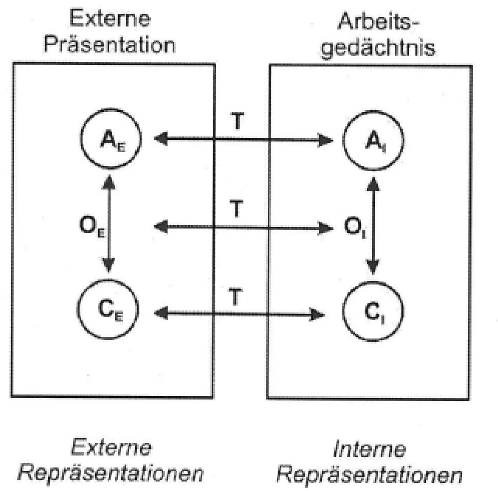


Abb. aus Vogel (2006)

Vorschau: FördyRso

Beispiel: Überschlagsrechnung

Runde zunächst und berechne einen Näherungswert. Rechne dann mit den genauen Zahlen.

$$24{,}89 - 16{,}95 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Vorschau: FördyRso

Beispiel: Überschlagsrechnung

Runde zunächst und berechne einen Näherungswert. Rechne dann mit den genauen Zahlen.

$$25 - 16{,}95 = \_\_\_\_\_\_\_$$

Vorschau: FördyRso

Beispiel: Überschlagsrechnung

Runde zunächst und berechne einen Näherungswert. Rechne dann mit den genauen Zahlen.

$$25 \ - 17 = \ \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Vorschau: FördyRso

Fragen

- Lässt sich eine solche Lernumgebung bei SuS mit Lernbehinderung einsetzen?
- Führt die angestrebte Verringerung des cognitive load zu einer Verbesserung oder Verschlechterung der Leistung in Situationen *ohne* digitale Lernumgebung?
- Wie muss die Lernumgebung hierfür geschaffen sein? Für welche Aufgaben ist dies möglich?

Vorschau: FördyRso

Ziele

- Spezielle Fördermöglichkeit für Kinder und Jugendliche mit Lernbehinderung
- Schaffen einer Möglichkeit zur Differenzierung in heterogenen Klassen

Quellen

Ainsworth, Shaaron (2006): DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. In: *Learning and Instruction* 16, S. 183–198.

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Hermann Kautschitsch und Wolfgang Metzler (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen*. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik“ in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988, S. 95–145.

Durand-Guerrier, Viviane; Boero, Paolo; Douek, Nadia; Epp, Susanna S.; Tanguay, Denis (2012): Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In: Gila Hanna und Michael de Villiers (Hg.): Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study. Dordrecht: Springer Netherlands (New ICMI Study Series, 15), S. 349–367.

Jong, Ton de (2010): Cognitive load theory, educational research, and instructional design: some food for thought. In: *Instr Sci* 38 (2), S. 105–134. DOI: 10.1007/s11251-009-9110-0.

Mähler, Claudia (2007): Arbeitsgedächtnisfunktionen bei lernbehinderten Kindern und Jugendlichen. In: Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie 39 (2), S. 97–106. DOI: 10.1026/0049-8637.39.2.97.

Pedemonte, Bettina (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analysed? In: *Educ Stud Math* 66 (1), S. 23–41. DOI: 10.1007/s10649-006-9057-x.

Quellen

Renkl, Alexander; Berthold, Kirsten; Grosse, Cornelia; Schwonke, Rolf (2013): Making Better Use of Multiple Representations: How Fostering Metacognition Can Help. In: Roger Azevedo und Aleven, Vincent A. W. M. M (Hrsg.): *International handbook of metacognition and learning technologies*. New York, NY: Springer (Springer international handbooks of education, 26), S. 397–408.

Roth, Jürgen (2005): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Schnotz, Wolfgang (2002): Enabling, facilitating, and inhibiting effects in learning from animated pictures. In: International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning. Tübingen. Online verfügbar unter http://www.iwm-kmrc.de/workshops/visualization/schnotz.pdf, zuletzt geprüft am 19.08.2013.

Vogel, Markus (2006): Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Wittmann, Gerald (2009): Beweisen und Argumentieren. In: Hans-Georg Weigand (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe), S. 35–53.

Bildnachweis

Das Bild des TI-Nspire auf Folie 7 ist lizenziert unter CC-BY-SA von Jörg Wörner, entnommen bei Wikimedia Commons.

Der Computer auf Folie 20 ist lizenziert als gemeinfrei, nicht kommerziell von gakuseiSean.

Der Stift auf Folie 20 ist lizenziert als Freeware von PixelMixer.

Vielen Dank für
Ihre Aufmerksamkeit!