

Einfach berührend – Kreise und Kugeln einpassen

Markus Ruppert

Weiterführende Berührprobleme im Raum

Nach den Überlegungen zu elementaren Abstandskonstruktionen im Raum, sind die Schüler nun in der Lage, verschiedene Anwendungsprobleme zu diskutieren. So können z. B. Kunstwerke oder historische Abbildungen, die Anwendung von kugelförmigen Messköpfen bei der Bestimmung von Gewindemaßen oder die Bewegung einer Kugel beim Rollen auf einer Schiene betrachtet werden (Abb. 1)

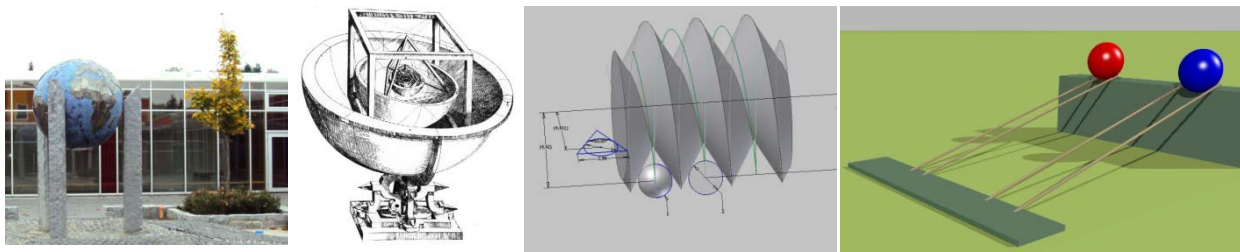


Abb. 1: Anwendungen für Berührkugelprobleme

Brunnen der Grundschule Dorfen (links), J. Keplers Darstellung des Sonnensystems durch platonische Körper (2.v.l.), Anwendung von kugelförmigen Messköpfen bei der Bestimmung von Gewindemaßen (3. v. l.), Bewegung einer Kugel beim Rollen auf einer Schiene (rechts)

Es können aber auch weiterführende Überlegungen angestellt werden, die an die im Artikel betrachteten Problemstellungen anknüpfen. Einige Möglichkeiten hierzu werden im Folgenden vorgestellt.

Berührkreise am Dreieck – Berührkugeln am Tetraeder

Für ein Dreieck $\Delta P_1P_2P_3$ wissen die Schüler, dass es genau einen Kreis gibt, der alle Eckpunkte berührt – den Umkreis. Sie wissen außerdem, dass sich der Mittelpunkt des Umkreises mit Hilfe der ebenen Grundkonstruktion **(EGK1)** als Schnittpunkt der mittelsenkrechten Geraden ergibt und können dies auch beweisen. Obige Analogiebetrachtungen liefern für einen Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ nun sofort die folgende Vermutung:

Die (sechs) mittelsenkrechten Ebenen eines Tetraeders schneiden sich alle in einem Punkt. Dies ist der Umkugelmittelpunkt des Tetraeders.

Besonders interessant ist an dieser Stelle, dass sich nicht nur die Hypothese sondern auch der Beweis der Hypothese analogisieren lässt, der letztlich auch die Analogisierung des Konstruktionsverfahrens im obigen Sinne rechtfertigt.

Den Schülern ebenfalls bekannt ist der Inkreis eines Dreiecks, der die Seiten des Dreiecks (von Innen) berührt. Sein Mittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der (innen)winkelhalbierenden Geraden des Dreiecks. Die Analogisierung gelingt jedoch an dieser Stelle nicht so mühelos. Ist nämlich „die Inkugel“ eines Tetraeders gesucht, so ist zunächst zu klären, ob eine Kugel gesucht ist,

- die alle Flächen des Tetraeders von innen berührt, oder
- die alle Kanten des Tetraeders von innen berührt.

In beiden Fällen ist – für die Konstruktion eines potenziellen Inkugelmittelpunkts – der Begriff der Winkelhalbierenden zu analogisieren. Im ersten Fall muss für alle sechs Seitenflächenpaare die (innen)winkelhalbierende Ebene konstruiert werden. Es ergibt sich die folgende Vermutung, die wieder analog zum ebenen Fall bewiesen werden kann:

Die sechs winkelhalbierenden Ebenen der Seitenflächen eines Tetraeders schneiden sich alle in einem Punkt. Dies ist der Inkugelmittelpunkt des Tetraeders.

Im zweiten Fall (hier hat sich der Begriff der *Kantenkugel* eingebürgert), muss für alle zwölf Kantenpaare die winkelhalbierende Ebene konstruiert werden. Man kann folgende notwendige Bedingung zeigen:

Besitzt ein Tetraeder eine Kantenkugel, so ist die Summe gegenüberliegender Kantenlängen gleich.



Abb. 2: Inkugel und Kantenkugel eines Tetraeders

In der Abbildung 2 erkennt man, dass sich mit der Tangentialeigenschaft (vgl. Kasten 2, S. 44 in diesem Heft) für die Summe gegenüberliegender Kanten stets $a + b + c + d$ ergibt. Diese Bedingung erweist sich sogar als hinreichend (vgl. z.B. Fritsch, 1983).

Aus der ebenen Geometrie lassen sich diese Überlegungen vollkommen analog bei der Charakterisierung von (ebenen) Tangentenvierecken finden. Es wird hier besonders deutlich, dass das Bilden einer Analogie immer von den betrachteten Attributen und Beziehungen der beteiligten

Objekte abhängt. Wurde der Tetraeder eben noch als natürliches dreidimensionales Analogon zum Dreieck bezeichnet, tritt er hier als Analogon zum Tangentenviereck auf.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass Analogieüberlegungen im Wechselspiel zwischen ebener und räumlicher Geometrie zwar besonders fruchtbar eingesetzt werden können, dass aber auch hier für einen Analogieschluss stets gilt: „Ein Analogieschluss beweist nichts. (...) Ob eine aus einem Analogieschluss gewonnene Aussage richtig ist, muss also erst überprüft bzw. bewiesen werden“ (Heinrich, 2006).

Das Reuleaux-Tetraeder ist kein Gleichdick!

Ein besonders schönes Beispiel für einen fehlerhaften Analogieschluss liefert die Betrachtung von Reuleaux-Dreieck und Reuleaux-Tetraeder, von denen die ebene Variante ein „Gleichdick“ ist, die räumliche Variante hingegen nicht (vgl. K. Appell, S. 24 in diesem Heft).

Dass es sich bei dem Reuleaux-Tetraeder nicht um ein Gleichdick handelt lässt sich leicht nachweisen:

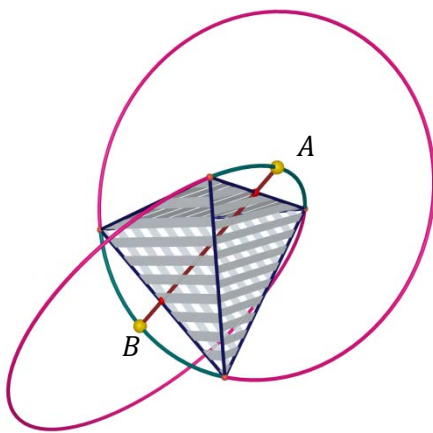


Abb. 3: Räumliche Situation

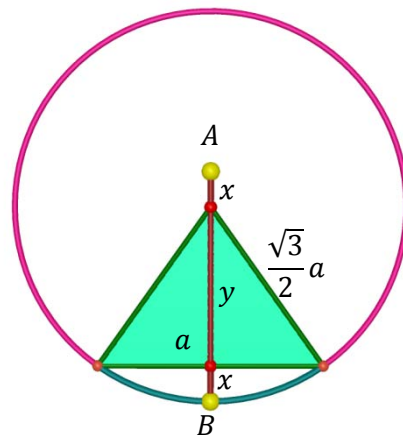


Abb. 4: Die Ebene des rechten Kreises (aus Abb.3) als Schnittebene

Zur Erinnerung:

Das Reuleaux-Tetraeder entsteht, ganz analog zum Reuleaux-Dreieck, durch Oberflächenteile der Kugeln mit der Kantenlänge des Tetraeders als Radius und dessen Eckpunkten als Mittelpunkte.

In Abb. 3 werden zwei Schnittkreise dieser Kugeln dargestellt. Die maximale Entfernung zweier Punkte auf diesen „Kanten“ des Reuleaux-Tetraeders (hier: $\overline{AB}$) ist größer als die Kantenlänge des Tetraeders, wie die folgenden Überlegungen zeigen (In Abb. 4 ist dazu der Schnitt der Figur aus Abb. 3 in der Ebene eines dieser Kreise gezeigt):

Kantenlänge des Tetraeders: a

Gesucht: $d(A; B) = 2x + y$

$$(1) \quad y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$(2) \quad x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}a - x$$

Gleichsetzen liefert:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a - x \quad \Rightarrow \quad x = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\frac{a}{2}$$

Insgesamt:

$$d(A; B) = 2x + y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})a + \frac{\sqrt{2}}{2}a = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a \approx 1,025a$$

Das Reuleaux-Tetraeder ist also kein Gleichdick!

Kugelpackungen

Neben den gemeinsamen Berührungskugeln von Punkten, Geraden und Ebenen könnte man z. B. auch die Lage gemeinsamer Berührungskugeln zweier Kugeln (mit verschiedenen großen Radien) betrachten. In der Ebene werden analoge Probleme von J. Wörl (ab S. 57, dieses Heft) beschrieben. Auch für derartige Probleme gelingt eine Übertragung auf das entsprechende räumliche (Packungs)problem mittels geeigneter Analogiebildung. Als Ortskurven der gesuchten Mittelpunkte treten so z. B. Hyperboloiden auf.

Literatur

Fritsch, R. (1983): Merkwürdige Kugeln am Tetraeder, Teil 1. In Didaktik der Mathematik, S. 262-269.
 Heinrich, F. (2006) Analogiebildung in der Mathematik und im Mathematikunterricht. Der Mathematikunterricht, 52 (6). S. 2-4.

Abbildungen

Abbildung 1: „Brunnen der GS Dorfen“ mit freundlicher Genehmigung der Gemeinde Dorfen
 „Keplers Sonnensystem“
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/Kepler-solar-system-1.png>
 „Gewindemessung“
<http://ww3.cad.de/foren/ubb/uploads/Doc+Snyder/Gewinde-Kugel-Zylinder-071112.JPG>
 „Kugelbahn“ <http://physikaufgaben.de/bild/a705.jpg>

Abbildungen 2-4: selbst erstellt