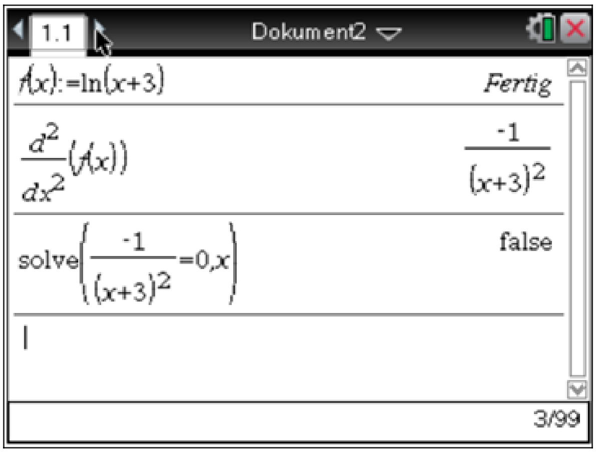
Anlage 1

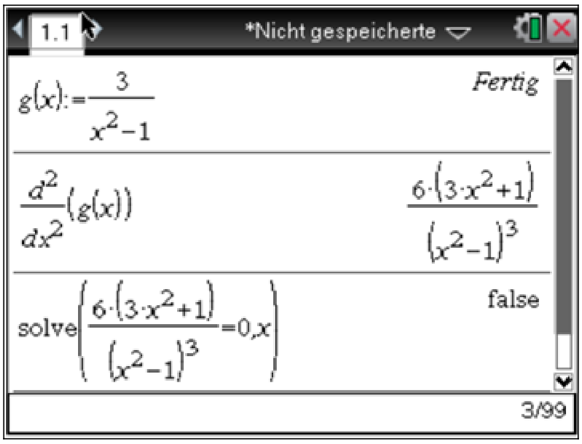
Die Abiturprüfung 2012 – Analyse von Schülerlösungen Dokumentiert von Pascal Rausch im Rahmen seiner Hausarbeit im Fach Mathematik an der Universität Würzburg

1. Analysis – Aufgabengruppe I – Teil 1

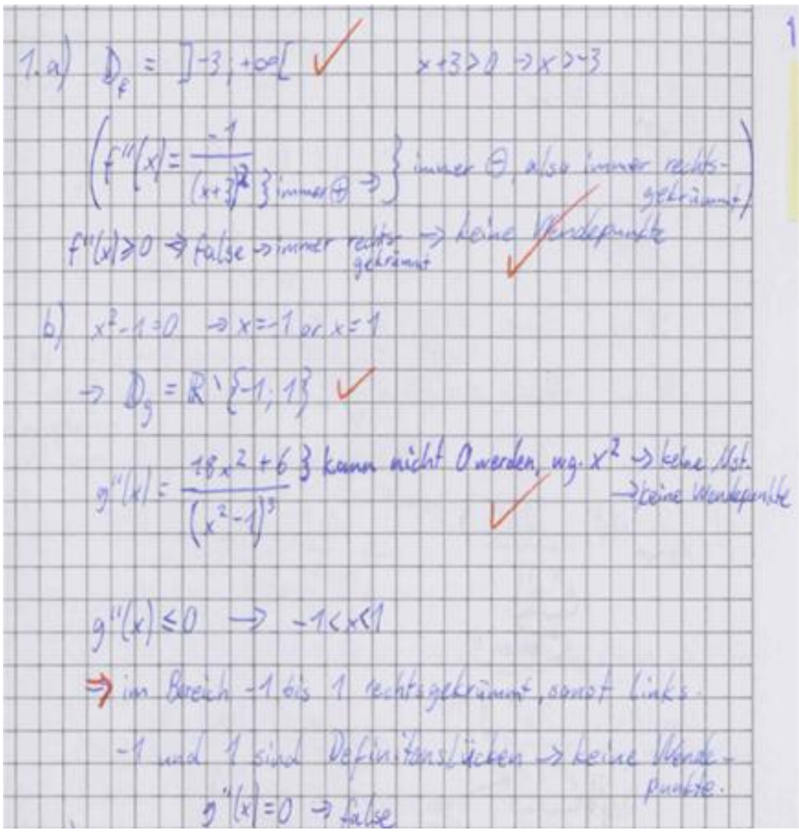
a) Aufgabe 1a) b)

Aufgabe 1 a): $f(x) = \ln(x+3)$ Aufgabe 1 b): $g(x) = \frac{3}{x^2-1}$





b) Schülerlösungen von Aufgabe 1 a) b)



1

1.a) $D_f =]-3;+\infty[$ ✓ $x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$\left(f''(x) = \frac{-1}{\underbrace{(x+3)^2}_{\text{immer} \oplus}} \Rightarrow \right\}$ immer $\ominus$, also immer rechts-gekrümmt$)$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ false $\rightarrow$ immer rechts gekrümmt $\rightarrow$ keine Wendepunkte ✓

b) $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1$ or $x=1$

$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ ✓

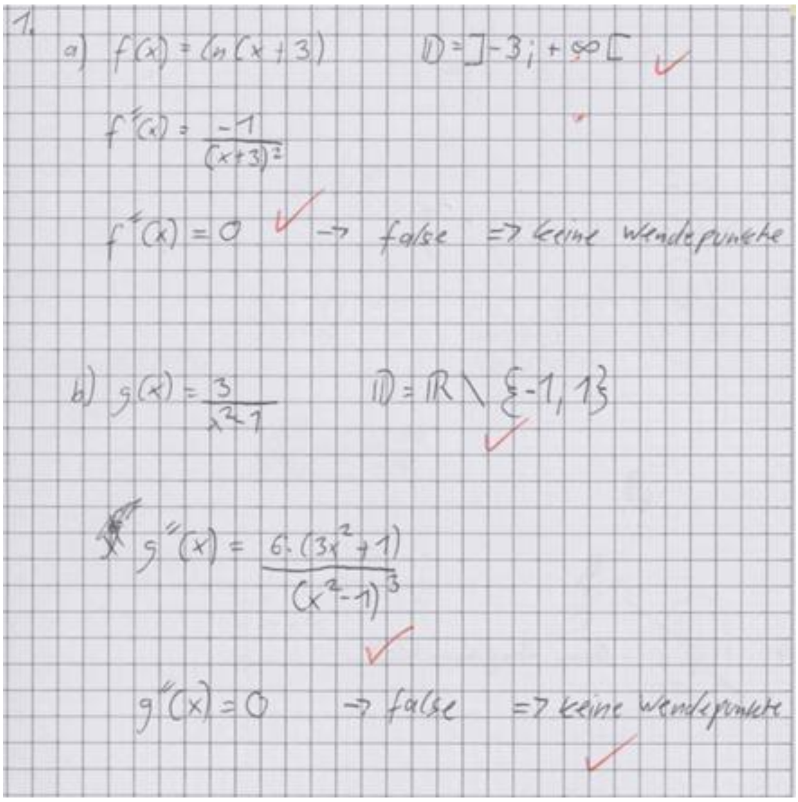
$g''(x) = \frac{18x^2+6}{(x^2-1)^3}$ } kann nicht 0 werden, wg. x^2 $\rightarrow$ keine Nst. $\rightarrow$ keine Wendepunkte ✓

$g''(x) \leq 0 \rightarrow -1<x<1$

$\Rightarrow$ im Bereich -1 bis 1 rechtsgekrümmt, sonst links.

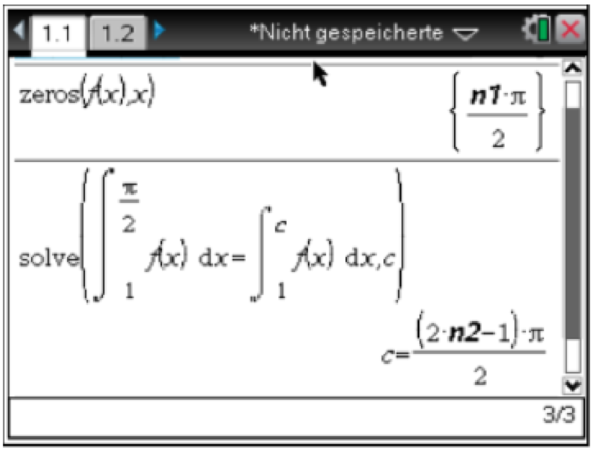
-1 und 1 sind Definitionslücken $\rightarrow$ keine Wendepunkte.

$g''(x)=0 \rightarrow$ false

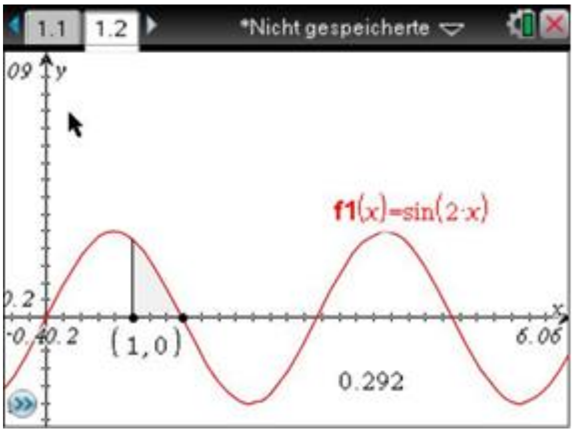


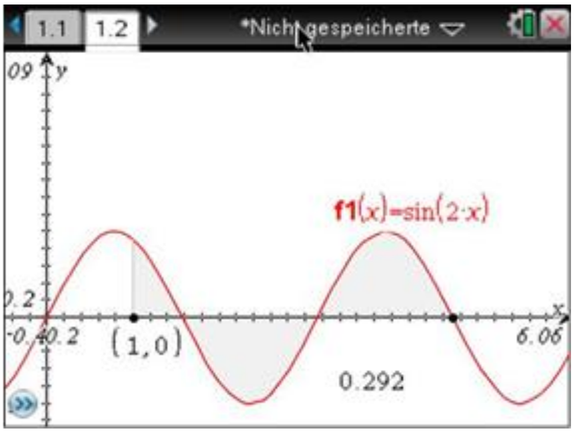
c) Aufgabe 3 b) $f_a : x \to sin(a \cdot x)$

Zuerst wurde die Funktion mit $f(x) := \ sin(2x)$ definiert. Durch den Befehl *zeros()* lassen sich die Nullstellen berechnen. Diese werden durch *n1* ∈ IN ausgedrückt. Die kleinste Nullstelle, welche größer 1 war, konnte auf Papier mit $n1 = 1$ gelöst werden.



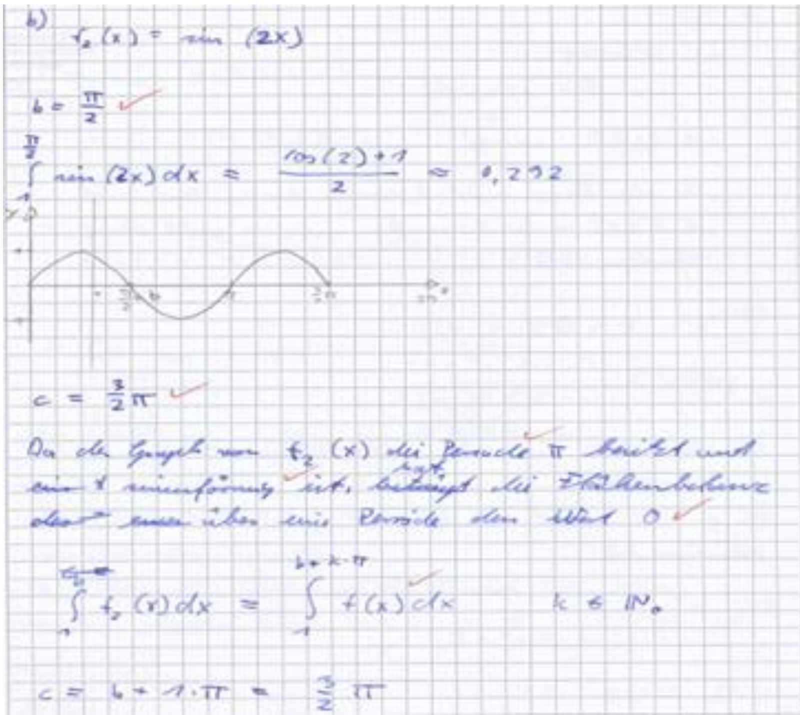
Daraus ergab sich die obere Grenze des vorderen Intergrals zu $b = \frac{\pi}{2}$ und durch *solve()* eine Lösung für c. Eine weitere Variable von der gleichen Art wie *n1* war *n2* und mit $n2 = 2$ galt die Vorgabe $c = \frac{3\pi}{2} > \frac{\pi}{2} = b$. Für die Begründung anhand des Graphen sollten die beiden Integrale und deren Flächen betrachtet werden. Diese hatten mit 0.292 den gleichen Wert, obwohl beide Flächen (grau hinterlegt) unterschiedlich groß waren.





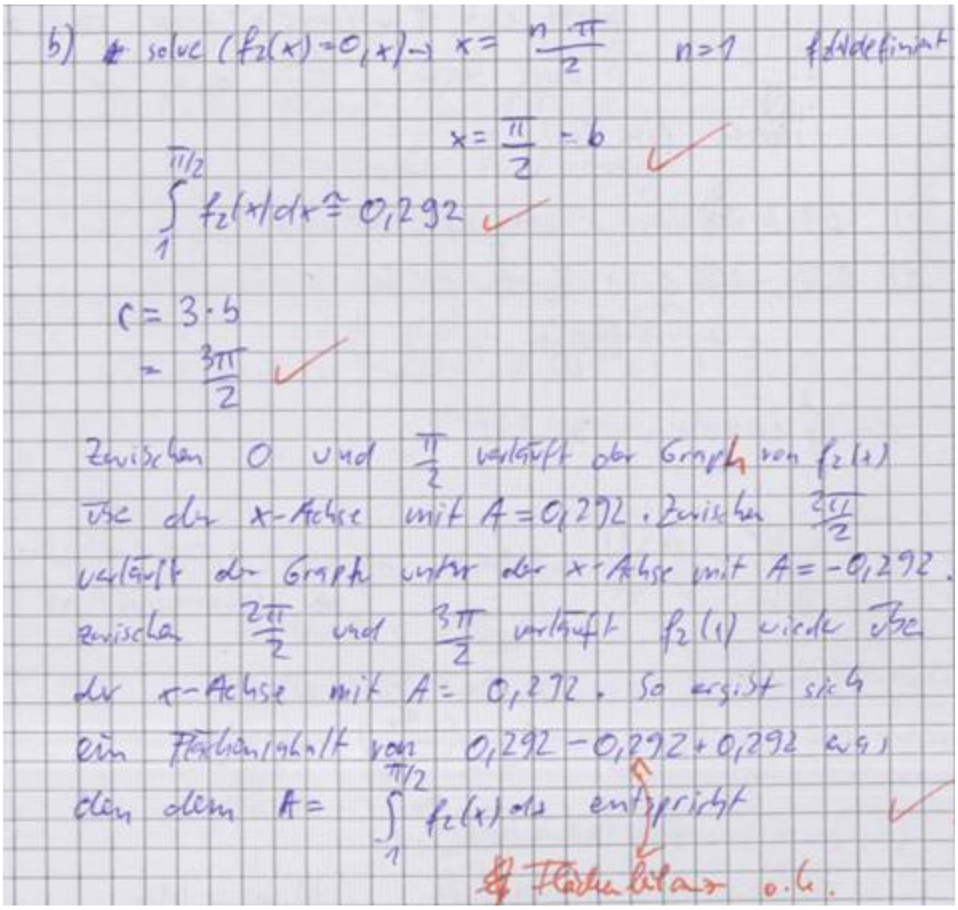
d) Schülerlösungen Aufgabe 3

Die folgende Abbildung zeigt eine Schülerlösung, bei dem keine CAS-Befehle bei den Lösungen auftraten. Hier lässt sich die Benutzung des Rechners nur erahnen, denn die Variablen *b* und *c* werden notiert, als wären diese gegeben gewesen. Die Skizze und die Begründung in Textform sind allerdings richtig, was auf ein gutes Verständnis des Schülers schließen lässt.



Die nächste Abbildung verdeutlicht die Handhabung des CAS-Rechners z. B. beim Befehl *solve()* in der ersten Zeile. Die Begründung in Textform besitzt zwar den richtigen Ansatz, führt diese aber nur ungenügend aus. Man erhält einen Integralwert zwischen 1 und $\frac{\pi}{2}$, wobei in der ausgeführten Begründung der Integralwert für jede Fläche zwischen zwei

Nullstellen verwendet wird. An dieser Stelle ist es allerdings schwer nachzuvollziehen, wie die Schülerin oder der Schüler auf diese Lösung gekommen ist. Die Dokumentation des CAS-Rechners ist an dieser Stelle nicht ausreichend. Es ist wohl so, dass die Schülerin oder der Schüler zu Beginn die Graphen mit dem CAS-Rechner visualisiert und die Periodizität erkannt hat, allerdings die durch die Integrationsgrenzen festgesetzte Integrationsfläche nicht berücksichtigte. Er/Sie ist vermutlich von drei gleich großen Flächen ausgegangen, da der CAS-Rechner trotz größerer Integrationsgrenzen das gleiche Ergebnis lieferte.


b) solve$(f_2(x)=0,x) \rightarrow x = \frac{n \cdot \pi}{2}$ $n=1$

$x = \frac{\pi}{2} = b$

$\int_1^{\pi/2} f_2(x)\,dx \mathrel{\hat=} 0{,}292$

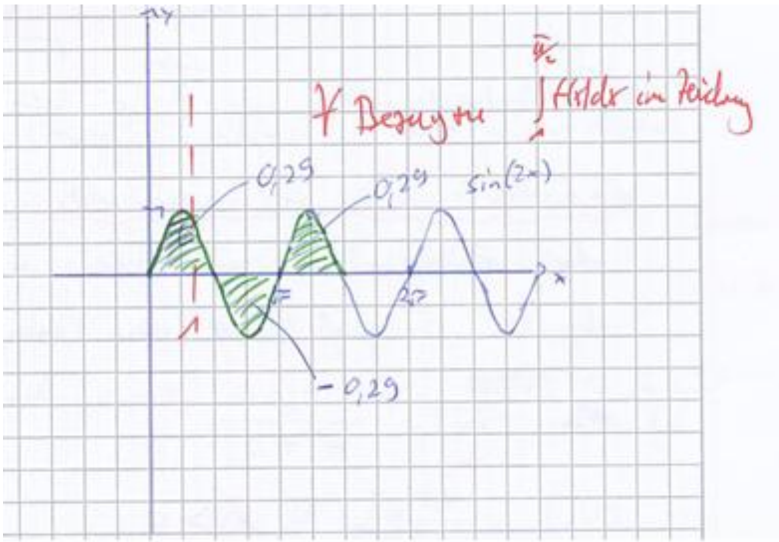
$c = 3 \cdot b = \frac{3\pi}{2}$

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ verläuft der Graph von $f_2(x)$ über der x-Achse mit $A = 0{,}292$. Zwischen $\frac{3\pi}{2}$ verläuft der Graph unter der x-Achse mit $A = -0{,}292$. Zwischen $\frac{2\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ verläuft $f_2(x)$ wieder über der x-Achse mit $A = 0{,}292$. So ergibt sich ein Flächeninhalt von $0{,}292 - 0{,}292 + 0{,}292$ was dem $A = \int_1^{\pi/2} f_2(x)\,dx$ entspricht

Flächenbilanz o.k.

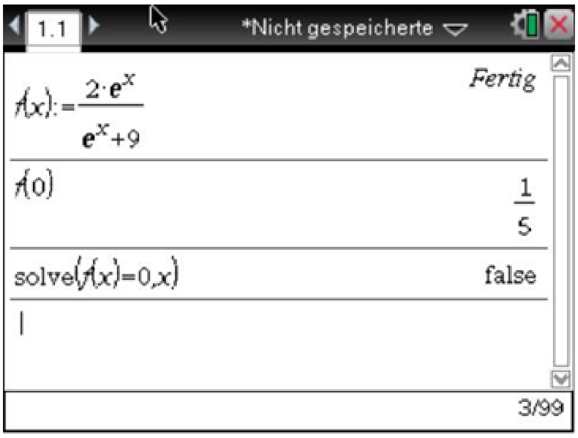
Diese Fehlvorstellung zeigte sich offensichtlich ebenfalls in einer weiteren Lösung, was anhand einer falschen Skizze belegt werden kann. Begründet wurde das im vorliegenden Fall durch die folgende Skizze:

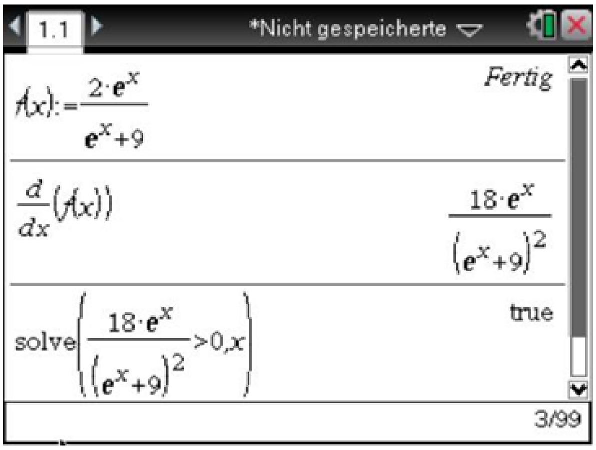
> „Am Graphen kann man es dadurch sehen, dass die Fläche $\int_1^b f_2(x)\,dx$ genau so groß ist wie die Fläche von $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_2(x)\,dx$ somit ist die Flächenbilanz von $\int_1^{\pi} f_2(x)\,dx = 0$, da die Fläche $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_2(x)\,dx$ negativ ist. Wählt man $\frac{3\pi}{2}$ als Obergrenze beträgt, die Flächenbilanz des Integrals $\int_1^{\frac{3\pi}{2}} f_2(x)\,dx$ wieder 0.29, somit ist die Vorgabe erfüllt dass $\int_1^b f_2(x)\,dx = \int_1^c f_2(x)\,dx$ gelten muss“ (interne Quelle).

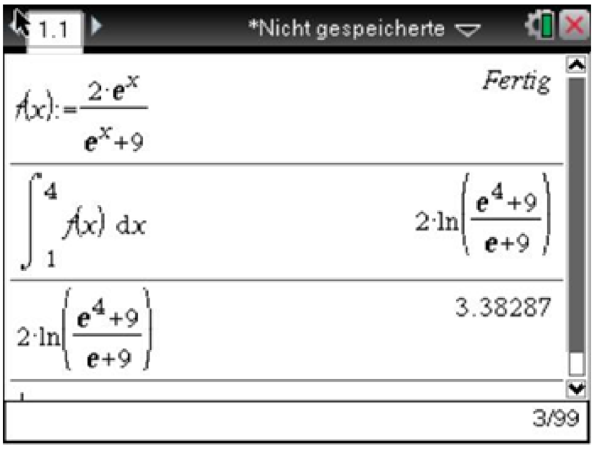


2. Analysis – Aufgabengruppe I – Teil 2

a) Aufgabe 1 $\quad f: x \to \frac{2e^x}{e^x+9}$

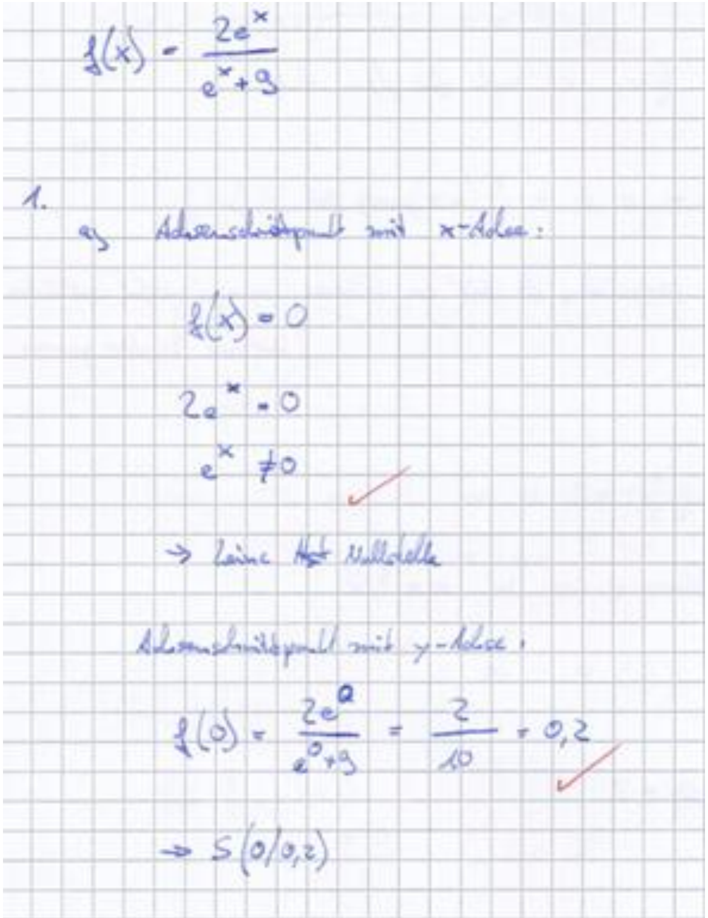






b) Aufgabe 1 a)

Die folgende Abbildung zeigt eine ‚rechnerische' Lösung,



$f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9}$

1.

a) Achsenschnittpunkt mit x-Achse:

$f(x) = 0$

$2e^x = 0$

$e^x \neq 0$

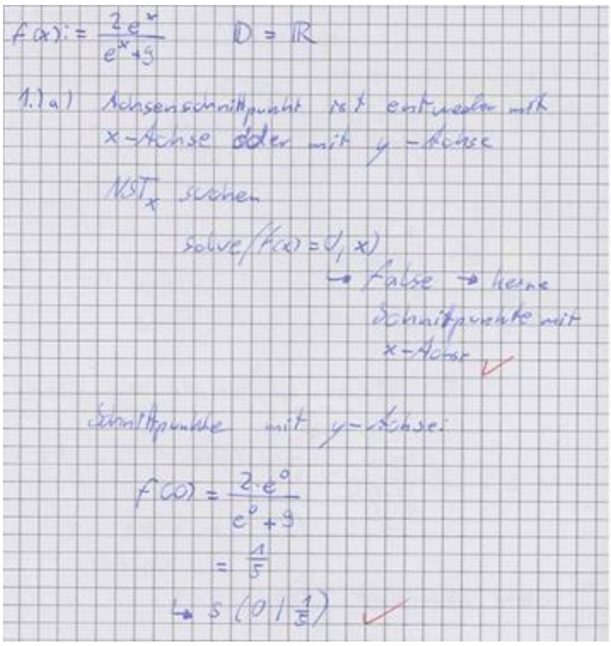
→ keine ~~Hst~~ Nullstelle

Achsenschnittpunkt mit y-Achse:

$f(0) = \frac{2e^0}{e^0+9} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

→ $S(0/0{,}2)$

Die folgende Abbildung zeigt eine gute Lösung. Fehler beschränken sich auf Verständnisfehler bezüglich der Aufgabenstellung. Anzeichen einer falschen Handhabung des CAS-Rechners waren an dieser Stelle nicht festzustellen.



$f(x) := \frac{2e^x}{e^x+9}$ $\quad D = \mathbb{R}$

1.) a) Achsenschnittpunkt ist entweder mit x-Achse oder mit y-Achse

NST_x suchen

solve(f(x) = 0, x)

→ false → keine Schnittpunkte mit x-Achse

Schnittpunkte mit y-Achse:

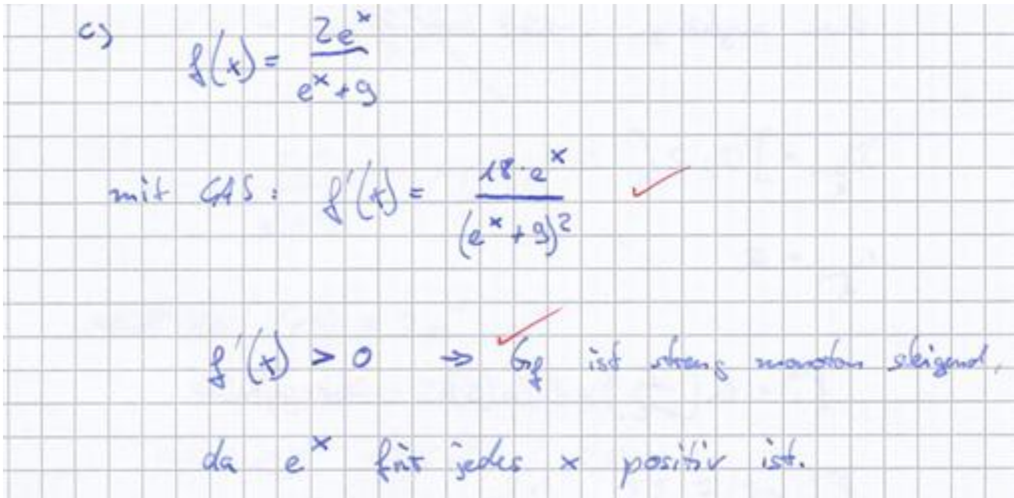
$f(0) = \frac{2 \cdot e^0}{e^0+9}$

$= \frac{1}{5}$

→ $S(0 \mid \frac{1}{5})$

c) Aufgabe 1 c)

Auch in Aufgabe 1 c) zeigten sich vor allem Verständnisprobleme. Nachfolgende Lösung zeigt eine Herangehensweise, die von der bearbeitenden Person ‚rechnerisch' mithilfe des CAS-Rechners bestimmt wurde. Zwar kann man erkennen, dass die Abiturientin bzw. der Abiturient mathematisches Verständnis aufweist, da die Person offensichtlich weiß, woraus man die streng monotone Steigung des Graphen ableiten kann. Die Lösung wurde aber eigentlich erst durch den knappen Anschlusssatz zu einer korrekten Lösung, da in diesem noch erwähnt wurde, warum die Ableitung immer ‚größer Null' sein muss.



c) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9}$

mit CAS: $f'(x) = \frac{18 \cdot e^x}{(e^x+9)^2}$

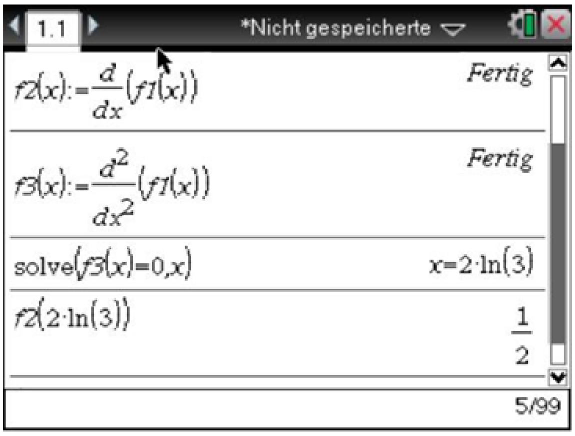
$f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend,

da e^x für jedes x positiv ist.

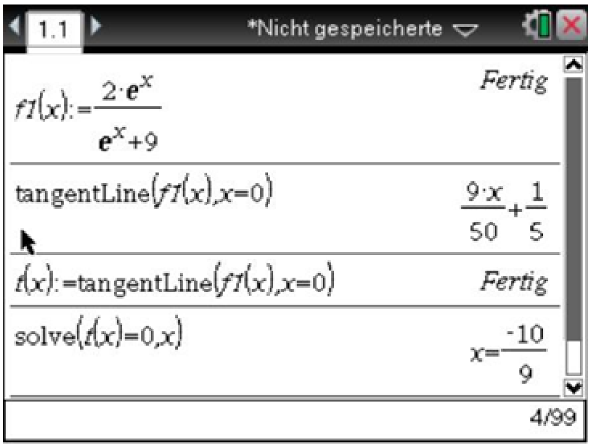
d) Aufgabe 1 d)

Für einige Schüler stellte die entscheidende Hürde bei dieser Aufgabe die Wahl eines geeigneten Trapezes dar. Wie die folgende Abbildung zeigt, erkannten viele Abiturienten nicht, dass das gesuchte Trapez „auf der Seite lag". Die beiden parallelen Seiten waren nicht wie gewöhnlich die horizontalen Strecken, sondern die beiden vertikalen, obwohl diese explizit in der Aufgabenstellung angegeben waren Daraus ergaben sich dementsprechend große Abweichungen zur tatsächlichen Fläche. Zum anderen war einigen Schülern die Formel der Fläche des Trapezes nicht geläufig und so teilten viele die Fläche des Trapezes in eine Rechtecks- und in eine Dreiecksfläche auf. Diese Aufteilung erschwerte die Rechnung und stellte somit eine weitere Quelle für mögliche Fehler dar. Dahingegen wurde die Berechnung des geforderten Integrals weitgehend problemlos durchgeführt.

e) Aufgabe 2



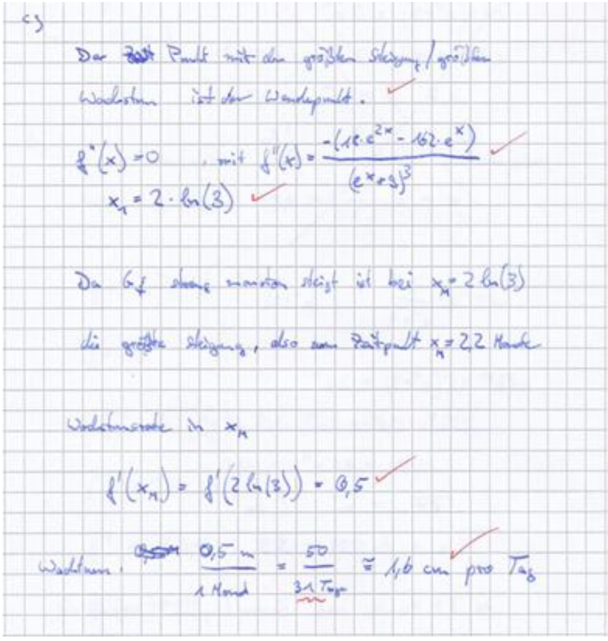
Aufgabe 2c)



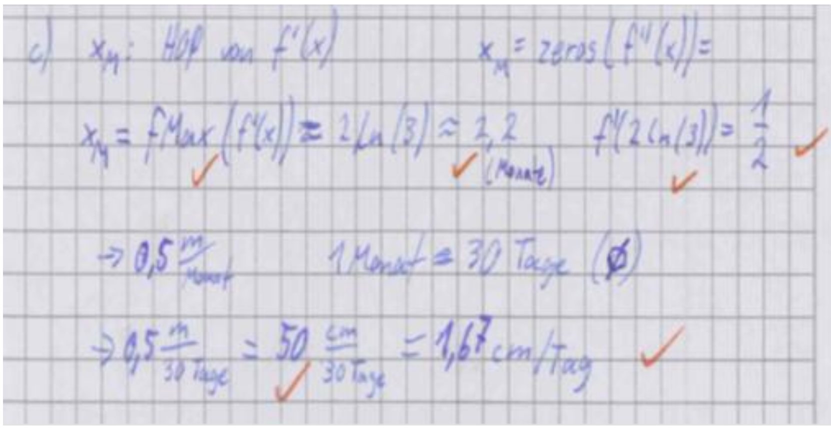
Aufgabe 2d)

f) Analyse der Schülerlösungen zu Aufgabe 2c)

Auch bei der folgenden Lösung fehlt die CAS-Befehl-Dokumentation. So wurde bei dieser ansonsten sehr guten Lösung nicht angegeben, ob die Gleichung $f''(x) = 0$ gelöst wird. Das heißt, man kann im Nachhinein nicht nachvollziehen, was der Abiturient in den CAS-Rechner eingegeben hat und wo der Fehler gemacht worden wäre. Hierdurch würde bei falschem Ergebnis eine mögliche Bepunktung des Lösungsweges entfallen.



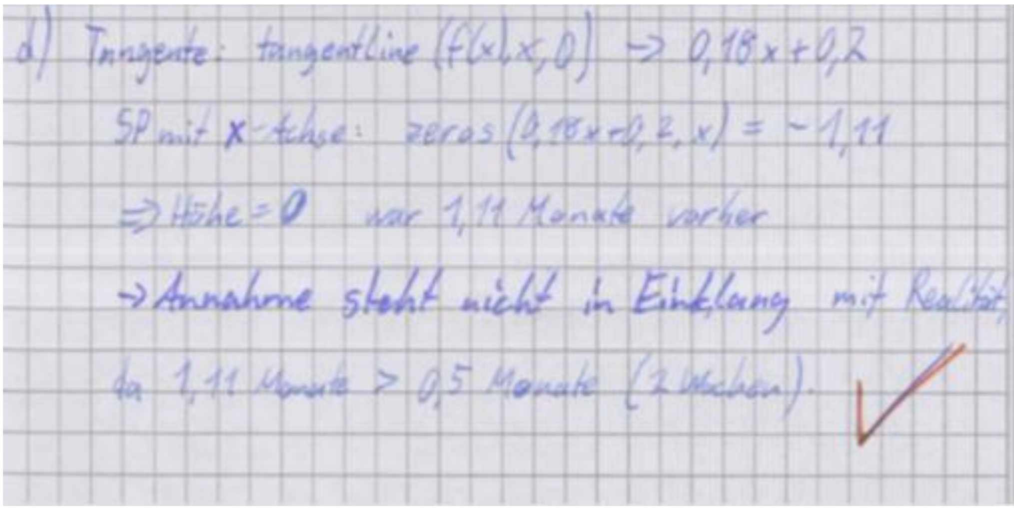
Im Gegensatz zu der eben gezeigten Lösung ist die Benutzung des CAS-Rechners in der folgenden Abbildung gut zu erkennen. Wie im Erwartungshorizont gezeigt, wird hier nicht der Weg über die zweite Ableitung gewählt, sondern der Befehl *fMax()* der ersten Ableitung genutzt.



Insgesamt wurde die Aufgabe nur von etwa der Hälfte der Schüler bearbeitet. Bei den bearbeiteten Lösungen gab es allerdings große Probleme bei der Umrechnung von m/Monat in cm/Tag. Die andere Hälfte hatte entweder Zeitmangel, was aus den richtigen Lösungswegskizzen abgelesen werden kann, oder sie verstanden die Aufgabenstellung nicht. So wurde zum Beispiel das Wachstum als linear angenommen, indem man das gesamte Wachstum über $f(4) - f(0)$ berechnete und das Ergebnis durch 4 Monate à 30 Tage teilte.

f) Analyse der Schülerlösungen zu Aufgabe 2d)

Die Resultate dieser Aufgabe waren im Allgemeinen sehr gut, wobei es auch einige Schüler gab, die den CAS-Befehl *tangentLine()* nicht kannten bzw. nicht nutzten und die Tangente manuell erstellten.


d) Tangente: tangentLine(f(x),x,0) ⇒ 0,18x+0,2
SP mit x-Achse: zeros(0,18x+0,2,x) = −1,11
⇒ Höhe = 0 war 1,11 Monate vorher
→ Annahme steht nicht in Einklang mit Realität,
da 1,11 Monate > 0,5 Monate (2 Wochen).

3. Teilgebiet Geometrie

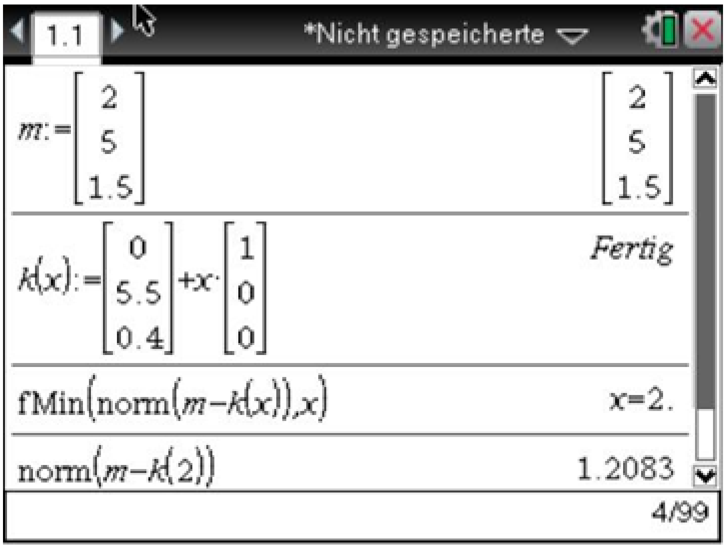
Der Einsatz des Rechner im CAS-Abitur im Teilgebiet Geometrie verspricht vor allem in der letzten Teilaufgabe der Aufgabengruppe I die größten Vorteile.
Hier ging es um einen Raum mit Dachschräge. In diese Dachschräge war ein Dachfenster eingelassen, das sich um eine Mittelachse drehen und somit öffnen ließ. Die Unterkante des Fensters sollte sich allerdings in den Raum hinein nach unten bewegen, anstatt wie gewöhnlich nach außen. Im weiteren Verlauf sollten die Länge des Dachfensters und der Punkt M, welcher einen Ansatzpunkt der waagerechten Drehachse darstellte, auf einer Seite ermittelt werden. Die Problematik für die letzte Aufgabe g) in diesem Teil war die Positionierung eines Möbelstücks direkt unter dem Fenster. Die vordere Oberkante des Möbelstücks war als Gerade definiert und die Schüler sollten nun rechnerisch überprüfen, ob das Fenster beim Öffnen an das Möbelstück anstoßen könnte. Mathematisches Grundproblem war der Abstand des Punktes M zur Geraden k. Um die vorgelegten Lösungswege vergleichen zu können, wird vom kürzesten Lösungsschema ausgegangen.

a) Aufgabe g)

> „Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Fenster bei seiner Drehung am Möbelstück hängen bleiben kann“ (Stark Verlag, 2012b, S. 2012-97).

Abiturienten mit CAS-Rechner wäre die Möglichkeit offen gestanden, sich über die Funktion *fMin()* mit $norm(m - k(x))$ als Argument den Abstand als Einzeiler berechnen zu lassen. Das Ergebnis 1.2083 mussten die sowohl mit als auch ohne CAS-Rechner arbeitenden Abiturienten noch mit $\frac{\sqrt{5}}{2}$, der halben Fensterlänge vergleichen, um die Aussage treffen zu können, dass der kleinste Abstand zwischen Dachfensterdrehachse und Möbelstück größer ist als die halbe Fensterlänge, welche sich in den Raum bewegt.

Abbildung 1: CAS-Lösung Geometrie Aufgabe 1g)



Quelle: eigene Quelle

Diese Lösung kam allerdings bei den uns vorliegenden Schülerlösungen nicht vor.