Anlage 2

Die Abiturprüfung 2013 – Analyse von Schülerlösungen – Aufgabenteil II - dokumentiert von Nora Bender im Rahmen ihrer Hausarbeit im Fach Mathematik an der Universität Würzburg

1. Teilgebiet Analysis – Aufgabengruppe I – Teil 2

Aufgabe 1 a)

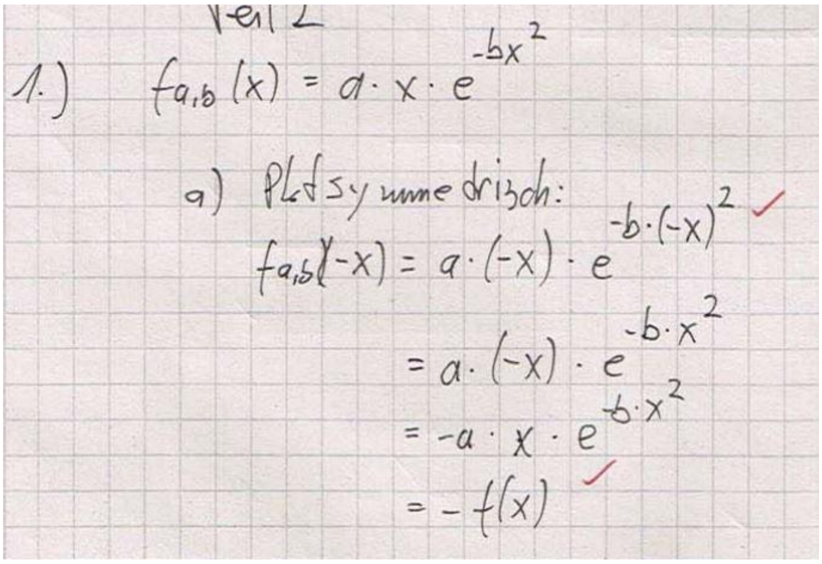


Abbildung 1: Schülerarbeit 5 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 1 a) (interne Quelle).

Die Lösung der oben abgebildeten Arbeit gleicht einer Musterlösung. Hier wurde die zu erfüllende Gleichung $f(-x) = -f(x)$ deutlich mit allen Zwischenschritten nachgewiesen. Die meisten Schüler haben Aufgabe 1 a) so gelöst. Punktabzug gab es, wenn nicht explizit $f(-x)$ bzw. $-f(x)$ beschrieben wurde, wie Abbildung 10 zu entnehmen ist.

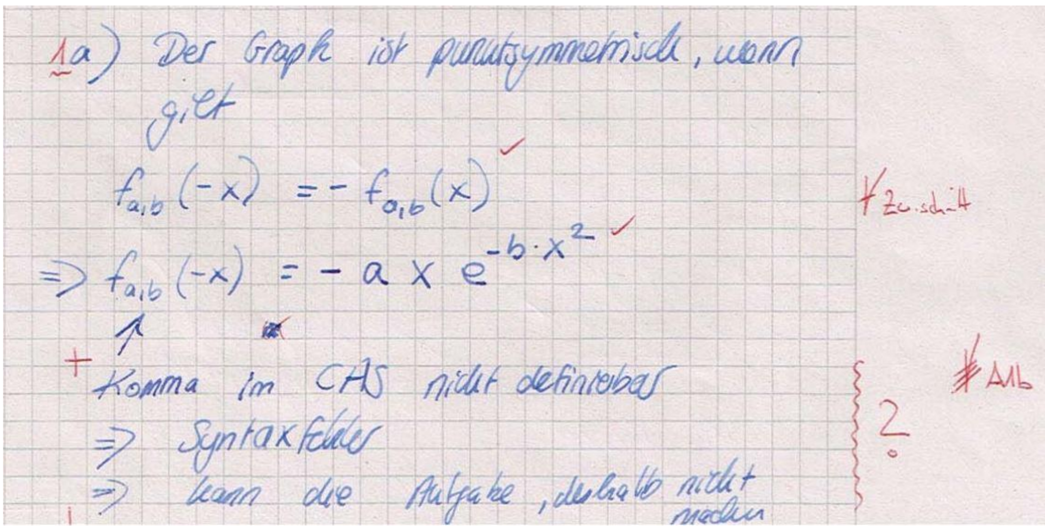


Abbildung 2: Schülerarbeit 3 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 1 a) (interne Quelle).

Außerdem fällt bei dieser Aufgabe auf, dass Probleme mit der Eingabe in ein Computer-Algebra-System auftreten können.

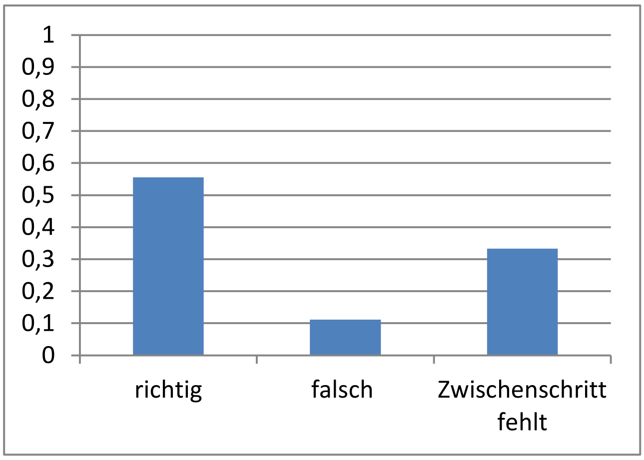


Diagramm 1: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 1 a) (eigene Quelle).

Insgesamt wurde Aufgabe 1 a) von allen Schülern bearbeitet und es waren viele sehr gute Lösungen darunter zu finden. Die Ursache für den fehlenden Zwischenschritt liegt möglicherweise darin, dass der Rechner bei der Eingabe von $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$ das Ergebnis „true“ liefert.

Wie die Verwendung des CAS an dieser Stelle explizit erfolgt, wird in den Schülerlösungen nicht ersichtlich.

Aufgabe 1 b)

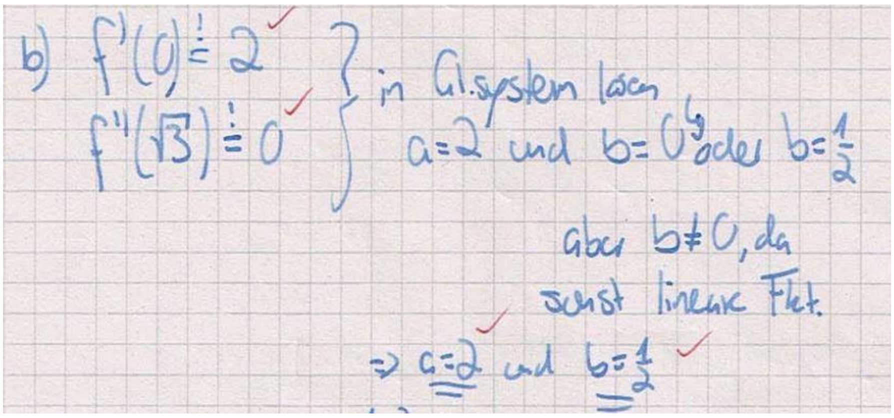


Abbildung 3: Schülerarbeit 6 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 1 b) (interne Quelle).

Maßgeblich für die Korrektur von Teilaufgabe 1 b) war der folgende Ansatz zur Lösung des Gleichungssystems: solve $\begin{matrix} f'(0)=2 \\ f''(\sqrt{3})=0 \end{matrix}, \{a, b\}$. Kaum eine Arbeit enthielt explizit die Angabe der ersten und zweiten Ableitung (vgl. Abbildung 11). Daher ist es offensichtlich, dass das CAS an dieser Stelle eingesetzt wurde und eine große Erleichterung für die Schüler darstellte.

Insgesamt wurde Aufgabe 1 b) von allen Abiturienten zufriedenstellend bearbeitet, wie aus der nachfolgenden Grafik ersichtlich wird:

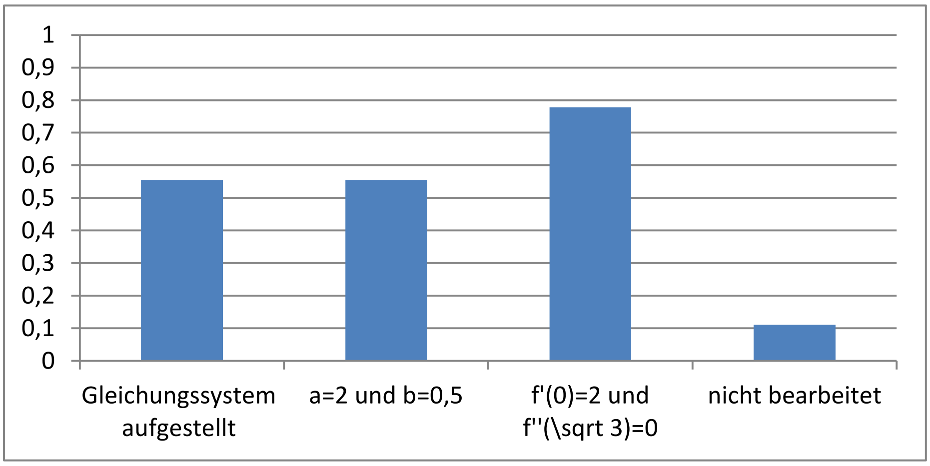


Diagramm 2: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 1 b) (eigene Quelle).

Aufgabe 2 a)

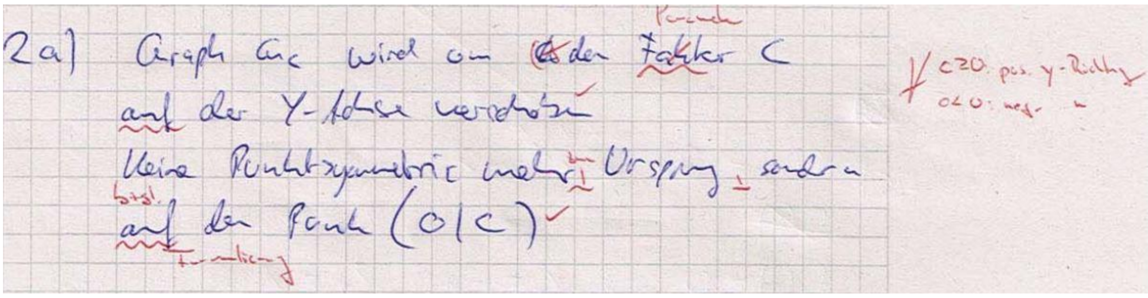


Abbildung 4: Schülerarbeit 1 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 a) (interne Quelle).

Die Auswirkung des Parameters c auf die Verschiebung des Graphen in *y*-Richtung wurde von fast allen Schülern beschrieben. Auffallend ist aber, dass die Hälfte der Schüler nicht genau erläutert hat, was für die beiden Fälle $c \geq 0$ und $c < 0$ gilt (vgl. Abbildung 12 und Diagramm 3). Des Weiteren waren Mängel im mathematischen Fachvokabular der Abiturienten zu erkennen, so wurde etwa *c* oft fälschlich als „Faktor“ beschrieben.

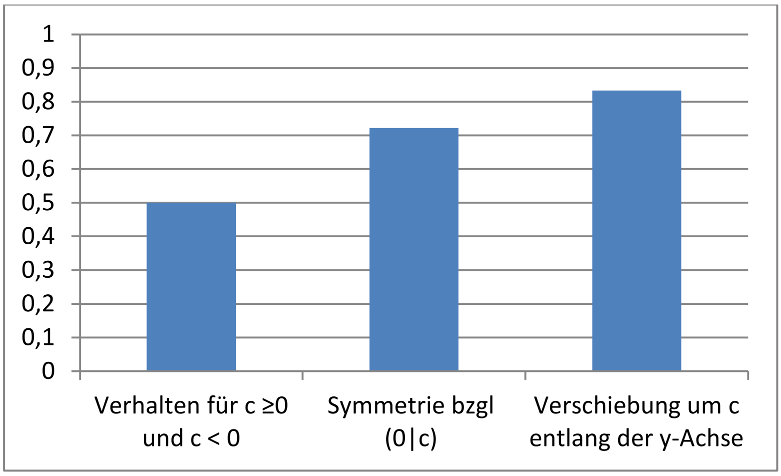


Diagramm 3: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 a) (eigne Quelle).

Aufgabe 2 b)

Etwa 90% der Schüler haben in Teilaufgabe 2 b) erkannt, dass die waagrechte Asymptote bei $y = c$ verläuft. Einige Ungenauigkeiten gab es bei der Formulierung, weshalb hier nicht alle Abiturienten, sondern nur etwa 80% die volle Punktzahl erreicht haben. Interessant ist, dass in mehr als der Hälfte der Arbeiten die Funktion genauer analysiert wurde:

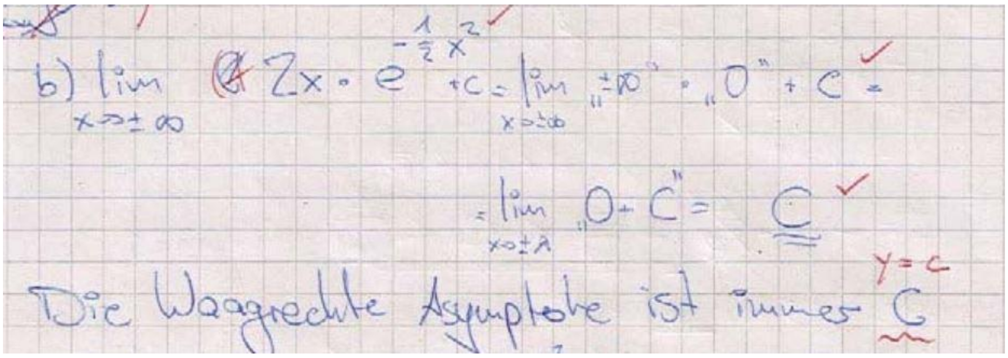


Abbildung 5: Schülerarbeit 2 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 b) (interne Quelle).

Im Gegensatz dazu zeigt Abbildung 14 eine Arbeit, bei der der Prüfling wahrscheinlich das Verhalten im Unendlichen mit dem Rechner betrachtet hat:

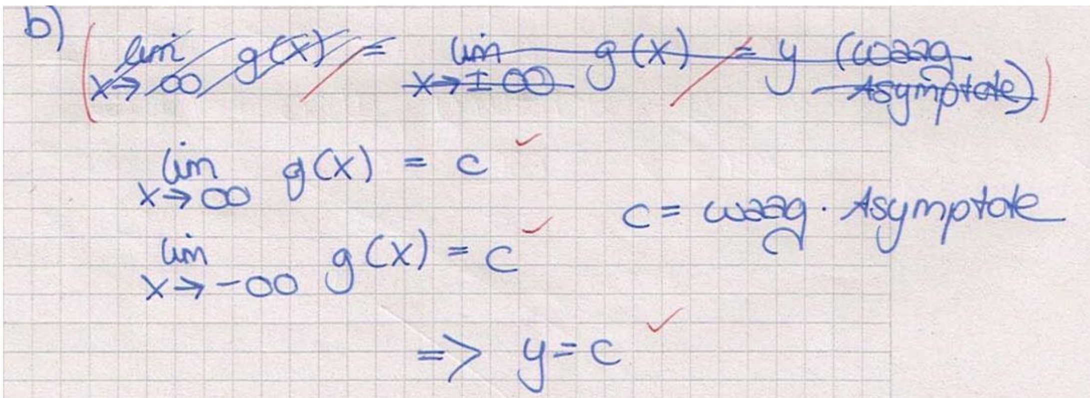


Abbildung 6: Schülerarbeit 9 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 b) (interne Quelle).

Das CAS liefert sofort das Ergebnis für den Grenzwert. Die Lösungen dieser Teilaufgabe zeigen, dass die Rechenfähigkeit der Schüler und der Sachzusammenhang durch den Rechner nicht verloren gehen, wie von vielen Kritikern befürchtet wird.

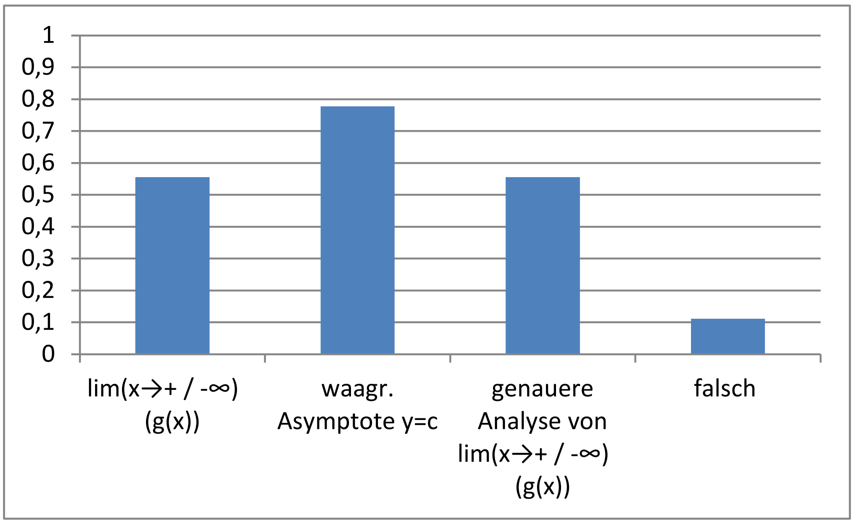


Diagramm 4: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 b) (eigene Quelle).

Aufgabe 2 c)

Wie vermutet, machte bei dieser Aufgabe lediglich die Formulierung der Begründung, warum die Hochpunkte von g_c parallel zu y liegen, Schwierigkeiten (vgl. Diagramm 5). Das Monotonieverhalten wurde meist tabellarisch gelöst (vgl. Abbildung 15) und die genaue Analyse der Extrema war in kaum einer Arbeit fehlerhaft. Vermutlich wurde die Tabelle mithilfe der graphischen Veranschaulichung in CAS gelöst oder mithilfe der Eingabe verschiedener Werte ermittelt. Dann konnten die Intervalle leicht abgelesen und die entsprechenden Werte zu Papier gebracht werden.

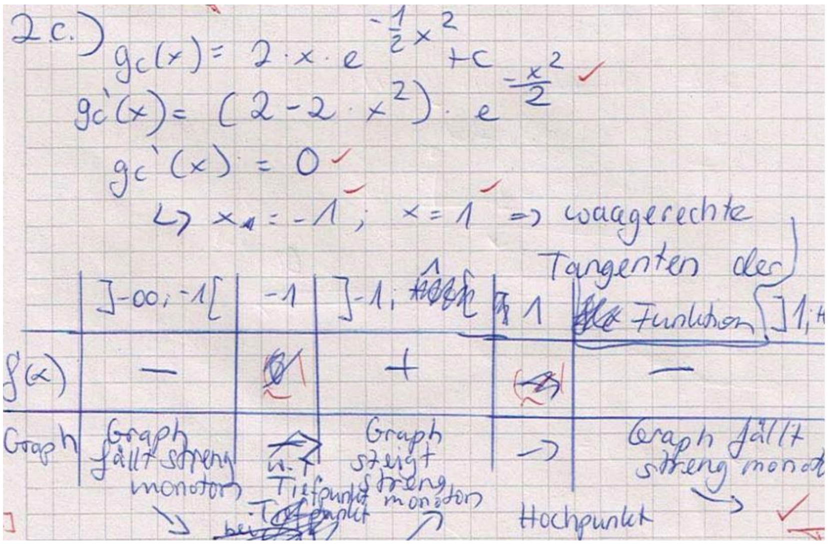
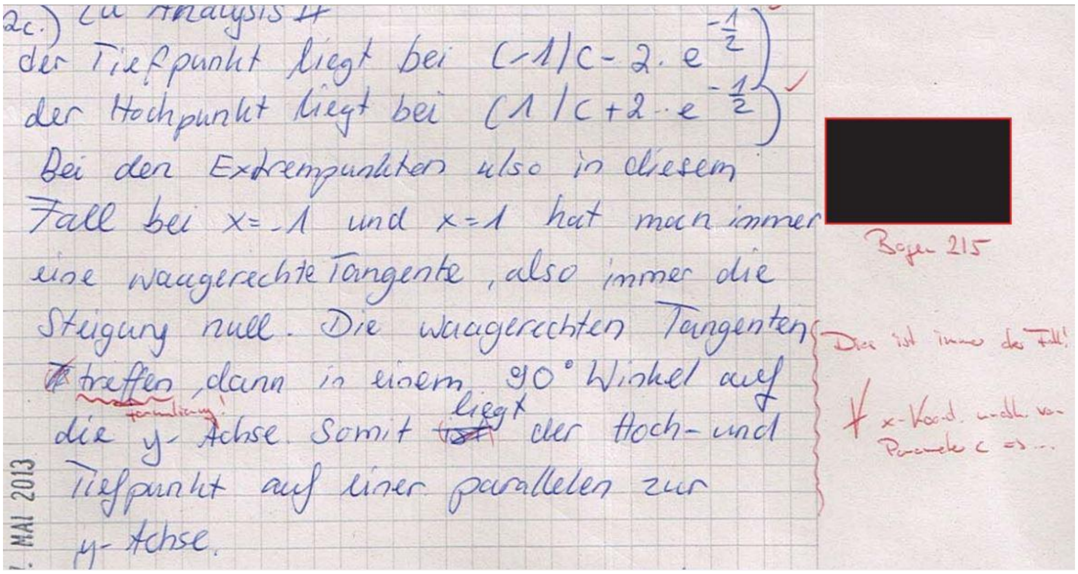


Abbildung 7: Schülerarbeit 4 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 c) (interne Quelle).



2c.) zu Analysis II
der Tiefpunkt liegt bei $(-1 \mid c-2\cdot e^{-\frac{1}{2}})$
der Hochpunkt liegt bei $(1 \mid c+2\cdot e^{-\frac{1}{2}})$ ✓
Bei den Extrempunkten also in diesem Fall bei x = -1 und x = 1 hat man immer eine waagerechte Tangente, also immer die Steigung null. Die waagerechten Tangenten treffen dann in einem 90° Winkel auf die y-Achse. Somit ~~ist~~ liegt der Hoch- und Tiefpunkt auf einer parallelen zur y-Achse.

Formulierung!

[redacted]

Bogen 215

Dies ist immer der Fall!

x-Koord. unabh. von Parameter c ⇒ …

MAI 2013

Abbildung 8: Fortsetzung Schülerarbeit 4 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 c) (interne Quelle).

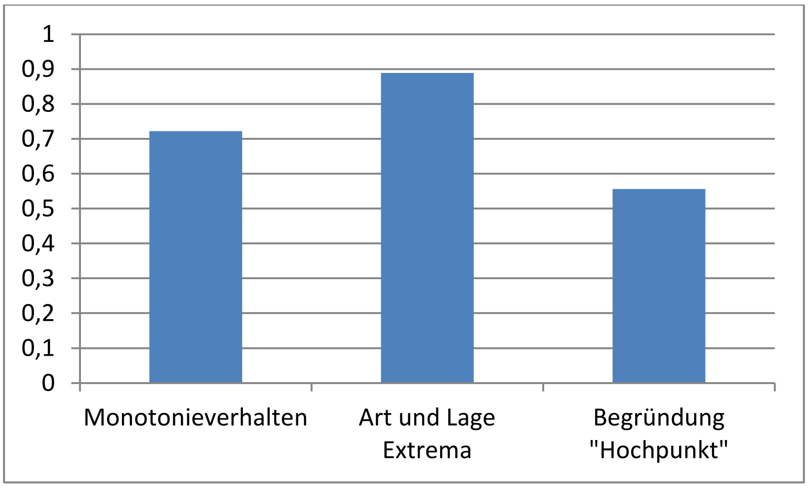


Diagramm 5: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 c) (eigene Quelle).

Das Computer-Algebra-System erleichtert die Bestimmung der Ableitungen erheblich und damit stellt auch die Ermittlung der Extrema kein Problem mehr dar. Daher ist die Bearbeitung dieser Teilaufgabe insgesamt sehr zufriedenstellend ausgefallen.

Aufgabe 2 d)

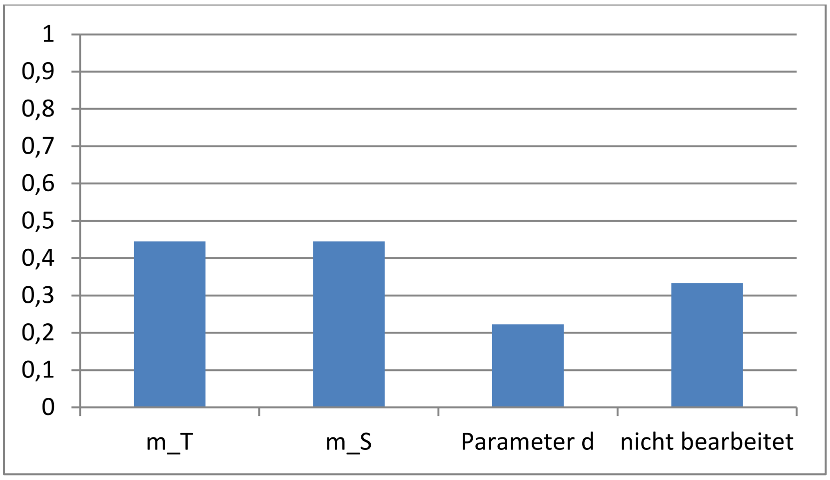


Diagramm 6: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 d) (eigene Quelle).

Die Vermutung, dass die Schüler mit einem vierten Parameter überfordert sein könnten, bestätigt sich, wie auch Diagramm 6 zeigt. Erschreckend ist, dass nur zwei von neun Arbeiten korrekt bearbeitet wurden. Ein Drittel der Abiturienten hat diese Aufgabe nicht bearbeitet. Die Bearbeitung der mittleren und lokalen Änderungsrate ist dennoch zufriedenstellend (vgl. Diagramm 6). Die gesuchte Abweichung der mittleren Änderungsrate m_S von der lokalen Änderungsrate m_T um 10% wurde teilweise falsch verstanden und berechnet, wie die nachfolgende Abbildung zeigt.

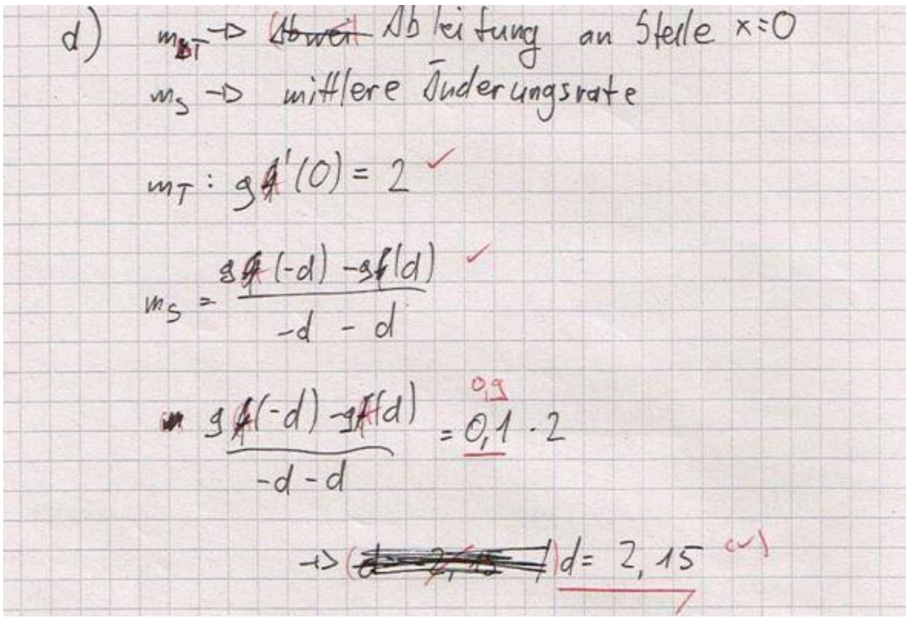


Abbildung 9: Schülerarbeit 5 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 d) (interne Quelle).

Aufgabe 2 e)

Dem nachfolgenden Diagramm 7 ist zu entnehmen, dass ein Drittel der Schülerlösungen falsch waren. Den Grund dafür zeigt die Abbildung 18. Viele Abiturienten hatten ein falsches Bild von der Aufgabe. Auffallend ist, dass in dieser Schülerarbeit zuvor die Monotonie in Aufgabe 2 c) nicht bearbeitet wurde. Hier musste man die gesamte Funktion betrachten und man hätte so feststellen können, dass die Funktion nicht nur von der Exponentialfunktion abhängig ist.

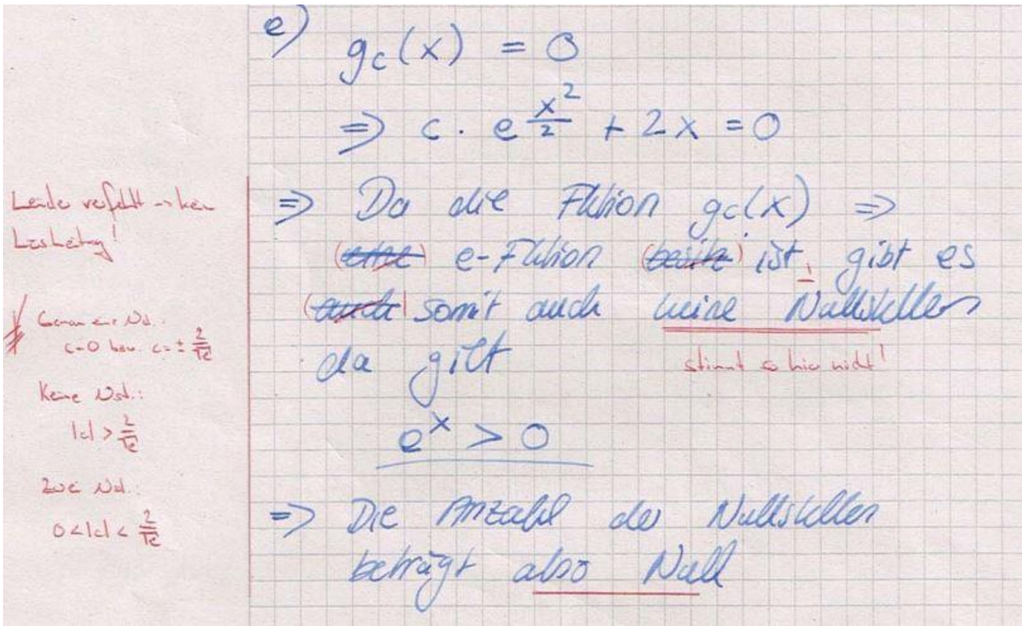


Abbildung 10: Schülerarbeit 3 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 e) (interne Quelle).

Obwohl das Zeichnen von G_c für verschiedene Werte für c eine Hilfe sein sollte, wurde diese Aufgabe insgesamt nicht zufriedenstellend gelöst. Nur zwei der neun Arbeiten waren komplett richtig, vier von neun immerhin fast richtig. Bei Letzteren wurden entweder nicht alle Fälle in Betracht gezogen oder der Wert für den Parameter c wurde falsch gerundet. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Verteilung der Antworten.

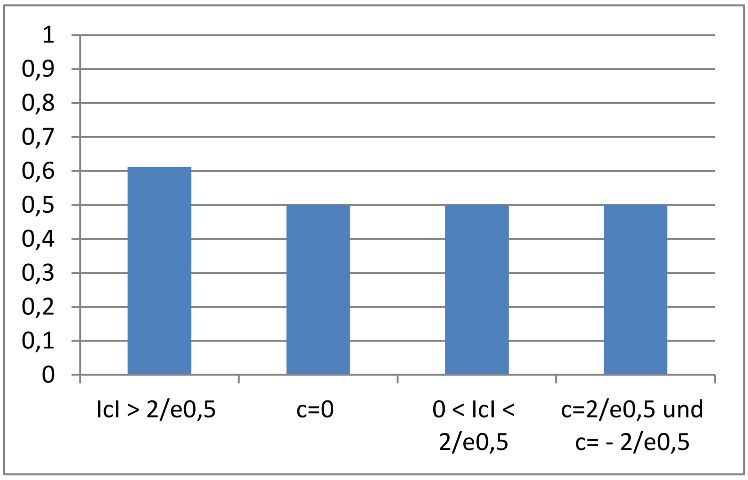


Diagramm 7: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 e) (eigene Quelle).

Abschließend ist zu erwähnen, dass das CAS an dieser Stelle keine Hilfe ist, falls der Befehl $solve(g\ x\ = 0, x)$ verwendet wurde.

Aufgabe 2 f)

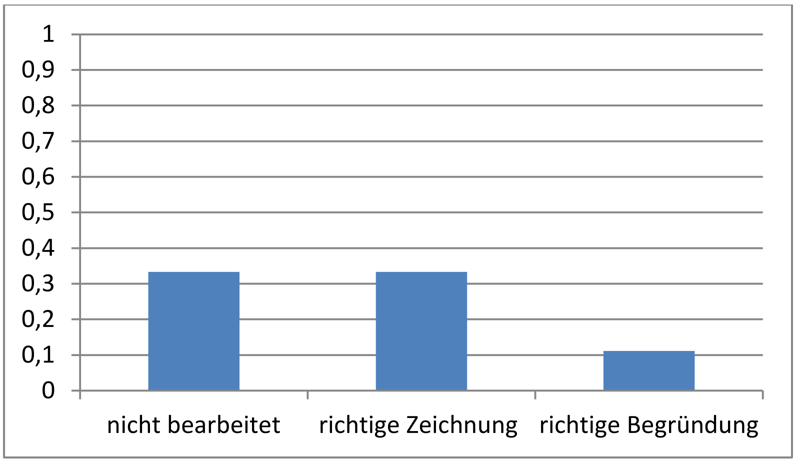


Diagramm 8: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 f) (eigene Quelle).

Die Chance, an dieser Stelle das Zeichenprogramm des Rechners einzusetzen und sich die Flächenbilanz anzeigen zu lassen, haben zwei Drittel der Schüler nicht genutzt. Viele Lösungen enthielten keinen Beitrag zur Lösung (vgl. Abbildung 19). Nur eine Arbeit (vgl. Abbildung 20) war komplett richtig. Letztlich hätten aber doch mehr Schülerarbeiten eine Skizze enthalten können. Ein weiteres Drittel hat diese Aufgabe nicht bearbeitet. Es stellt sich daher die Frage nach dem Grund hierfür. War die Aufgabenstellung zu schwer? Oder war diese Aufgabe zu zeitaufwendig, gerade im Hinblick auf die Gesamtheit aller Teilaufgaben? In einer Prüfungssituation ist eine Kombination beider Aspekte wahrscheinlich.

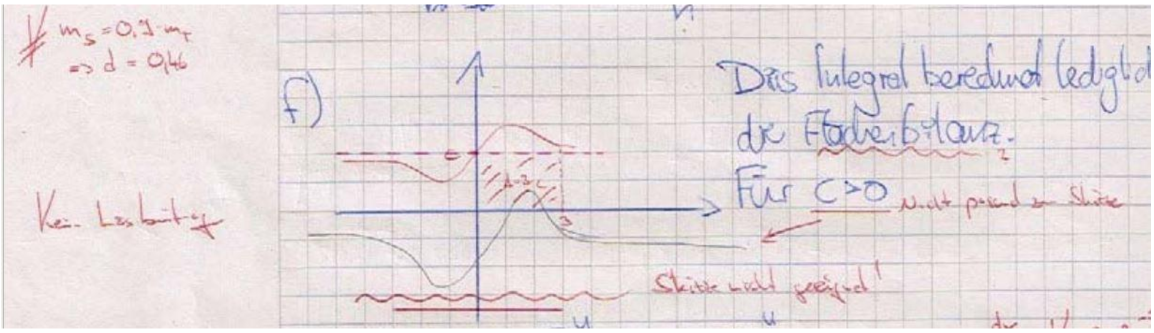


Abbildung 11: Schülerarbeit 2 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 f) (interne Quelle).

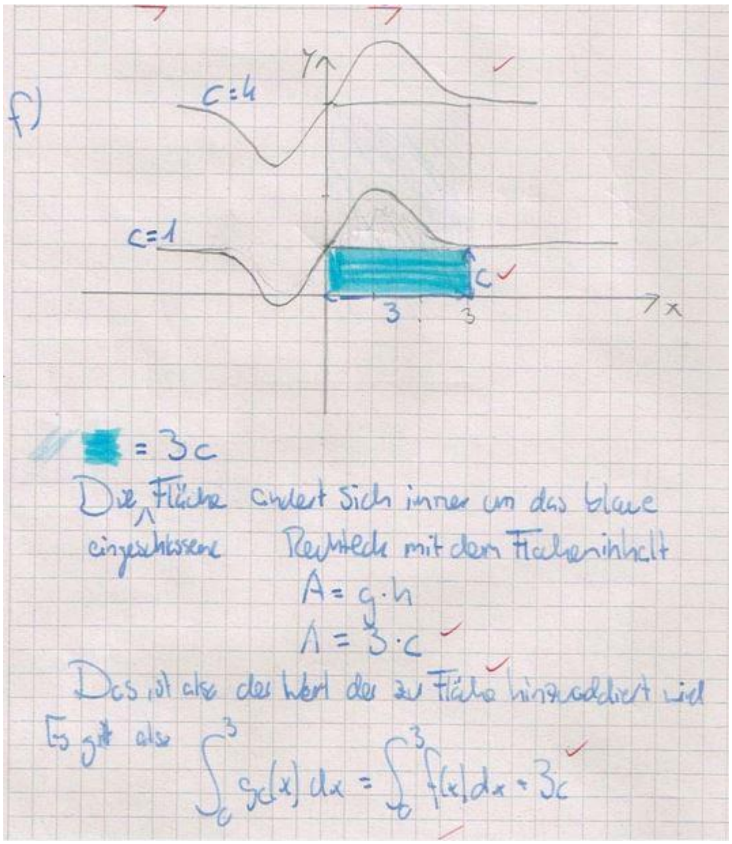


Abbildung 12: Schülerarbeit 6 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 f) (interne Quelle).

Aufgabe 2 g)

Diese Aufgabe wurde insgesamt schlecht bearbeitet, wie die Analyse der bewerteten Aspekte in Diagramm 9 zeigt. Nur zwei Schüler haben bei dieser Aufgabe eine gute Lösung abgegeben. Durch die komplizierte Aufgabenstellung hatten die Abiturienten wahrscheinlich ein falsches Bild und bestimmten den Flächeninhalt eines falschen Integrals. Häufig wurde $A(u) = \int_0^u g_c(x)\,dx$ anstatt $A(u) = \int_0^u g_c(x) - c\,dx$ berechnet (vgl. Abbildung 21). Somit ergaben sich natürlich auch falsche Ergebnisse für $\lim_{u\to\infty} A(u)$ und das Ergebnis konnte nicht mehr richtig gedeutet werden. Weitere Fehler wurden bei den Integralgrenzen gemacht: Die Obergrenze wurde statt auf u auf 1 gesetzt. Zwei weitere Arbeiten enthalten sogar keinen Lösungsansatz zu dieser Aufgabe.

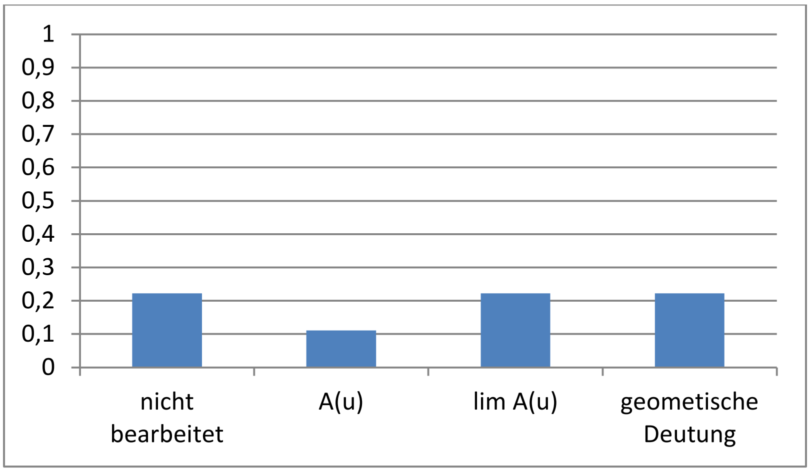


Diagramm 9: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 g) (eigene Quelle).

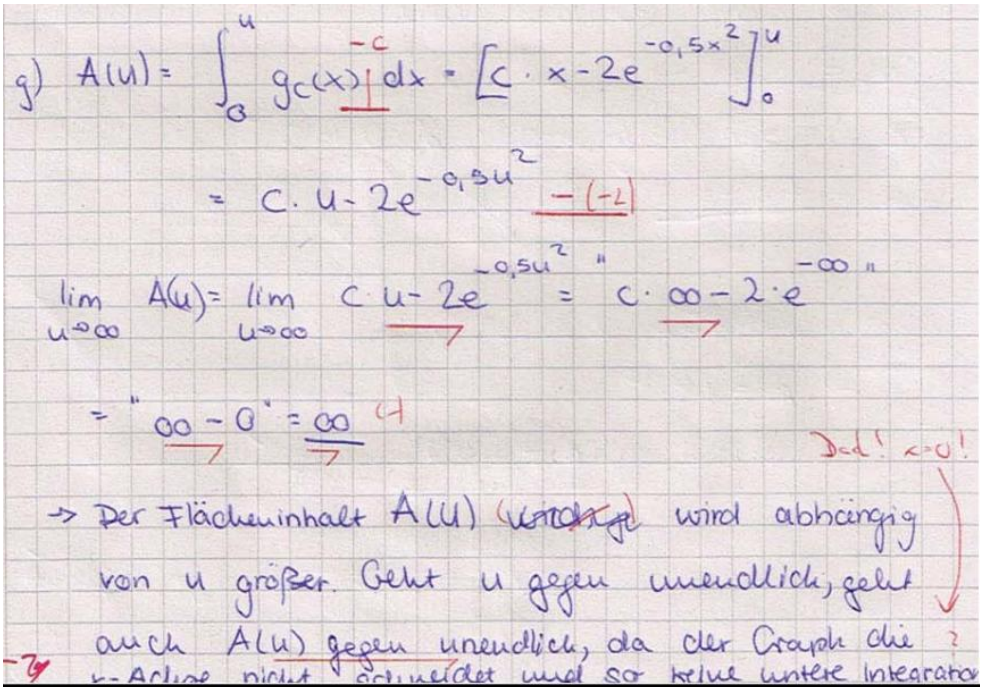


Abbildung 13: Schülerarbeit 8 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 g) (interne Quelle).

Nur eine Arbeit ragt besonders heraus. Der Prüfling hat zunächst die gegebenen Informationen zeichnerisch dargestellt (vgl. Abbildung 22). Dies hilft $A(u)$ richtig zu berechnen. Die Rechnung selbst wurde hier vermutlich ohne Rechner durchgeführt, denn alle Lösungsschritte wurden einzeln notiert.

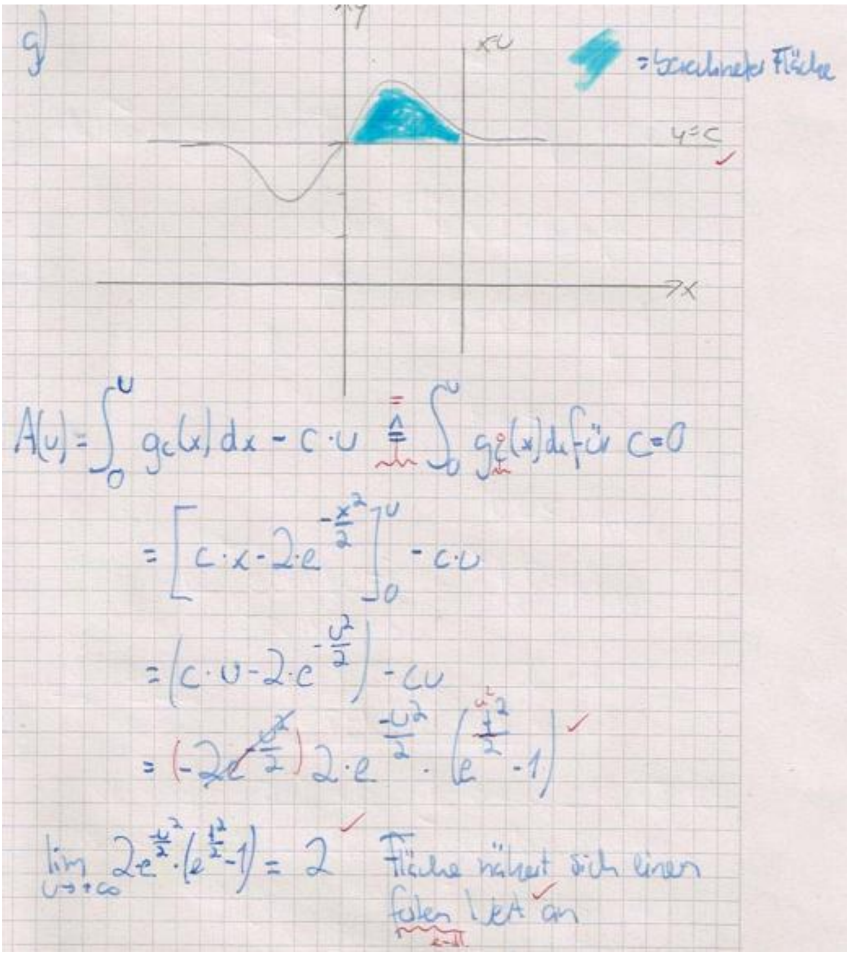


Abbildung 14: Schülerarbeit 6 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 g) (interne Quelle).

Aufgabe 2 h)

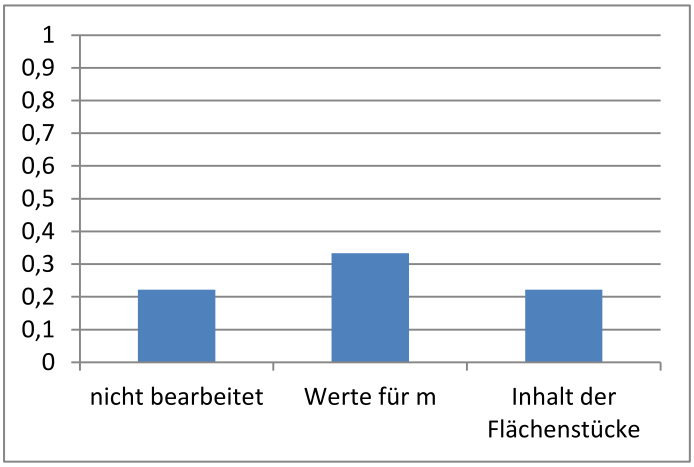


Diagramm 10: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 2 h) (eigene Quelle).

Viele Schülerlösungen enthielten keinen sinnvollen Lösungsansatz. War ein Ansatz vorhanden, lagen die Schwierigkeiten vor allem im Berechnen des Inhalts der Flächenstücke. In einer Arbeit wurde versucht, das Flächenstück mit dem Satz des Pythagoras zu berechnen. Der Schüler hat vermutlich die Aufgabenstellung falsch verstanden. Diese konnte, wie schon erwähnt, für die Abiturienten irreführend sein. Auch die Tatsache, dass in manchen Arbeiten das Integral von g_c berechnet wurde, bestätigt diese Annahme (vgl. Abbildung 23).

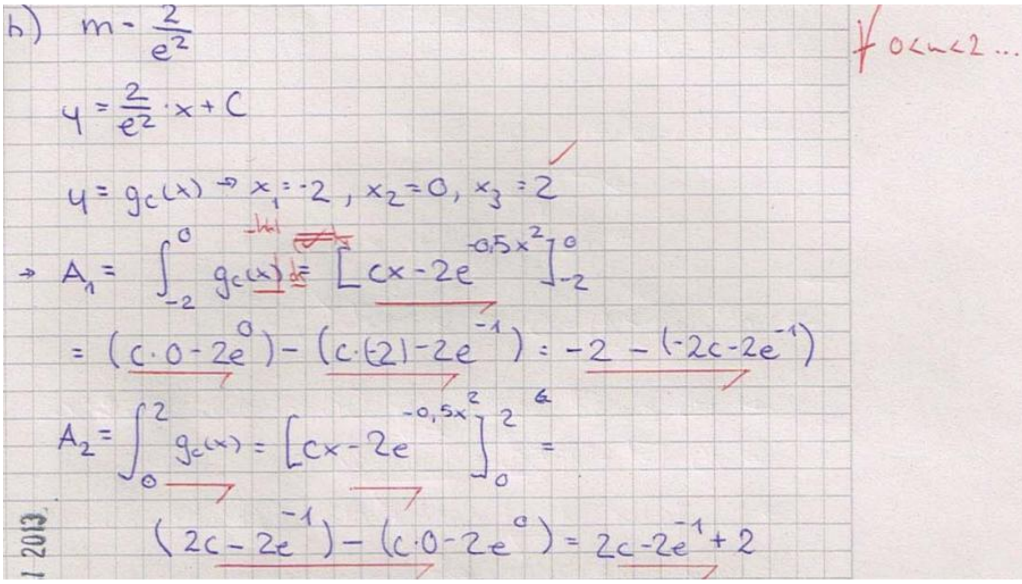


Abbildung 15: Schülerarbeit 8 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 2 h) (interne Quelle).

Es gab leider nur eine einzige zufriedenstellende Lösung dieser Aufgabe. In dieser Arbeit wurde Inhalt des Flächenstücks richtig berechnet. Auffallend ist auch, dass in keiner Schülerlösung eine zielführende Skizze vorhanden war, die eventuell noch in die Bewertung hätte einfließen können.

Aufgabe 3 a)

Die Schüler haben diese Aufgabe weitestgehend gut bearbeitet. Bei der ersten Teilaufgabe fällt auf, dass häufig das Problem auftrat, den konkreten Zeitraum anzugeben, in welchem die Geburtenziffer $2{,}1$ beträgt. Es wurde entweder kein Zeitraum genannt, oder es wurde beispielsweise ein Zeitraum von 4 bis 18 Jahren angegeben, ähnlich zum Ergebnis in Abbildung 24. Es war für viele Abiturienten also nicht klar aus der Aufgabenstellung zu erkennen, wie genau der Zeitraum dargestellt werden sollte.

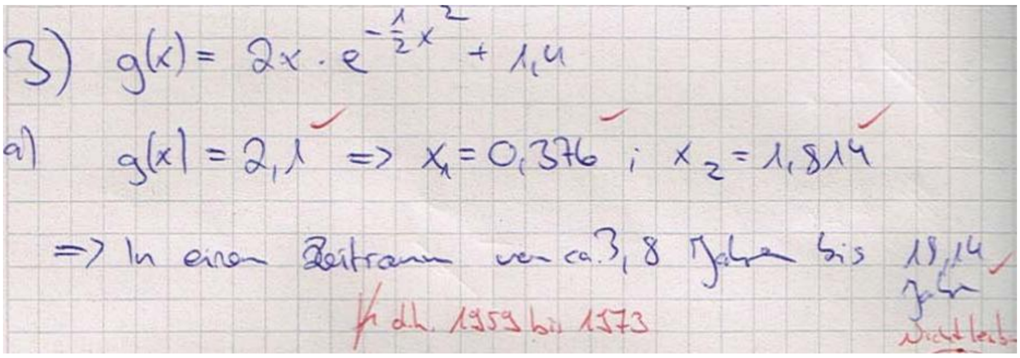


Abbildung 16: Schülerarbeit 1 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 3 a) (interne Quelle).

Auch Lösungen wie *„Im Zeitraum* $x = 0{,}37$ *bis* $x = 1{,}81$ *war die Geburtenziffer mindestens* $2{,}1$ *hoch"* (interne Quelle) waren zu finden. Wurde der Zeitraum mit Jahreszahlen benannt, gab es lediglich kleinere Abweichungen. Die Lösungen waren dann alle nahezu korrekt. Erfreulich ist, dass alle Arbeiten einen richtigen Lösungsansatz besaßen und dass x_1 und x_2 korrekt berechnet wurden.

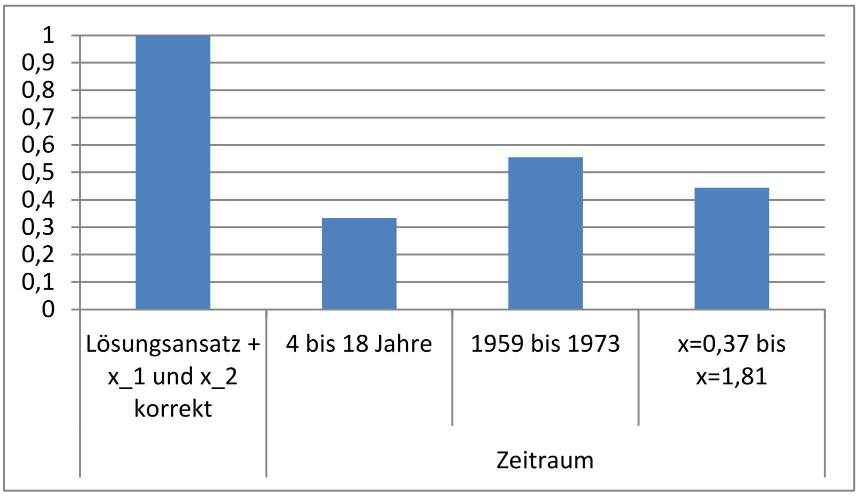


Diagramm 11: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 3 a) (eigene Quelle).

Die vorherige Grafik zeigt, in wie vielen Arbeiten das Ergebnis konkret mit Jahreszahlen angegeben wurde bzw. wie oft das Ergebnis anderweitig dargestellt wurde.

Aufgabe 3 b)

Bezüglich der Frage, wie sich die Bevölkerungszahl zukünftig entwickelt, haben die meisten Schüler erkannt, dass sich die Geburtenziffer einem Wert von $1{,}4$ annähert. Leider wurde in kaum einer Arbeit konkret geantwortet, dass die Bevölkerungszahl abnimmt, da die Geburtenziffer unter $2{,}1$ liegt.

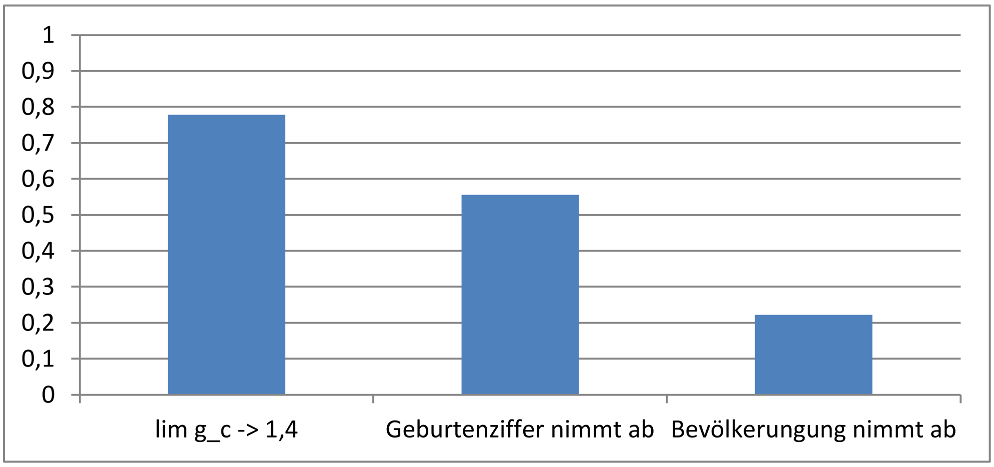


Diagramm 12: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 3 b) (eigene Quelle).

In der Aufgabenstellung wurde explizit nach der Bevölkerungszahl gefragt, deren Entwicklung zu begründen ist. Mehr als die Hälfte haben dies mit der abnehmenden

Geburtenziffer begründet (vgl. Abbildung 25). Es stellt sich hier die Frage, wie eine solche Antwort zu bewerten ist, da eine sinkende Bevölkerungszahl eine logische Konsequenz der rückgänigen Geburtenziffer ist. Ein ganzer Punkt Abzug scheint jedoch bei nur 2 BE hier zu viel.

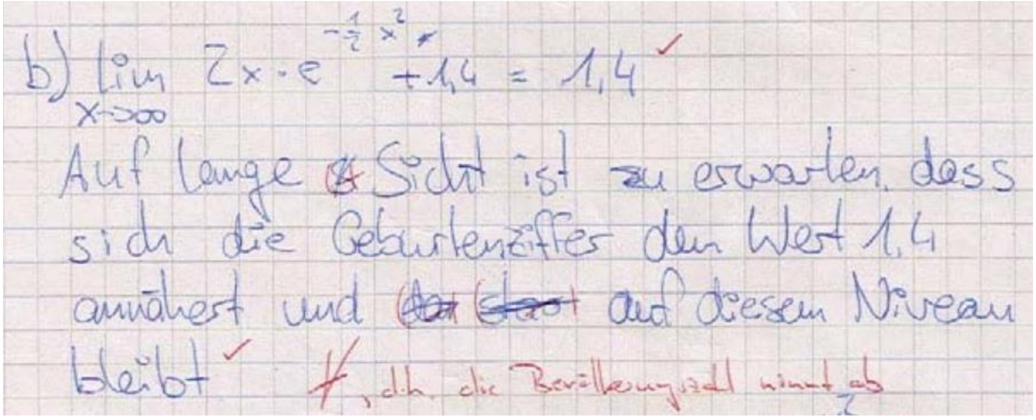


Abbildung 17: Schülerarbeit 2 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 3 b) (interne Quelle).

Aufgabe 3 c)

Der gesuchte Wendepunkt, an dem ersichtlich wird, wann die Geburtenziffer am stärksten abnimmt, wurde in fast allen Arbeiten richtig berechnet. Aber auch hier gab es wie zuvor in Teilaufgabe b) Probleme bei der konkreten Bestimmung der Jahreszahl. Der rechnerische Nachweis, dass die Geburtenziffer geringer wird, wurde nicht zufriedenstellend bearbeitet. In lediglich einer Arbeit wurde dieser richtig bearbeitet (vgl. Abbildung 26).

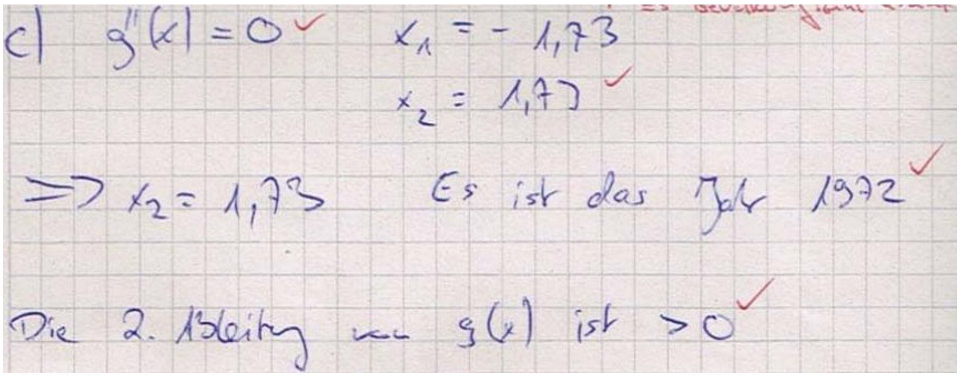


Abbildung 18: Schülerarbeit 1 zu Analysis I Teil 2 Aufgabe 3 c) (interne Quelle).

Wie außerdem aus Abbildung 26 hervorgeht, wurden keine expliziten CAS-Befehle von den Abiturienten notiert. Es ist aber deutlich zu sehen, dass der Rechner hier eingesetzt wurde und dieser eine Hilfe für die Bestimmung des Wendepunkts ist.

Der Verständnisteil der Aufgabe, also das Beschreiben des rechnerischen Nachweises, wurde, wie schon erwähnt, schlecht bearbeitet. Dies verdeutlicht die nachfolgende Statistik.

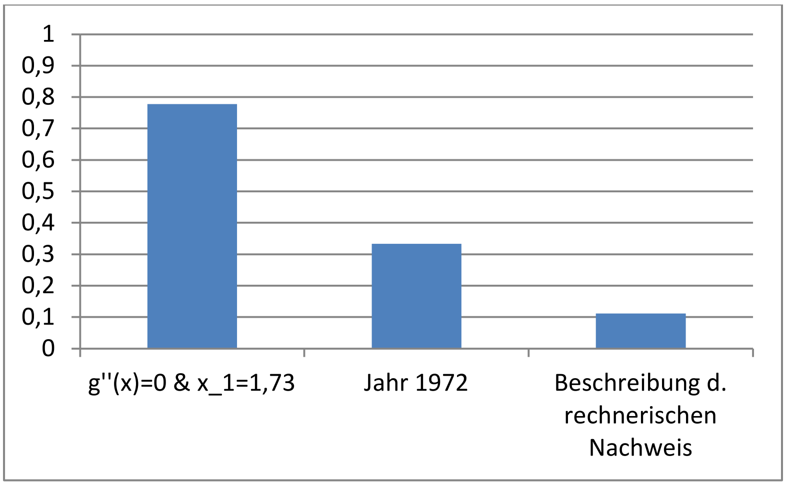


Diagramm 13: Analysis I -Teil 2 - Aufgabe 3 c) (eigene Quelle).