



Prof. Dr. H.- G. Weigand
Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Am Hubland
97074 Würzburg

Telefon: 0931 / 31-85092
Telefax: 0931 / 31-85089
weigand@dmuw.de
www.dmuw.de

Würzburg, November 2013

Ergebnisbericht zu den Abiturprüfungen mit CAS in den Jahren 2012 und 2013

Dieser Bericht bezieht sich auf die beiden ersten Abiturprüfungen 2012 und 2013, bei denen ein CAS als Hilfsmittel zugelassen war. Insbesondere bezieht sich diese Analyse

- a) auf persönliche Einschätzungen,
- b) auf von Gymnasien anonym zugesandten Kopien von originalen Abiturprüfungsbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern (*dreizehn* für 2012 und *neun* für das Jahr 2013)
- c) die Zulassungsarbeit der Studentin Nora Bender an der Universität Würzburg zum Thema „CAS-Abiturprüfung 2013“
- d) die Zulassungsarbeit des Studenten Pascal Rausch an der Universität Würzburg zum Thema „CAS-Abiturprüfung 2012“

Diese Analyse ist eine Fallstudie und deshalb – natürlich – nicht repräsentativ. Das Ziel dieser Analyse ist es insbesondere, Hinweise für zukünftige Abiturprüfungen mit CAS zu geben.

Für die beiden Abitur-Aufgaben mit CAS (CAS-Abitur) und ohne CAS (N-Abitur) gilt, dass sie vom grundsätzlichen Aufbau her weitgehend identisch sind und nur einzelnen Teilfragen beim CAS-Abitur abgewandelt sind. Diese Unterschiede betreffen vor allem die Aufgaben aus der Analysis, bei Geometrie und Stochastik treten keine oder nur wenige Unterschiede auf.

1. Die Abiturprüfung 2012

CAS-Abitur und N-Abitur unterschieden sich nur in den beiden Analysis-Aufgaben. Die Stochastik- und Geometrieteile waren identisch.

a) Analysis – Aufgabengruppe I - Teil 1

Alle uns vorliegenden Schülerbearbeitungen haben bei der Analysis Aufgabengruppe I gewählt.

Will man die Unterschiede zwischen dem CAS- und dem N-Abitur global beschreiben, so werden beim CAS-Abitur bei auftretenden Funktionsgleichungen feste Zahlen durch Variable ersetzt. Als prototypisch dafür kann die Aufgabe 3 gelten. Hier mussten SuS des CAS-Abiturs eine Funktio-

nenschar, $f_a: x \rightarrow \sin(ax)$, bearbeiten, die SuS des N-Abiturs arbeiteten hingegen mit der speziellen Funktion für $a = 2$ aus dieser Funktionenschar. Die höhere Komplexität einer Aufgabe mit Parameter zeigt sich dabei insbesondere bei Aufgabe 3 b), bei der zwei weitere Parameter eingeführt werden. Hier war die Aufgabenschwierigkeit dann doch – wie die Schülerlösungen zeigen – für die Mehrzahl der SuS zu hoch (siehe Anlage 1).

Den Vorteil, den ein CAS bietet, sieht man bei Teil 2 der Aufgabengruppe I mit der Funktion $f: x \rightarrow \frac{2e^x}{e^x+9}$. Viele Aufgaben – etwa 1 c) – lassen sich mit einem CAS mit wenigen Tastendrücken erledigen. Allerdings bleibt das Problem, die mit dem Rechner erhaltenen Lösungen richtig zu interpretieren.

Schülerlösungen: Die Schülerlösungen stammen von zwei verschiedenen Gymnasien. Ein auffälliger Unterschied bei den Schülerlösungen ist, dass die Schüler eines Gymnasiums die verwendeten CAS-Rechner-Befehle gut dokumentierten, die anderen überhaupt nicht. Für das Nachvollziehen einer Lösung ist es äußerst hilfreich oder gar erforderlich, dass die Dokumentation der Benutzung des CAS-Rechners stattfindet (vgl. auch die entsprechenden Hinweise des ISB). Vor allem bei falschen Lösungen lässt sich sonst nicht erkennen, ob evtl. richtige Teilschritte vorhanden sind.

Die Lösungen zeigen zum einen, dass die SuS grundlegende CAS-Befehle kennen und anwenden können. Die Schwierigkeiten bei den Aufgaben liegen vor allem in der Interpretation der erhaltenen Lösungen und haben ihre Ursache wohl meist im mangelnden mathematischen Verständnis und nicht in der nicht-adäquaten Anwendung des Rechners.

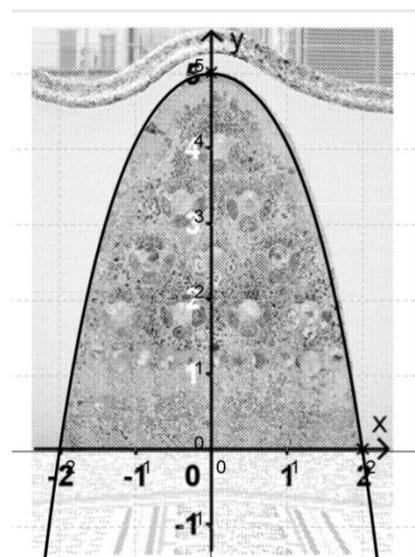
Zum anderen zeigt sich aber auch, dass SuS aufgaben-adäquate CAS-Befehle häufig nicht anwenden, so etwa bei Aufgabe 2 die Befehle *fMax()* oder *tangentline()*. Sicherlich kennen die SuS diese Befehle, wenden sie aber in der entsprechenden Situation dann nicht an.

Ein kleine Nebenbemerkung: Es gab bei einigen SuS Unklarheiten mit dem Wort „rechnerisch“. Einige SuS interpretierten das wohl als „mit der Hand berechnen“! Dies weist nochmals auf die Notwendigkeit einer Festlegung der verwendeten Operatoren in den Aufgaben hin.

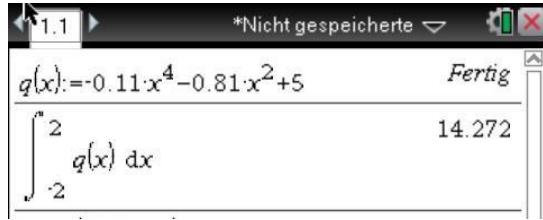
Insgesamt zeigen die Schülerlösungen ein durchaus positives Bild vom Rechnereinsatz. Aufgetretene Schwierigkeiten sind häufig auf mangelnde mathematische und nicht auf mangelnde technische Fähigkeiten zurückzuführen.

b) Analysis – Aufgabengruppe II

Die Aufgabe wurde – leider – von keiner der uns vorliegenden Klassen gewählt. Deshalb sind hier auch nur allgemeine Aussagen oder persönliche Einschätzungen möglich. Die Problematik einer Abituraufgabe mit CAS zeigt insbesondere Aufgabe 1 - Teil 2. Hier ging es um die Modellierung der Begrenzung eines Keramikkunstwerks von Antoni Gaudi in Barcelona durch eine ganzrationale Funktion 4. Ordnung. Diese Aufgabe ist eine schöne Idee (auch wenn viele bei derartigen Aufgaben nach dem Sinn des mathematischen Handelns fragen werden). Bei der Aufgabe 1c ging es um die Berechnung der Fläche, die vom Graphen G_q der Funktion mit $q(x) = -0.11x^4 - 0.81x^2 + 5$ und



x-Achse eingeschlossen wird. Das lässt sich leicht (mit einem CAS) berechnen.



Dann wird eine Gerade parallel zur x-Achse durch das Kunstwerk so gelegt, dass der obere eingeschlossene Teil 71,5 % des gesamten Flächeninhalts beträgt. Betrachtet man hier die Gerade $g: y = c$ mit $0 < c < 4$ und berechnet – mit dem CAS – den Schnittpunkt von G_q und g so erhält man beim Gleichsetzen – ein naheliegender Lösungsweg – der beiden Funktionsterme:

Mit dem TI-Nspire	Die TI-Nspire Software liefert	Die Casio ClassPad-Software
<pre>solve(q(x)=c,x) x=1.22783·(√(-c-5. -1.22112 -√(c-5. -1.))</pre>	$q(x) := -0.11 \cdot x^4 - 0.81 \cdot x^2 + 5$ $\int_{-2}^2 q(x) dx$ $x = 1.22783 \cdot (\sqrt{-c-5.} -1.22112 -\sqrt{c-5.} \cdot -1.)$ $x_1 := 1.22783 \cdot (\sqrt{-c-5.} -1.22112 -\sqrt{c-5.} \cdot -1.22112)$ $x_2 := -1.22783 \cdot (\sqrt{-c-5.} -1.22112 -\sqrt{c-5.} \cdot -1.22112)$ $x_3 := 1.22783 \cdot (\sqrt{-c-5.} -1.22112 +\sqrt{c-5.} \cdot -1.22112)$ $x_4 := -1.22783 \cdot (\sqrt{-c-5.} -1.22112 +\sqrt{c-5.} \cdot -1.22112)$	$\frac{-2654712 \cdot \sqrt{-\sqrt{-4400 \cdot c+28561} -81}}{12451703}$ $\frac{2654712 \cdot \sqrt{-\sqrt{-4400 \cdot c+28561} -81}}{12451703}$ $\frac{-454545454 \cdot \sqrt{22 \cdot (\sqrt{-4400 \cdot c+28561} -81)}}{9999999989}$ $\frac{454545454 \cdot \sqrt{22 \cdot (\sqrt{-4400 \cdot c+28561} -81)}}{9999999989}$

Diese Lösungen können SuS – in der Abiturprüfung – sicherlich nicht interpretieren. Leider liegen keine Bearbeitungen von dieser Aufgabe vor. Es wäre höchst interessant gewesen, wie SuS damit umgegangen sind.

Die Aufgabe zeigt, dass bei Aufgaben mit CAS aufgrund der größeren Lösungsvielfalt die möglichen rechnergestützten Lösungen im Vorhinein sehr genau analysiert werden müssen.

c) Geometrie - Aufgabengruppe 1 und 2

Bei diesen bzgl. CAS- und N-Abitur identischen Aufgaben konnten die SuS des CAS-Abiturs durchaus bei richtigem Einsatz des Rechners – kleinere – Vorteile haben. Dies betrifft etwa das Umwandeln einer parametrischen Ebenengleichungen in die Normalenform, die Berechnung des Abstandes eines Punktes zu einer Ebene oder eines Winkels zwischen zwei Vektoren. Bei der Aufgabengruppe 1 g) – Abstand eines Punktes M im Raum zur Geraden k – können Abiturienten mit dem CAS-Rechner über die Funktion $fMin()$ mit $norm(m - k(x))$ als Argument den Abstand in einer Zeile berechnen. Diese Möglichkeit wurde allerdings in keiner uns vorliegenden Lösungen genutzt.

d) Stochastik - Aufgabengruppe 1 und 2

Beide Aufgaben in N- und CAS-Abitur waren identisch. Vorteile des CAS-Rechners gegenüber einem wissenschaftlichen Rechner sind hier nicht vorhanden.

2. Die CAS-Abiturprüfung 2013

a) Analysis – Aufgabengruppe I – Teil 1

Beim ersten Teil dieses Aufgabenbereichs liegt die Bedeutung des CAS vor allem in der Erleichterung der Rechenarbeit und der Hilfestellung zum Überprüfen der Lösungen (CAS als Kontrollinstrument). Die Berechnung der Tangentengleichung – Aufgabe 1b) - wurde nicht zufriedenstellend gelöst. In keiner Schülerlösung wurde die richtige Tangentengleichung aufgestellt. Nur eine Lösung enthielt den möglichen CAS-Befehl $tangentline(g(x), x, 0)$ mit dem die Gleichung der Tangente aufgestellt werden kann. Das Problem dafür dürfte aber nicht in der mangelnden Kenntnis des CAS-Einsatzes liegen, sondern ist wohl darauf zurückzuführen, dass bei der CAS-Aufgabe – im Gegensatz zur N-Aufgabe – die x-Koordinate des angegebenen Punkt P , durch den die Tangente verlaufen soll, nicht in der Definitionsmenge der Ausgangsfunktion enthalten ist. Das war für viele SuS wohl verwirrend, da sie fälschlicherweise in P einen Berührpunkt der Tangente mit dem Graphen zu vermuten scheinen.

b) Analysis – Aufgabengruppe I – Teil 2

Die in diesem Teil anfangs definierte Funktion ist von der Struktur her in beiden Prüfungen dieselbe. Das CAS-Abitur wird allerdings erheblich dadurch erschwert, dass die gegebene Funktion zwei Parameter enthält: $f_{a,b}: x \mapsto ax e^{-bx^2}$ im Vergleich zu der Funktion $f: x \mapsto 2x e^{-0,5x^2}$ im Abitur ohne CAS. Weiter wird dann die Schar $g_c: x \mapsto f(x) + c$ definiert, also die Funktion f um einen zusätzlichen Parameter c erweitert (wobei die Parameter a und b allerdings nun feste Werte annehmen). Dann wird – in Aufgabe 2d – ein weiterer Parameter beim Intervall $[-d; d]$ eingeführt, und in Aufgabe 1 g) wird noch ein weiterer Parameter eingeführt. Die dadurch bedingte erheblich höhere kognitive Anforderung aufgrund der zahlreichen Parameter wurde bei diesen Aufgaben durch die Aufgabensteller offensichtlich unterschätzt. Technische Möglichkeiten – wie etwa die Parametervariation mit Hilfe eines CAS – bedingen nicht automatisch ein besseres inhaltliches Verständnis.

Sicherlich ist es aber so, dass die Möglichkeit der graphischen Veranschaulichung durch das CAS beim Verständnis der Aufgabe hilft, ja dass ohne diese Visualisierung die Aufgabenstellung in dieser Weise nicht möglich wäre. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erinnert vor allem bei den beiden letzten Teilaufgaben 2 g) und h) an das frühere Leistungskursniveau.

Aufgabe 3 ist eine Anwendungsaufgabe, die sich auf die vorherigen Aufgaben bezieht. Bei der gesamten Aufgabe hilft der Rechner bei den Berechnungen und er ist ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung der gesuchten Prognose.

c) Analyse der Schülerdokumentationen¹ (Anlage 2)

Die Aufgaben 1a und 1b wurden zufriedenstellend beantwortet, die Schwierigkeiten der SuS liegen hier nicht auf der technischen CAS-Ebene, sondern auf der Ebene der mathematischen Fachsprache. Insgesamt zeigt sich – etwa bei Aufgabe 2b) –, dass die SuS in der Lage sind Berechnungen mit dem CAS auszuführen und die Ergebnisse auf die Situation hin zu interpretieren. Wie bereits in der obigen Analyse dargelegt, zeigt sich aber auch – etwa bei der Aufgabe 2d –, dass viele SuS durch diese Aufgabe – sicherlich durch die zusätzlichen Parameter – überfordert

¹ Eine ausführliche Analyse der Schülerlösungen für die Aufgaben von Teil 2 findet sich im Anhang 2.

waren. Von den 9 vorliegenden Arbeiten wurden nur 2 richtig bearbeitet. Auch die Aufgabe 2 e) – Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von c – wurde nicht zufriedenstellende gelöst. Wiederum zeigen sich die Schwierigkeiten der SuS beim Umgang mit parameterabhängigen Funktionen. Bei Aufgabe 2f) wurde die Zeichenfunktion des CAS kaum genutzt (nur ein Drittel hat dies überhaupt versucht). Auch die Aufgaben 2g und 2h wurden schlecht gelöst. Bei 2h gab es nur eine zufriedenstellende Lösung.

Die Gründe für das nicht zufriedenstellende Ergebnisse können – natürlich – nicht aus den Schülerlösungen abgelesen werden. Es kann aber vermutet werden, dass die Länge der Aufgabe einhergehend mit der – gegenüber dem N-Abitur – erweiterten Parameterabhängigkeit zu herausfordernd für viele SuS war.

Ein ganz anderes Bild ergibt sich in Aufgabe 3. Diese wurde durchweg zufriedenstellend gelöst. Aus den Lösungen geht hervor, dass der Rechner problemadäquat eingesetzt wurde. Die Schwierigkeiten lagen eher auf der Ebene der Interpretation der Ergebnisse, etwa dem richtigen Ablesen von Zeiträumen oder dem Erkennen der Abnahme der Bevölkerung beim Unterschreiten einer bestimmten Geburtenziffer (hier 2,1).

d) Analysis – Aufgabengruppe II – Teil 1

Bei der ersten Aufgabe ist das CAS gut einsetzbar. Die zweite und dritte Aufgabe sind allerdings sehr zeitaufwändig und benötigen einige Vorüberlegungen, bis der CAS-Rechner zielführend eingesetzt werden kann. Das ist ja auch in Ordnung und sinnvoll. In beiden Aufgaben können die gegebenen Informationen und Überlegungen durch die Zeichenfunktion des CAS überprüft werden. Sollte nicht sofort eine Idee für die richtige Herangehensweise vorhanden sein, so bietet der Rechner immer noch die Möglichkeit, sich einige Funktionen zeichnen zu lassen, um so auf eine Lösungsidee zu kommen, etwa durch eine schrittweise Annäherung an eine gesuchte Funktion. Dieser anschauliche Zugang durch das CAS ist sicherlich eine erhebliche Erleichterung. Bei Aufgabe 4) – identisch im CAS- und N-Abitur – ist der Rechner dagegen keine besondere zusätzliche Hilfe.

e) Analysis – Aufgabengruppe II – Teil 2

Hier ist die Funktion im N-Abitur ein Spezialfall der Funktionenschar im CAS-Abitur:

Abitur ohne Rechner:

$$f: x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{x^2+15}{2(x+1)} = f_{15}$$

Abitur mit CAS-Rechner:

$$f_k: x \mapsto \frac{x^2 + k}{2(x+1)}$$

Im Wesentlichen gelten für diese Aufgabe die obigen Argumente. Der CAS- Einsatz ist zur Rechnerleichterung und vor allem zur graphischen Veranschaulichung hilfreich und wichtig. Die Anzahl der verschiedenen Parameter ist hier auch begrenzt, so dass eine Analyse von Schülerantworten hier sicherlich interessant gewesen wäre. Leider liegen für diese Aufgabe keine Schülerlösungen vor, so dass wir hier nicht genauer auf diese Aufgabe eingehen.

f) Teilgebiet Stochastik

Im Teilgebiet Stochastik gab es nur eine kleine Differenzierung der Aufgabenstellung in Gruppe I, - Teilaufgabe 1c) – ansonsten waren beide Prüfungsvarianten identisch. Insgesamt bietet das Computer-Algebra-System in Stochastik keine besondere Hilfe durch vordefinierte Funktionen. Im

Vergleich zu einem normalen Taschenrechner besteht lediglich die Möglichkeit, sich graphische Darstellungen und Simulationen von Zufallsexperimenten durch den CAS-Rechner anzeigen zu lassen (vgl. Langlotz & Zappe, 2011). Diese wurde aber wohl bei unseren Schülerlösungen nicht verwendet.

g) Teilgebiet Geometrie (Anlage 3)

Beide Abiturprüfungen sind nahezu identisch. Das CAS-Abitur unterscheidet sich nur um die Erweiterung einer Teilaufgabe (Teilaufgabe h)) vom klassischen Abitur. Das CAS dient bei manchen Aufgaben sicherlich als eine wichtige Rechenhilfe, etwa beim Aufstellen einer Ebenengleichung, beim Bestimmen ihrer Normalenform oder der Berechnung von Volumen und Masse des untersuchten Körpers, bei der Aufstellung der Gleichung einer Geraden, beim Bestimmen eines Berührpunktes von Kugel und Spat. Allerdings zeigen sich immer wieder Schwierigkeiten von SuS mit der Eingabe von geometrischen Objekten in das CAS – etwa bei Aufgabe 1 h – oder dem richtigen Ablesen, Runden und Zuordnen des vom CAS gelieferten Ergebnisses. Wichtig sind auch Aufgaben – etwa die Teilaufgaben d) und e) – die größeren Wert auf Verständnis legen, unabhängig von der Verwendung eines CAS.