September 2014

Johannes Beck, Hans-Georg Weigand (Universität Würzburg)

Rückmeldung zu den Abiturlösungen des CAS-Abiturs 2014

An der Universität Würzburg haben wir authentische Schülerlösungen des CAS-Abiturs des Jahres 2014 untersucht und analysiert. Dabei wurde je ein Satz von jeweils 9 Schülerlösungen von 4 Gymnasien in Bayern untersucht. Die betreuenden Lehrkräfte, die in diesem Jahr eine „CAS-Klasse" unterrichteten, wählten je 3 Schülerlösungen aus dem oberen, dem mittleren und dem unteren Leistungsspektrum entsprechend dem Halbjahresstand am Ende von 12/1 aus und sandten uns Kopien von Schülerlösungen anonymisiert zu.

Im Vordergrund der Analyse stand dabei nicht in erster Linie die mathematische Leistung der Schülerinnen und Schüler, sondern es ging um den Umgang der Schülerinnen und Schüler mit dem Taschencomputer (TC) und um aufgetretene Schwierigkeiten bzw. Besonderheiten, die sich aus den Lösungsblättern entnehmen ließen. Besonderes Augenmerk lag auf der Frage, ob und wie der Einsatz des TC dokumentiert wurde. Dabei fällt auf, dass innerhalb einer Klasse jeweils eine relativ große Homogenität vorhanden ist. Dies deutet darauf hin, dass Lehrerinnen und Lehrern eine große Bedeutung als Vorbilder für sauberes, nachvollziehbares Dokumentieren zukommt bzw. diese durch entsprechende Anweisungen das Arbeiten steuern können.

Prüfungsteil B - Analysis

Der Prüfungsteil B des CAS-Abiturs 2014 hat sich in der Analysis stark vom herkömmlichen Abitur (ohne CAS) unterschieden. In den Vorjahren war es meist so, dass das CAS-Abitur durch zusätzliche Parameter und einige abgewandelte Aufgabenstellungen aus dem normalen Abitur hervorging. Dieses Jahr standen die CAS-Aufgaben im Zeichen der Modellierung, d.h. ein Sachkontext wurde hergenommen, um die Aufgaben darin einzubetten und Aussagen über die Situation (in der Realität) bzw. über das mathematische Modell oder Teile davon zu treffen.

Modellierungsaufgaben

Grundsätzlich kann man sagen, dass Aufgaben für den CAS-Einsatz wesentlich mehr Text enthalten (vgl. Pallack 2007). Dies trifft im Abitur 2014 allerdings auch auf einige Teile des Nicht-CAS-Abiturs zu, meistens im Rahmen von an Modellierungen angelehnten Aufgaben (Nicht-CAS Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 1 Aufgabe 3; Aufgabengruppe 2 Aufgabe 2; CAS Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 1; Aufgabengruppe 2 Aufgabe 2 und 3). Dabei fällt auf, dass die Aufgabengruppe 1 des CAS-Abiturs von Anfang an mit der Beschreibung des Modells beginnt, während Aufgabengruppe 2 des CAS-Abiturs noch eine Aufgabe ohne den Modellierungsbezug voranstellt und das Abitur ohne CAS nur in der letzten von drei (bzw. letzten von zwei) Aufgaben einen Bezug zum Modellieren herstellt. Hier stellt sich die Frage, ob diese Unterschiede einen Einfluss auf die empfundene Schwierigkeit bzw.

die Leistungen der Schülerinnen und Schüler haben. Dies konnte in diesem Rahmen nicht untersucht werden.

Möglichkeiten durch CAS-Einsatz

Sowohl das herkömmliche, als auch das CAS-Abitur beschäftigten sich im Bereich der Analysis mit Modellierungen von realen Objekten. Hier findet man einige strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen den Aufgaben, z.B. dass bestimmte Linien in Abbildungen durch Funktionen beschrieben werden (Rand eines herzförmigen Blatts, Stützstrebe / Frontscheibe bei einem Automobil, Straßenverlauf einer Autobahnabfahrt). Ein wesentlicher Unterschied zwischen den CAS- und Nicht-CAS-Aufgaben liegt darin, dass der Einsatz des CAS andere Fragestellungen ermöglicht, zu deren Beantwortung die Verwendung von Funktionen und Formeln gehört, die im Text vorgegeben und für Schülerinnen und Schüler im Grunde unverständlich sind.

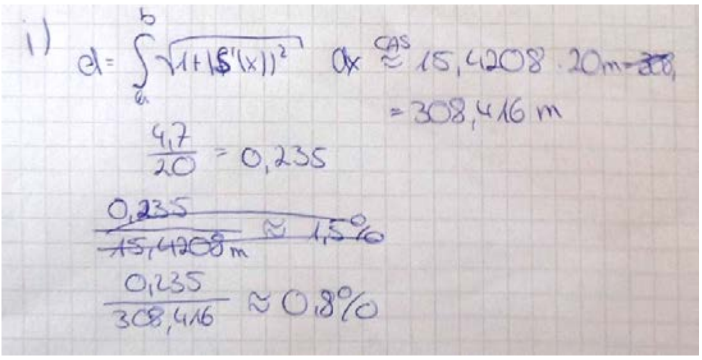
Ein Beispiel dazu aus CAS Prüfungsteil B Analysis Aufgabengruppe 2 Aufgabe 2:

> *Auf Grundlage des Modells kann das Volumen des Rumpfs des Eselspinguins (in cm³) mithilfe der Formel* $V = \pi \cdot \int_0^{75} \left(g(x)\right)^2 dx$*, die Oberfläche (in cm²) mithilfe der Formel* $O = 2\pi \cdot \int_0^{75} g(x) \cdot \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2} dx$ *bestimmt werden.*

Wie diese Formeln für Oberfläche und Volumen zustanden kommen, können sich die Schülerinnen und Schüler kaum erklären, allerdings ist das auch nicht gefordert. Es geht vielmehr darum, diese Formeln für Berechnungen anzuwenden und auf Grundlage der erhaltenen Ergebnisse, Aussagen über den Sachzusammenhang zu treffen. Die gleiche Art der Aufgabenstellung („Begründen Sie im Sachzusammenhang…“) findet sich auch im herkömmlichen Abitur.

Die Schwierigkeit, mit Formeln umgehen zu müssen, deren Zustandekommen man nur schwer nachvollziehen kann, findet sich in beiden Aufgabengruppen der Analysis des CAS-Abiturs (Aufgabengruppe 1 Teilaufgabe i, Aufgabengruppe 2 Aufgabe 2 b & c, s.o.). Allerdings ist es ja gerade eine Stärke des CAS, dass man mit solchen meist komplizierten Ausdrücken umgehen kann, da der Rechner die Schülerinnen und Schüler von der Rechenarbeit entlastet und es ermöglicht, dass diese sich auf die Interpretation der Rechnerausgaben konzentrieren können.

Wertet man die Lösungen dieser Teilaufgaben in der vorliegenden Stichprobe aus, so stellt man fest, dass ungefähr 25% der Schülerinnen und Schülern diese Teilaufgaben überhaupt nicht bearbeitet haben, was man so interpretieren könnte, dass sie mit den angegebenen Formeln wohl nicht umgehen konnten. Ungefähr 33% der Schülerinnen und Schüler haben diese Aufgaben völlig richtig gelöst. Ungefähr 42% haben die Aufgaben fehlerhaft bearbeitet. Die Fehlerquelle liegt dabei nicht in der Komplexität der Formeln, sondern *immer* in anderen Bereichen, bei Aufgabengruppe 1 Teilaufgabe i) meistens im Umgang mit Einheiten (Längeneinheiten mussten in Meter umgerechnet werden, Maßstab 1:20).



1) $d = \int_a^b \sqrt{1+(s'(x))^2}\,dx \overset{CAS}{\approx} 15,4208 \cdot 20m = 308,416\,m$

$\frac{4,7}{20} = 0,235$

$\cancel{\frac{0,235}{15,4208m} \approx 1,5\%}$

$\frac{0,235}{308,416} \approx 0,8\%$

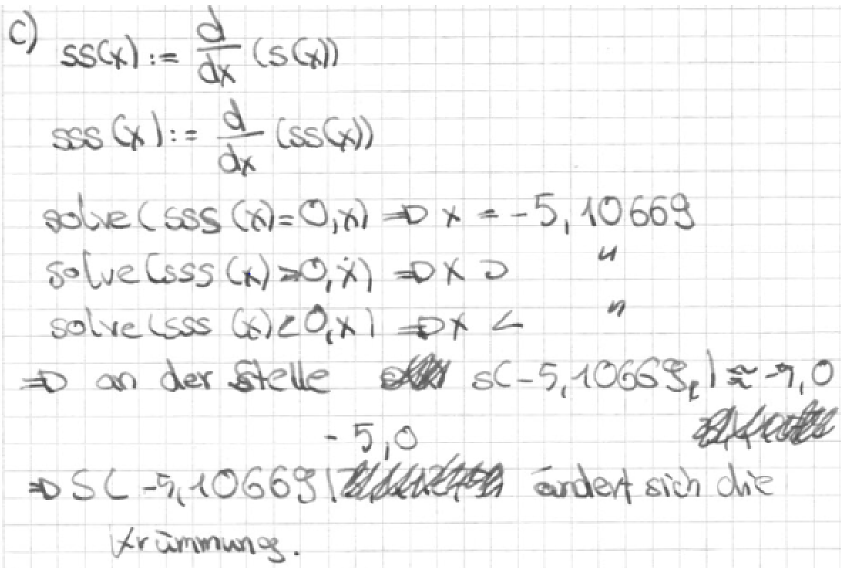
Abbildung 1 - Fehlerquelle Einheiten

Der Fehler liegt hier darin, dass im Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Zähler und Nenner dieselbe Einheit haben müssten, was in dieser Lösung allerdings nicht der Fall ist. Überhaupt werden hier Einheiten fast willkürlich gesetzt oder weggelassen. Ähnliche Fehler wurden noch häufiger beobachtet.

Dokumentation des CAS-Einsatzes

Die Bandbreite der Dokumentation des CAS-Einsatzes reicht von nicht vorhanden bis hin zu unnötig detailreich. Hier müsste man einen sinnvollen Mittelweg finden und möglichst klare Richtlinien aufstellen, was die konkrete Art der Dokumentation angeht. Die verschiedenen Arten der Dokumentation scheinen nicht mit der mathematischen Leistung zusammenzuhängen, d.h. es gibt richtige Lösungen, die nur äußerst knapp dokumentiert sind und falsche Lösungen, bei denen der CAS-Einsatz sehr ausführlich dokumentiert wurde.

Einige Beispiele:



c) $ss(x) := \frac{d}{dx}(s(x))$

$sss(x) := \frac{d}{dx}(ss(x))$

solve(sss(x)=0,x) ⇒ x = -5,10669

solve(sss(x)>0,x) ⇒ x > "

solve(sss(x)<0,x) ⇒ x < "

⇒ an der Stelle s(-5,10669) ≈ -7,0

-5,0

⇒ s(-5,10669) ändert sich die Krümmung.

Abbildung 2 - Dokumentation von Rechnerbefehlen

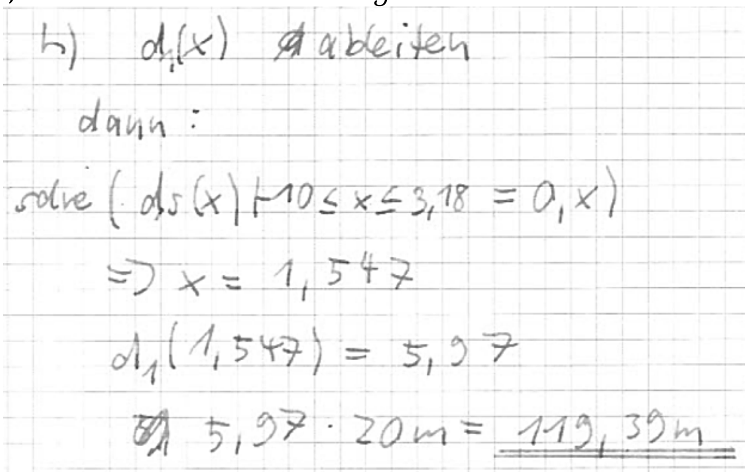
c)

$ss(x) \coloneqq \frac{d}{dx}(s(x))$

$sss(x) \coloneqq \frac{d}{dx}(ss(x))$

$solve(sss(x) = 0, x) \Rightarrow x - 5{,}10669$

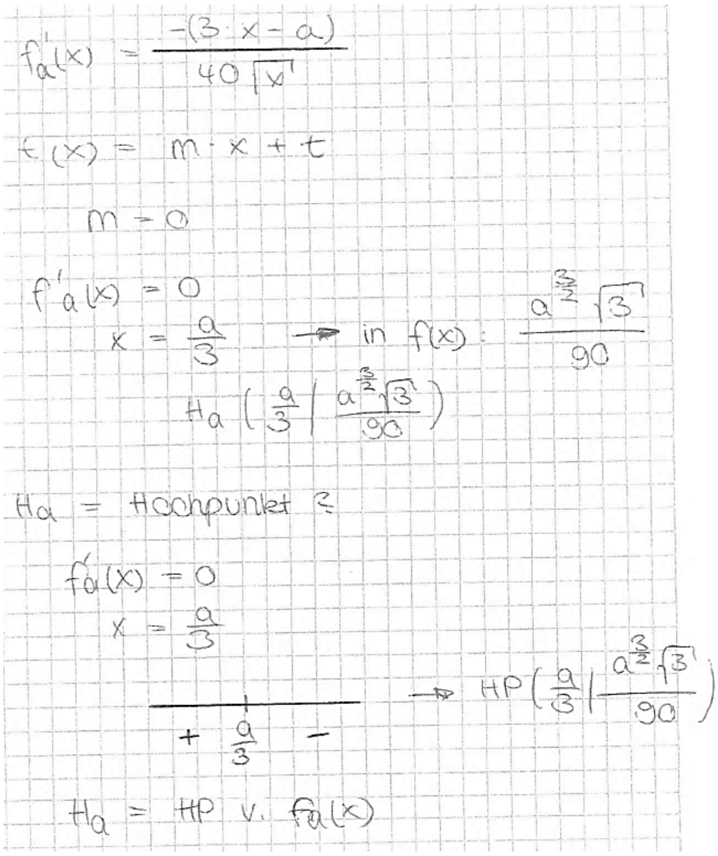
$solve(sss(x) > 0, x) \Rightarrow x > "$
$solve(sss(x) < 0, x) \Rightarrow x < "$
$\Rightarrow an\ der\ Stelle\ s(-5{,}10669,) \approx -1{,}0$
$\Rightarrow S(\ -5{,}10669\ |\ 5{,}0\ ändert\ sich\ die\ Krümmung.$



h) $d_1(x)$ ~~a~~ ableiten
dann:
solve($ds(x) | -10 \le x \le 3{,}18 = 0, x)$
$\Rightarrow x = 1{,}547$
$d_1(1{,}547) = 5{,}97$
~~d~~ $5{,}97 \cdot 20m = \underline{\underline{119{,}39m}}$

Abbildung 3 - Beschreibung von CAS-Tätigkeiten (erste Zeile)

h) $d_1(x) ableiten$
dann:
$solve(ds(x)| - 10 \le x \le 3{,}18 = 0, x)$
$\Rightarrow x = 1{,}547$
$d_1(1{,}547) = 5{,}97$
$5{,}97 \cdot 20\ m = \underline{119{,}39\ m}$



$f'_a(x) = \frac{-(3 \cdot x - a)}{40\sqrt{x}}$
$t(x) = m \cdot x + t$
$m = 0$
$f'a(x) = 0$
$x = \frac{a}{3} \rightarrow$ in $f(x)$: $\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}$
$H_a\left(\frac{a}{3} \middle| \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}\right)$
H_a = Hochpunkt ?
$f'a(x) = 0$
$x = \frac{a}{3}$
$+ \quad \frac{a}{3} \quad - \rightarrow HP\left(\frac{a}{3} \middle| \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}\right)$
H_a = HP v. $fa(x)$

Abbildung 4 - keine explizite Dokumentation von Rechnerbefehlen

$f_a'(x) = \frac{-(3x-a)}{40\sqrt{x}}$
$t(x) = m \cdot x + t$
$m = 0$
$f_a'(x) = 0$
$x = \frac{a}{3} \rightarrow in\ f(x){:}\ \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}$
$H_a\left(\frac{a}{3}\middle|\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}\right).$
$H_a = Hochpunkt?$
$f_a'(x) = 0$
$x = \frac{a}{3}$
[Zeichnung] $\rightarrow HP\left(\frac{a}{3}\middle|\frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}{90}\right)$
$H_a = HP\ v.\, f_a(x)$

Erklärungen

Ein weiterer Aspekt des TC-Einsatzes ist, dass das Erklären und Begründen von Sachverhalten oder Formeln stärker in den Vordergrund rückt. Dabei werden von den Schülerinnen und Schülern vermehrt eigene Texte zu einer mathematischen Themenstellung verlangt. Das ist etwas, was z.B. in der traditionellen Kurvendiskussion nur wenig auftrat.

Bei einigen Aufgaben beider Aufgabengruppen des CAS-Abiturs waren explizit Erklärungen gefordert. Die Schülerinnen und Schüler sind dieser Aufforderung auch häufig nachgekommen. Dabei lässt die Art der Dokumentation darauf schließen, dass Erklärungen innerhalb der mathematischen Lösung eine unterschiedlich starke Bedeutung beigemessen wird. Ein Beispiel aus der Analysis Prüfungsteil B Aufgabengruppe 1 Aufgabe g):

> *g) Begründen Sie, dass der Term $\sqrt{(x-6)^2 + (s(x)+8)^2}$ den Abstand des Punkts T von einem Punkt des Graphen von s angibt.*

Abbildung 4 zeigt die Lösung eines Schülers, in der Erklärungen in Klammern angegeben werden, so als wären sie kein echter Teil der Lösung, quasi „ausgeklammert".

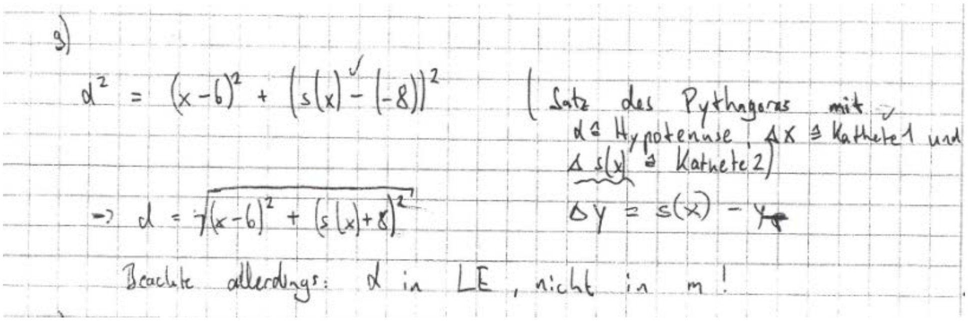


Abbildung 5 - "ausgeklammerte" Erklärungen

Ein weiteres Beispiel aus der Analysis Prüfungsteil B Aufgabengruppe 2 Aufgabe 2d):

> *c) Für den Wärmeverlust eines Pinguinköpers ist das Verhältnis von Oberfläche zum Volumen von großer Bedeutung. Entscheiden Sie mithilfe des in Aufgabe 2b ermit-*

telten Verhältnisses, ob der Körper des Kaiserpinguins im Vergleich zum Körper des Eselspinguins für kältere oder wärmere Regionen geeignet ist. Machen Sie Ihre Entscheidung plausibel.

Daraus kann man schließen, dass es wichtig ist, das Verhältnis von mathematischer Formelsprache und verbalisierter Fachsprache innerhalb von Lösungsdokumentationen klar zu bestimmen. Für die erfolgreiche Interpretation der Schülerlösungen wäre ein erhöhter sprachlicher Anteil an Erklärungen des Vorgehens vor allem zu Beginn des Lernprozesses sehr wichtig. Wie der folgende Abschnitt zeigt, wäre es auch wünschenswert, wenn Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen knapp kommentieren würden, so dass der Leser (die Lehrkraft – im Unterricht auch die Mitschüler) verstehen kann, *warum* der Lösungsweg auf die entsprechende Art gegangen wurde.

Individuelle Lösungswege und Lösungsmethoden

In einigen Fällen zeigen sich individuelle Lösungswege bzw. unerwartete Lösungsmethoden, vor allem die Anwendung von Verfahren aus der analytischen Geometrie in der Analysis.

<u>Aufgabengruppe 1 Teilaufgabe a)</u>

Die Aufgabe lautete, den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden zu bestimmen. Dazu wurden die Geraden nicht in der gegebenen Form als Funktion $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$ aufgefasst, sondern in der geometrischen Form als Gerade mit Aufpunkt und Richtungsvektor. Dies ermöglichte es, den Schnittwinkel der Geraden über das Skalarprodukt zu berechnen.

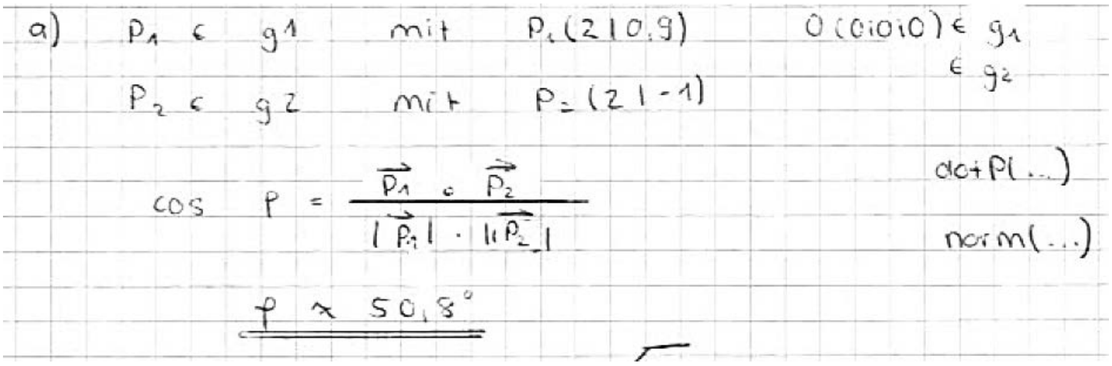


Abbildung 6 – Skalarprodukt in der Analysis

<u>Aufgabengruppe 1 Teilaufgabe i)</u>

Bei dieser Aufgabe ging es darum, das mittlere Gefälle einer Autobahnausfahrt zu bestimmen. Der Fahrbahnverlauf wurde im Modell durch die Funktion $s(x) = 0{,}01156x^3 + 0{,}1771x^2 + 0{,}5230x - 5{,}416$ beschrieben. Dazu war als Hilfe eine Formel für die Länge eines Kurvenstücks angegeben:

Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a; b]$mit $a, b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, so gilt für die Länge d des Kurvenstücks $d = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$.

Um auf die laut Lösungshinweisen gesuchte mittlere Steigung von 1,5% zu kommen, musste man die Länge der Ausfahrt mithilfe oben genannter Formel berechnen und den Höhenunterschied durch dieses Teilergebnis teilen. Dabei trat häufig der Fehler auf, dass die Länge d in Längeneinheiten in den Quotienten einging, dessen Zähler allerdings in Metern angegeben war.

Wie schon oben erwähnt, stellte die richtige Berechnung von d mithilfe des TC kaum ein Problem dar. Eine Schülerin (bzw. ein Schüler) umging die Berechnung des Integrals trotzdem, um auf geometrischem Weg zu einer ungefähren Lösung zu kommen:

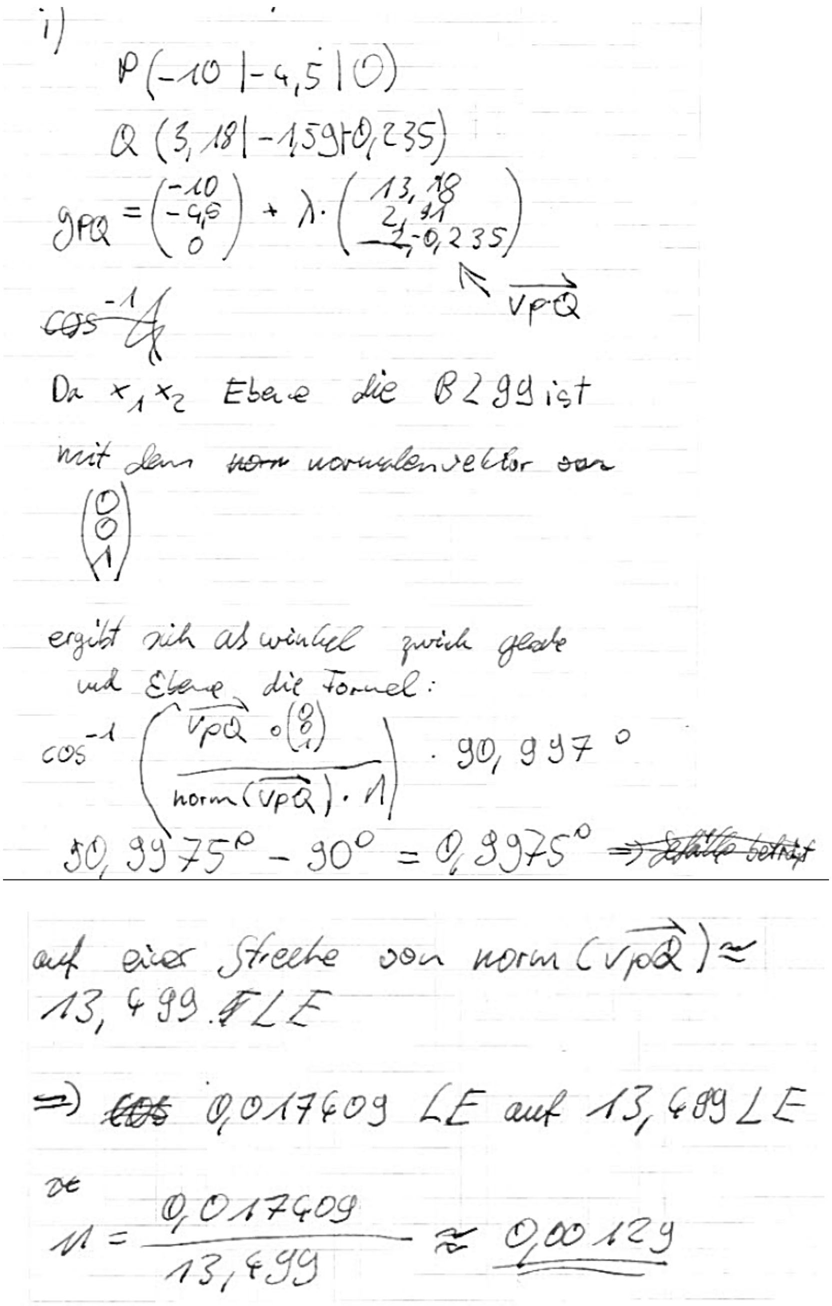


Abbildung 7 - geometrischer Lösungsansatz (mit einigen Fehlern)

Gute CAS-Aufgaben

Ein ganz anderes Problem ist die Frage, was „gute" CAS-Aufgaben überhaupt sind. Diese Frage ist – natürlich – nicht leicht zu beantworten. Man wird zunächst fragen müssen: „gut wofür". Die Güte einer Aufgabe hängt von dem Ziel ab, das man mit ihr erreichen möchte.

In Prüfungen wie dem Abitur geht es darum, festzustellen, welche Fertigkeiten der Prüfling beherrscht. Gleichzeitig versucht man natürlich auch im Abitur den CAS-Einsatz durch sinnvolle Anwendungsbezüge zu rechtfertigen. Aufgrund der Prüfungssituation und der begrenzten Zeit können diese Anwendungsbezüge keine wirklichen oder realen Modellierungen sein. Modellierungsaufgaben in Prüfungen sind deshalb eher Anreize, um derartige Aufgaben – dann auch in Form „echter" Modellierungen, d. h. eines kritischen Durchlaufs des Modellierungskreislaufes – im Unterricht zu behandeln. Wir erachten es deshalb als gerechtfertigt, auch im Abitur Aufgaben mit einem Modellierungshintergrund zu stellen.

Zusammenfassung

Die vielfältigen Schülerlösungen haben interessante Aspekte des TC-Einsatzes in Prüfungen gezeigt und einige Bereiche aufgedeckt, in denen wir einen Handlungsbedarf sehen. Es sollen zunächst die unserer Meinung nach positiven Aspekte der CAS-Aufgaben des Jahres 2014 herausgestellt werden.

Positive Aspekte:

- Modellierungsprobleme zeigen die Bedeutung mathematischer Berechnung in der Analysis.
- Die Aufgaben sind Anreize zur Behandlung entsprechender Modellierungsprobleme im Unterricht.
- Die Aufgaben erfordern das Interpretieren der mit dem CAS erhaltenen Ergebnisse.
- Die Aufgaben erfordern ein breit gefächertes mathematisches Grundlagenwissen.
- Die Aufgaben erfordern auch das verbale Erklären und Begründen von gegebenen Formeln und von zu treffenden Entscheidungen. Dadurch wird in besonderem Maße ein weitergehendes Verständnis überprüft.

Es lassen sich aber auch einige kritische Aspekte der CAS-Aufgaben anführen, wobei „kritisch" nicht unbedingt „negativ" bedeutet, sondern als Aufforderung zu verstehen ist, diese Aspekte verstärkt im Unterricht anzusprechen:

- Vorgegebene für Schüler unbekannte Formeln müssen im Hinblick auf eine Umweltsituation verstanden und angewendet werden. Hier können sich gerade schwächere Schüler überfordert fühlen.
- Schülerinnen und Schüler benötigen die Fähigkeit, die für die Lösung von Aufgaben wichtigen Informationen aus längeren Aufgabentexten zu entnehmen.
- Es gibt noch keine einheitlichen Richtlinien zur Dokumentation des CAS-Einsatzes, was Unsicherheiten bei Schülern und Lehrern gleichermaßen zur Folge hat.
- Schülerinnen und Schülern müssen ein Bewusstsein dafür entwickeln, das eigene Vorgehen – problemadäquat – genauer zu erklären und für Außenstehende nachvollziehbar zu dokumentieren.
- Gute Modelle bilden Umweltsituationen möglichst realitätsnah ab. In Prüfungsaufgaben führt die Verwendung von derartigen „guten" Modellen aber dazu, dass im Allgemeinen der Komplexitäts- und Schwierigkeitsgrad der Aufgabe ansteigt. Der Transfer zwischen Modell und (Real-)Situation stellt eine besondere nicht zu unterschätzende Herausforderung für Schülerinnen und Schüler dar.

Folgerungen

1. Wir halten die CAS-Aufgaben des Jahres 2014 aus oben genannten Gründen für gelungen und möchten uns insbesondere für den weiteren Einsatz von Modellierungsaufgaben auch im Abitur aussprechen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass dafür eine gute Vorbereitung mit adäquaten Modellierungen im Unterricht unerlässlich ist. Dies ist allerdings nicht ganz einfach, da viele „schöne“ Modellierungsaufgaben Unikate in dem Sinne sind, dass sich nicht leicht ähnliche Aufgaben mit analogen Anforderungen für Übungszwecke finden lassen. Es wird also eine Herausforderung in den nächsten Jahren darin bestehen, neue, sinnvolle Aufgaben zu entsprechenden Anforderungsbereichen zu finden und für den Unterricht aufzubereiten.

2. Allein aus den schriftlichen Lösungen der Abituraufgaben lässt sich nur wenig über die technischen Schwierigkeiten (Auffinden entsprechender Befehle, Menüs oder Befehlsketten) aussagen, die die Schülerinnen und Schüler mit dem TC hatten. Die Schwierigkeiten mit dem Einsatz des TC in der Abiturprüfung scheinen aber stärker auf der inhaltlich-mathematischen Ebene (Wissen bzw. Nichtwissen bzgl. entsprechender Lösungsstrategien) als auf der technischen Eben zu liegen. Differenziertere Aussagen bedürften eingehenderen Analysen im Unterrichts- oder Prüfungsprozess.

3. Wir möchten uns für deutliche und klare Hinweise im Hinblick auf die Lösungsdokumentation beim TC-Einsatz aussprechen. Auch das ist keine leichte Aufgabe, da diese Dokumentationen stets problemabhängig gesehen werden müssen und schließlich auch die persönlichen Grundüberzeugungen und Einstellungen von Lehrkräften nicht übergangen werden dürfen. Aber vielleicht lässt sich hier doch zumindest ein Minimalkonsens finden.

Insgesamt sehen wir die CAS-Aufgaben des Abiturjahres 2014 als interessante und motivierende Problemstellungen, deren Anforderungsstufe bzgl. der Modellierung und des Umgehens mit und Verstehens der Aufgabentexte (vor allem bzgl. der Länge) am oberen Ende angekommen sein dürfte.

Literatur

Pallack, Andreas. „Die gute CAS-Aufgabe für die Prüfung.“ Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. S. 43-46.