Jan WÖRLER, Würzburg

Les séquences dans l'art moderne

Remarquer et continuer des légalités

Groupe de travail:	6ième-9ìeme année scolaire
Idée :	façonner et simuler d'une façon « concrète » à l'aide de l'exemple des légalités dans l'art moderne
Sujet :	arithméthique / séquences
Feuille de travail 1 :	Découvrir les structures, p.21
Feuille de travail 2 :	Démonstration de la séquence de Fibonacci
Temps :	1-2 Heures de cours par œuvre
Matériel sur ligne :	Applet Ordinateur pour feuille de travail 1, schéma pour feuille de t ravail 2 sous www.dmuw.de/projekt/kunst

Des barres rouges de plus en plus longues se déplacent de gauche à droite à travers d'une face bleue. A bien des points de vue, le tableau « Nr. 1408 » (voir **feuille de travail 1**) de l'artiste Carles Bézie est un œuvre typique de l'art concrète : il est bien structuré, coloré de quelques couleurs puissantes et se comporte d'une façon neutre envers le contemplateur. L'exactidue méticuleuse dont laquelle Bézie a mis les barres horizontales, écartées régulièrement, sur l'arrière-plan est aussi un trait caractéristique pour ce genre artistique. En contemplant le tableau plus long, on peut remarquer que les barres commencent à brouiller doucement, ils semblent se bouger. Le contraste entre les couleurs irrite les yeux. Des nuances de couleur et de structure intensifient l'effet – mais, d'un point de vue objectif, ils restent des barres rouges sur une face bleue.

Les écarts réguliers soulèvent une question :

➔ *La construction du tableau Nr. 1408, est-elle à la base d'une certaine légalité ?*

Alors on commence à chercher des rapports et des règles qui pourraient avoir abouti au modèle de l'œuvre. En jouant ce « jeu de devinette », négliger les saturations de couleur et les détails pour suivre seulement les traces claires serait utile.

Première analyse du tableau et questions suivantes

En cas de l'œuvre « Nr. 1408 » de Bézie on peut commencer à compter simplement pour prospecter la construction du tableau. (**Abb. 1**). En divisant le tableau en colonnes pour des barres qui ont la même longueur, les 89 barres rouges de la colonne gauche coupent son hauteur en 90 intervalles équidistants comme un décamètre à ruban. En rapport avec la première colonne seulement chaque deuxième bârre dans la deuxième colonne est rouge, dans la troisième c'est le cas pour chaque troisième et dans la quatrième chaque cinquième barre est rouge. En faisant l'analyse pour la colonne qui reste encore à prospecter, un rapport se voit : á chaque fois les 1ier, 2ièmes, 3ièmes, 5ièmes, 8ièmes, 13ièmes et 21ièmes barres sont marqués – et voilà le début de la séquence de Fibonacci.

➔ *Les différentes largeurs des colonnes verticales peuvent-elles aussi être expliquées par une séquence (de Fibonacci) ?*

Les largeurs des colonnes résultent de l'écart entre chaque première barre rouge et le bord supérieur du tableau. Autrement, une colonne pourrait être dessiné si large après la largeur de ces voisins gauches, suivant la définition récursive de la séquence ($a_m := a_{n-2} + a_{n-1}$ avec $a_1=1$, $a_2=2$). Ces deux possibilités, sont-elles équivalentes ?

Après avoir résolu la mise en ordre des barres rouges on peut continuer à demander :

- ➔ *Comment le modèle trouvé pourrait-il être continué dehors les bords du tableau ?*
- ➔ *Qu'est-ce qui change si on ajoute un autre chiffre de Fibonacci ?*
- ➔ *Des autres séquences, ont-elles un modèle semblable comme résultat ? Si oui, peut-on en trouver des modèles spéciaux ?*
- ➔ *De quelle mesure la monotonie d'une séquence influence-t-elle le modèle contemplé ; quels sont les signes distinctifs d'une monotonie stricte ?*
- ➔ *Quelles qualités le modèle a-t-il si on analyse les nombres carrés au lieu des nombres de Fibonacci ?*
- ➔ *Comment une séquence doit-elle être composée pour avoir au moins une barre qui traverse tout le tableau ?*

Après avoir aperçu le relation entre la séquence analysée et la suite et la distribution et longueur des barres rouges c'est possible de simuler le tableau comme applet ordinateur (**Abb. 1**). Si on arrive á créer un moyen pour contrôler les membres d'une séquence on peut répondre aux questions posées d'une façon explorative (**Abb.2**).

Découvrir la mathématique dans des œuvres de l'art concrète

Presque chaque œuvre de l'art concrète suit un certain « modèle » qui se compose de règles mathématiques. Ce fait résulte du « manifeste de l'art concrète » (Theo van Doesburg, 1930, voir p.7 dans ce cahier). Car ces œuvres sont obligées à être « généralement admis », les artistes concrètes ont souvent adopté des principes, sujets ou méthodes mathématiques. Le contemplateur aide à la confrontation de ces œuvres avec l'art concrète, qu'elles doivent être construites d'une façon « simple » et « vérifiable » visuellement ce qui permet en principe de trouver les plans de construction qui servent comme la base et en plus d'apprendre les relations.

Normalement, les contemplateurs – soit visiteur du musée, soit apprenants au cours – ne remarquent pas à première vue les légalités qui peuvent être trouvés dans un œuvre. Seulement une analyse plus précise permet de révéler peu a peu le plan de construction. Pour y arriver il faudra chercher les régularités. Les hypothèses sont à poser, à contrôler et parfois à rejeter, mais aussi à réduire, à abstraire, à généraliser. D'un tel point de vue la découverte de la matière mathématique d'un tableau a beaucoup à voir avec les actions qui sont réclamées pendant qu'on modèle d'une façon mathématique : là il faut aussi trouver des relations et des régularités qui sont premièrement inconnues et étoffer les facteurs importants.

Contrairement au fait de façonner des situations réales les œuvres de l'art concrète s'appuient souvent sur quelques paramètres qui sont importants pour le tableau et qui ont été fixés par les artistes. Ces paramètres se réfèrent souvent déjà à la mathématique et ce n'est pas encore nécessaire de les transmettre au « monde mathématique ». Alors un œuvre permet d'être décrit par un modèle mathématique. Tributaire de l'œuvre, de la préconnaissance du contemplateur et de l'intensité de l'analyse des modèles simples ou complexes vont surgir.

Après l'art de façonner un œuvre de l'art concrète permet d'être regardé comme un système de tailles et de relations mathématiques. Par rapport à la didactique la question d'une description mathématique de ce system, laquelle doit être « le plus précis que possible », est un bon environnement pour apprendre et pratiquer. Enfin c'est possible de conduire aux situations réelles qu'on peut aussi modeler.

Modeler des œuvres d'art et inventer de variantes

Le traitement des œuvres d'art concrète au cours de maths pourra se passer en deux étapes. L'aspect central de la première phase c'est le fait de « modeler » le tableau. La deuxième phase s'occupe de l'exploration du modèle trouvé – aussi d'une façon dynamique à l'aide de simulations interactives. (**Abb. 3**)

Phase I : Modélisation

Les élèves vont être confrontés avec un œuvre d'art. Ayant posé la question générale : *« Quelles traces de mathématique se cachent dans cet œuvre d'art ? »* ils indiquent les tailles et les relations qui décrivent complètement la structure de l'image si possible. Trois pas sont nécessaires :

➔ *Analyse mathématique*
Des modèles sont relevés, régularités sont reconnues et décrites avec la mathématique. L'analyse trace de constantes (comme la carrure de l'image) et de variables (comme les couleurs) et aussi les relations fonctionnelles parmi les tailles (comme la distribution des couleurs sur la face)

➔ *Visualisation*
Les relations indiquées sont visualisées comme brouillon sur papier ou à l'aide d'une logiciel (DGS, Flash, Java…)

➔ *Validation*
La comparaison entre brouillon et œuvre d'art donne une réaction sur la qualité de l'analyse. Si les deux concordent du point de vue mathématique la somme de tailles et relations trouvées peut être regardé comme complet.

Ces trois pas sont à répéter jusqu'à ce la validation donne un résultat agréable.

Phase II : Simulation et modélisation

Au lieu de l'œuvre d'art le modèle mathématique qu'on a trouvé est maintenant au centre de l'analyse. *« Comment se comporte-t-il sous le changement des paramètres ? »* Des questions qui vont plus loin que l'œuvre et des nouvelles perspectives de la mathématique deviennent ainsi possibles. Tandis qu'en phase I à la recherche de régularités la question *« Comment pouvons-nous continuer ? »* avait été poseé, l'aspect du changement devient plus important : *« Comment le tableau pourrait-il être si on change les paramètres ? »* (voire **feuille de travail 1**, exercice 3)

Les variations du tableau et des questions qui vont avec peuvent être étoffées en utilisant du papier et un crayon. Pour analyser la conséquence de quelques paramètres du tableau il est secourable d'implémenter le modèle mathématique (donc les éléments trouvés et leurs relations) comme simulation sur ordinateur. Puis, les élèves peuvent changer les paramètres et observer les conséquences directement devant l'ordinateur ce qui soutient la compréhension des relations fonctionnelles. A la fois la productivité et les limites d'une telle simulation sont démontrées.

Les élèves peuvent créer des simulations pareilles à l'aide d'un logiciel standard (Scratch etc.) Parfois il sera aussi nécessaire de demander des élèves qui sont vraiment doués en quoi qui concerne l'ordinateur et la programmation à faire les implémentations ou à donner des applets qui sont déjà prêts.

Deux autres tableaux qui montrent des séquences

Les plans de construction de l'art concrète permettent de trouver une vraie pluralité de sujets mathématiques comme « les dates et le hasard », « la topologie », « images géométriques », « cubes multidimensionels » ou « fractales ». De cette diversité il y en a deux œuvres qui vont être analysées maintenant et qui se réfèrent au terme de « séquence ». Ils appartiennent à la collection Peter C. Ruppert qui est exposée au musée de « Kulturspeicher » à Würzburg (www.kulturspeicher.de).

La suite de Fibonacci
Alors, comment la phase de modélisation pourrait-elle être organisée ? Premièrement, il faut donner une œuvre d'art comme le relief de « la suite de Fibonnacci » de Burkhard Schürmann (www.schuermann-art.de) . Elle consiste en 16 plaques en bois qui sont blanches et carrées et ne se distinguent qu'á leur surface. Arrangées en deux files elles paraissent être situées du même titre. (**Abb. 4a**) La question qu'on pourrait maintenant poser est la suivante :

➔ *Comment une 17ème plaque devrait-elle être faite pour compléter cette œuvre d'art logiquement ?*

Pour y répondre il faudra faire référence à la mathématique. Dans ce cas présent elle devient visible à l'aide d'une comparaison avec d'autres œuvres de Schürmann : dans ces tableaux « texte-image » ou « texte-objet »l'artiste transfère des mots, chiffres et texte à un système binaire qu'il dérive du code Morse. Il semble que des chiffres – comme le texte laisse à supçonner – aient été transmis, au code Morse, ils sont démontrés chiffre par chiffre. (**Abb. 4b**)De cette façon, Schürmann « écrit » chaque fois les 16 chiffres sur chaque plaque. En enlevant les pauses il construit d'un code Morse trinaire un cadre binaire, ce qui a plusieurs chiffres est montré chiffre par chiffre sur la plaque, du haut en bas. Un brouillon des relations montre que notre jeu de devinette a eu du succès.

L'analyse peut être regardée comme « complète » si les relations relevées permettent d'expliquer ou d'élargir la construction de l'œuvre. Nous sommes maintenant capables de dire comment elle pourrait continuer : la « prochaine » plaque serait le chiffre 2584 qui devrait être montrée en bois comme le montre image **4d**.

Evolution : progression et symétrie I + II
Lorsque le regard du titre de l'œuvre sert comme clé de l'analyse du relief de Schürmann, la question « *Où est-ce qu'on trouve de la mathématique dans une œuvre d'art ? »* est difficile à répondre au cas de « évolution : progression et symétrie I + II » de Rune Mields. Ici une approche est nécessaire. (**2**). Rapidement, les élèves ont l'idée de négliger les couleurs des triangles qui composent l'œuvre pour compter les éléments de chaque figure ce qui va bien à l'aide d'une copie sur une feuille A2. Encore une fois le rôle de la suite de Fibonacci ressortit des figures en bas et l'hypothèse est confirmée si on continue à compter.

Il apparaît que Rune Mields prenne un petit triangle isocèle qui est égale à 1. Les chiffres de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 s'articulent symétriquement comme combinaison additive sur la face autour d'une verticale ascendante. Ce fait explique aussi les couleurs de chaque figure : l'artiste souligne la récursivité de la suite en donnant à chaque figure le précédent directe comme forme partielle. (**Abb. 5a**)

La forme partielle suivante devrait être composée de 89+144 = 233 petits triangles qui s'articulent symétriquement autour la verticale et qui devrait aussi inclure son « précédent », le triangle noir. Une composition possible est montrée dans l'image 5b.

La deuxième phase de l'analyse peut encore varier (**Abb. 6**)

➔ *Qu'est-ce qu'on aurait comme résultat en remplaçant la suite de Fibonacci par la suite des nombres carrés ? Quelles qualités seraient visible ?*

Pourquoi les artistes s'intéressent-ils aux séquences ?

Les œuvres de Burkhard Schürmann et Rune Mields montrent comme la suite de Fibonacci peut être traitée différent dans l'art concrète. (plusieurs exemples sur ce sujet « la suite de Fibonacci dans l'art concrète se trouvent chez Lehmann, 2009). En plus, il montrent un problème pratique : la présentation des éléments d'une suite, soit à l'aide de la mathématique soit à l'aide de l'art, est obligée à se limiter à une sélection finie. Ainsi les premiers éléments d'une suite présentent « pars pro toto » la suite. Le complément des éléments suivants – qui n'est pas du tout évident – reste au contemplateur.

Si c'est possible de nommer les règles pour construire une suite, elles sont au fond une instruction d'un procès par étapes. Au monde réel, tels procès sont liés au facteur « temps ». C'est pourquoi le mot « suite » est souvent associé à la « dynamique » et au « développement ». Le fait de regarder une suite comme *suite* ou *ordre* la fait intéressant comme élément dynamique. Aussi les élèves voient plus fort la succession de nombres comme qualité d'une suite. (voire « mathematik lehren, cahier 96, « Folgen », 1999).

Avec son œuvre « évolution : progression et symétrie », Rune Mields prend par exemple aussi l'aspect du « développement dynamique » comme thème. Il paraît surtout dans suites qui sont monotones, c'est-à-dire soit elles augmentent par chaque pas soit elles baissent. La monotonie se manifeste par le mot « progression », un synonyme de « croissance ».

Feuille de travail: L'art concrète I

L'artiste français Carles Bézie fait des tableaux qui ne sont composés que d'une seule barre sur une face unicolore. Tu peux voir son œuvre « Nr. 1389 » ici.

➔ **EXERCICE 1.**

a. Peux-tu expliquer comment la position des barres et leurs écarts sont réalisés?

b. Combien est la distance entre les barres ? Regarde aussi bien le format du tableau.

c. Explique le rapport entre l'amplitude du tableau et les écarts ?

➔ **EXERCICE 2.**

Un autre tableau du même artiste s'appelle « Nr. 1408 » et est sensiblement plus grand.

a. Compare les deux tableaux. Quelles différences et quelles convergences peux-tu trouver ?

b. Trouves-tu une description par chiffes qui explique la position des barres rouges ? Quelles sont les qualités de ces chiffes ? Peux-tu remarquer un certain système ?

c. Regarde bien : quelques barres ont une autre couleur. Comment ce fait dépend-il du système ?

d. La taille du tableau est 180 cm. Comment doit être son amplitude ?

➔ **EXERCICE 3.**

a. Comment le tableau « Nr. 1408 » devrait-il être dessiné si on ajoutait une colonne de barres supplémentaire à droite ? Comment serait son amplitude ?

b. Peux-tu trouver des nombres qui sont arrangés après le même principe et qui ont comme résultat un tableau qui est symétrique par rapport à un axe vertical ?

c. Peux-tu trouver des nombres à l'aide de lesquelles le tableau devient symétrique par rapport à un axe horizontal ? Tu peux choisir la taille du tableau.

d. Trouves-tu une composition pour laquelle au moins une barre se déplace sur toute l'amplitude du tableau ? Quels moyens sont possibles ? Comment est le rapport avec les nombres qui servent comme base ?

Feuille de travail: L'art concrète II

Dans ses œuvres, l'artiste Rune Mields qui habite à Cologne prend souvent des objets mathématiques comme des suites, des figures géométriques, des symétries ou des figures pour thème.
Voici tu peux voir quatre tableaux de la série « évolution : progression et symétrie »

➔ **EXERCICE**

a. Compare les quatre tableaux. Quelles différences et quelles convergences peux-tu trouver ?

b. Compte ou essaie de calculer combien de triangles font la composition d'une figure et écris les nombres dans une suite.

c. Regarde les nombres que tu as notés et trouve le système qui se cache derrière. Peux-tu voir une relation entre les nombres ?

d. Peux-tu reconnaître le système dans les tableaux ? Si oui, où exactement ? Ecris une courte déclaration pour un visiteur du musée.

e. Imagine que les tableaux continuent après le même système. Après avoir choisi un de ces tableaux, esquisse une figure qui pourrait se trouver au dessus de la figure la plus haute. Combien de triangles composent cette figure ?