Finanz- und Versicherungsmathematik: Einblicke & Beispiele

Prof. Dr. Tom Fischer

Professur für Stochastische Finanzmathematik

Institut für Mathematik
Universität Würzburg

tom.fischer@uni-wuerzburg.de

22. Mai 2012

- Bewertung und Absicherung ("hedging") von Anleihen, Termingeschäften, Derivaten, Optionen.
- Bsp. Anleihe:
  Die BRD will einen Kredit über EUR 1 Mrd. für ein Jahr aufnehmen.
  Kostenpunkt?
- Bsp. Termingeschäft:
  Eine Fluggesellschaft will Kerosin zu einem heute fest vereinbarten Preis kaufen – zahlbar und lieferbar in einem Jahr. Preis?
- Bsp. Derivat:
  Ein Investor will sich gegen den Kursverfall einer Aktie absichern. Fällt die Aktie unter einen bestimmten Preis, soll eine Versicherungssumme gezahlt werden. Preis der Absicherung?

Ist Finanzmathematik wichtig?

Statistiken der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich (BIZ/BIS) in Basel:

- *Over-the-counter (OTC) derivatives* (Stand: Juni 2011):

  USD 707.569.000.000.000

  (*notional amounts outstanding*)

  USD 19.518.000.000.000

  (*gross market/replacement value*)

- *International & domestic debt securities* (alle Em.; Stand: Dez./Sep. 2011):

  USD 98.653.900.000.000

- Zum Vergleich, das geschätzte Welt-Bruttoinlandsprodukt (BIP) 2011 laut *CIA World Factbook*:

  USD 70.160.000.000.000

- Stellen Sie sich ein 10%-Problem vor!

Methoden

- **Situation:**
  - Ein neues Finanzprodukt soll verkauft werden (s. Bsp. oben).
  - Zu welchem Preis soll der Verkäufer (z.B. Investmentbank) das Produkt anbieten, bevor es im freien Markt gehandelt wird?
- **Fakt:** Preise werden letztlich immer vom Markt bestimmt.
- **Problem:** Das Finanzprodukt ist noch nicht im Markt (Marktpreis unbekannt). Der Preis soll
  - nicht zu hoch sein (sonst keine Käufer).
  - nicht zu niedrig sein (sonst zu wenig Profit).

Beispiel 1 (deterministische Finanzmathematik)

Neues Produkt:

- BRD Kreditaufnahme: EUR 1,00 Mrd. für ein Jahr.
- Rückzahlung in einem Jahr: EUR 1,02 Mrd.
- "1,02 Mrd. in einem Jahr" kosten heute 1,00 Mrd.
  ("Preis" wurde so festgesetzt.)

$\Rightarrow$ 2% effektiver Jahreszins.

$\Rightarrow$ Eine Investorin kann z.B. EUR 1.000 investieren ("Bundesanleihe A") und bekommt in einem Jahr EUR 1.020 zurück.

Frage: Ist der Preis gut bzw. korrekt?

Im Markt schon vorhandenes Produkt:

- Ein Jahr zuvor, BRD Kreditaufnahme: EUR 20,00 Mrd. für 2 Jahre.
- Rückzahlung in einem Jahr (von heute): EUR 20,808 Mrd.
- Effektiver Jahreszins über zwei Jahre: 2% pro Jahr ($(1{,}02)^2 = 1{,}0404$).
- Marktpreis heute: EUR 20,202 Mrd.

$\Rightarrow$ Effektiver Jahreszins heute: 3% ($20{,}808/20{,}202 \approx 1.03$).

$\Rightarrow$ Eine Investorin kann z.B. EUR 1.000 investieren ("Bundesanleihe B") und bekommt in einem Jahr EUR 1.030 zurück.

Annahmen: Wir können

- Bundesanleihen zu den obigen Preisen kaufen und verkaufen.
- Bundesanleihen für ein Jahr ausleihen (umsonst).

Eine Investorin wird nun:

1. Bundesanleihe A ausleihen (von Herrn X).
2. Bundesanleihe A verkaufen: EUR +1.000
3. Bundesanleihe B kaufen: EUR –1.000

⇒ Gesamtausgaben heute: EUR 0

4. ein Jahr warten.
5. Bundesanleihe B verkaufen: EUR +1.030
6. Bundesanleihe A kaufen: EUR –1.020
7. Bundesanleihe A zurück geben (an Herrn X).

⇒ Gesamteinnahmen nach 1 Jahr: EUR +10

- Was mit Bundesanleihe A gemacht wurde, nennt man auch **Leerverkaufen** (Engl.: "short selling").

- Die Investorin kann dies mit 1.000 oder 1.000.000 Bundesanleihen tun.
- Sie wird ohne jegliche Kosten oder Risiken reich.
- Einen Profit ohne Risiko und ohne Kosten nennt man **Arbitrage**.

- **Problem:** *Jeder* will risikolos reich werden.
- Wenn jeder A verkauft, und B kauft, dann wird der Preis von A fallen, und der von B steigen, bis zum Schluss die Zinssätze beider Anleihen identisch sind.

$\Rightarrow$ Die Abitrage-Möglichkeit verschwindet.

$\Rightarrow$ Standardannahme der Finanzmathematik:

No Arbitrage!

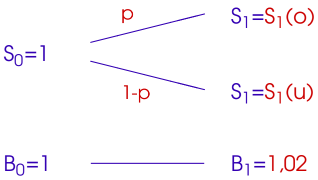
- Anleihe A war nicht marktkonsistent gepreist.
(Übungsaufgabe: Wie sähe ein marktkonsistentes A aus?)

"arbitrage" = (Chance auf) Gewinn ohne Kosten & Risiko

"no arbitrage" $\Leftrightarrow$ Gleichgewicht $\Leftrightarrow$ faire/rationale Preise

"no arbitrage pricing" $\widehat{=}$ "risikoneutrale Bewertung"

Beispiel 2 (stochastische Finanzmathematik)



- Preisprozess, Aktie "S": $(S_t)_{t=0,1}$
  $S_1(o) > S_1(u)$
- Bond, festverzinsliche Anleihe "B": $(B_t)_{t=0,1}$
  Beachte: $B_1(o) = B_1(u) = 1{,}02$
- Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben durch $0<p<1$.
  $p + (1-p) = 1 = 100\%$

Konkreter, z.B.:

$$S_0=1 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{p} S_1=1{,}05 \\ \xrightarrow{1-p} S_1=1{,}03 \end{array}$$

$$B_0=1 \longrightarrow B_1=1{,}02$$

- Verkaufe B ($\widehat{=}$ Kredit zum Zinssatz 2%), kaufe S.
- In t=0: Preis = 0
- In t=1: Gewinn = 1,05–1,02 = 0,03 oder 1,03–1,02 = 0,01.
- Sicherer Gewinn, keine Kosten & kein Risiko $\Rightarrow$ Arbitrage!

$\Rightarrow$ In realen Märkten daher unwahrscheinlich.

$S_0=1$ $\xrightarrow{p}$ $S_1=1{,}03$

$S_0=1$ $\xrightarrow{1-p}$ $S_1=1{,}01$

$B_0=1$ $\longrightarrow$ $B_1=1{,}02$

$\Rightarrow$ "No arbitrage"! (unabhängig von p)

$\Rightarrow$ In realen Märkten daher unwahrscheinlich.

Derivat X (zum zweiten Preisprozess)

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{p}{\nearrow} & X_1=0 & (S_1=1{,}03) \\
X_0=? & & & \\
 & \underset{1-p}{\searrow} & X_1=1 & (S_1=1{,}01)
\end{array}
$$

- X versichert gegen ein niedriges Ergebnis von S_1.
- Fairer/rationaler Preis X_0 von X zur Zeit t=0?

Duplizierung/Absicherung ("hedging")

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{p}{\nearrow} & S_1=1{,}03 & (X_1=0) \\
S_0=1 & & & \\
 & \underset{1-p}{\searrow} & S_1=1{,}01 & (X_1=1) \\
 & & & \\
B_0=1 & \longrightarrow & B_1=1{,}02 &
\end{array}
$$

- Portfolio (s,b), so dass

$$
\begin{aligned}
0 &= 1{,}03s + 1{,}02b \\
1 &= 1{,}01s + 1{,}02b.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ s = -50, b $\approx$ 50,49 ("-" bedeutet Leerverkauf!).

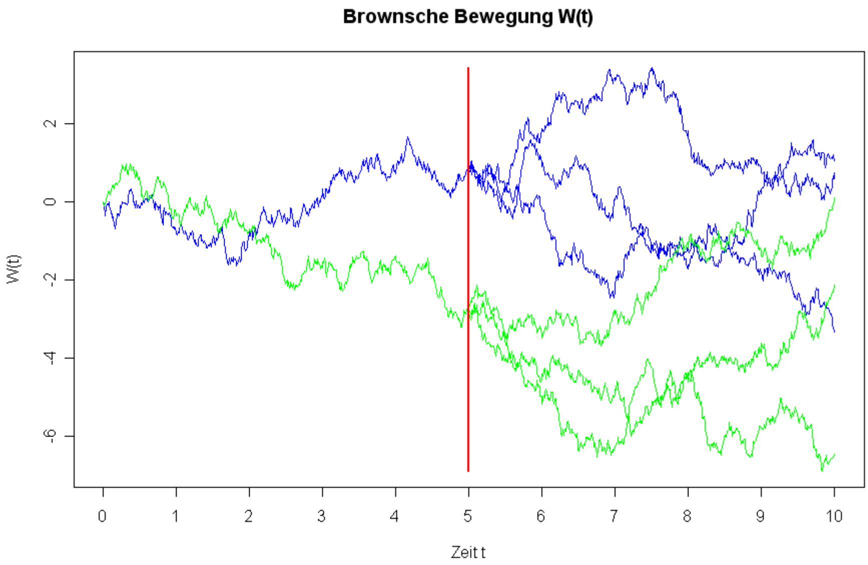
$\Rightarrow$ $X_1 \approx -50 \cdot S_1 + 50{,}49 \cdot B_1$

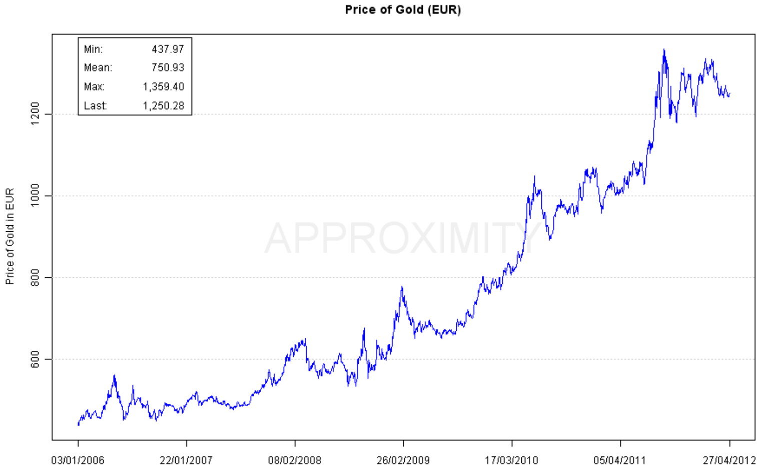
$\Rightarrow$ Preis unter "no arbitrage": $\mathbf{X_0} \approx -50 \cdot S_0 + 50{,}49 \cdot B_0 = \mathbf{0{,}49}$.

$\Rightarrow$ Der Preis von X ist unabhängig von p!

Ist Finanz*mathematik* anspruchsvoll?

- Der wahrscheinlichkeitstheoretische ("stochastische") Teil kann sehr anspruchsvoll sein.
- Verwendet werden u.a.
  - zeitstetige stochastische Prozesse.
  - stochastische Differentialgleichungen.
  - Martingaltheorie.
  - Funktionalanalysis.
- Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1997 an R. Merton und M. Scholes (Black-Merton-Scholes Formel der Optionsbewertung).
- Es lohnt sich!


Brownsche Bewegung W(t)
W(t)
2
0
-2
-4
-6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Zeit t



(Quelle: www.approximity.com)

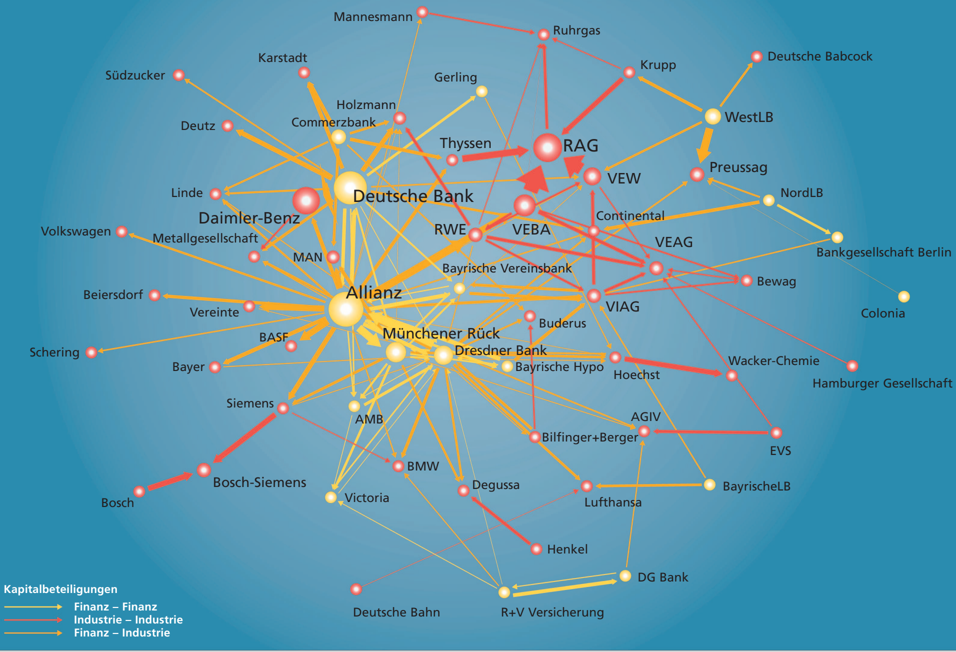
- "No-arbitrage pricing under systemic risk: accounting for cross-ownership"
- No-Arbitrage-Gleichungen müssen gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^m &= \min\left\{\mathbf{d}^m_{\mathbf{r}^m,\ldots,\mathbf{r}^0}, \quad \mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{r}^k\right\} \\
\mathbf{r}^j &= \min\left\{\mathbf{d}^j_{\mathbf{r}^m,\ldots,\mathbf{r}^0}, \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{r}^k - \sum_{k=j+1}^{m} \mathbf{d}^k_{\mathbf{r}^m,\ldots,\mathbf{r}^0}\right)^+\right\} \quad (0 < j < m) \\
\mathbf{r}^0 &= \left(\mathbf{a} + \sum_{k=0}^{m} \mathbf{M}^k \cdot \mathbf{r}^k - \sum_{k=1}^{m} \mathbf{d}^k_{\mathbf{r}^m,\ldots,\mathbf{r}^0}\right)^+
\end{aligned}$$

- Jede der obigen Gleichungen ist jeweils n-dimensional!
- Die folgende Darstellung der **Deutschland AG** ist aus

`www.mpifg.de/aktuelles/themen/doks/Deutschland_AG_1996bis2006.pdf`
(©L. Krempel).

Kapitalverflechtungen in Deutschland 1996



Versicherungsmathematik: Worum geht es?

- Bewertung/Berechnung von
  - Versicherungspolicen
  - Versicherungsprämien
  - Kapitalrückstellungen

- Versicherungsarten:
  - Lebensversicherung
  - Rentenversicherung
  - Sachversicherung
  - Rückversicherung

Relevanz

Jahresbericht der BaFin (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht) 2010 über die **deutschen Lebensversicherer**:

- Brutto-Beiträge (2010): EUR 86,2 Mrd.
- Kapitalanlagebestand (2010): EUR 734,427 Mrd.

Kapitalanlagen **aller** deutschen Versicherer: EUR 1.367,824 Mrd.

Mathematische Methoden

- Finanzmathematik(!)
- Statistik, "Gesetz der Großen Zahlen"
- Prämienprinzipien und Risikomaße

Danke für's Zuhören!

Prof. Dr. Tom Fischer

Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Campus Hubland Nord
Emil-Fischer-Straße 30
97074 Würzburg

E-Mail: tom.fischer@uni-wuerzburg.de