

**Projekt über die Stabilität von Differentialgleichungen
für Proseminar aus Differentialgleichungen (PS 621.025) WS
05/06**

Thomas Hirschler

Martin Filzmaier

Andreas Philipp

Christoph Unterberger

THOMAS HIRSCHLER, MATNR. 8530378

E-mail address: hirsch@fluidmech.tu-graz.ac.at

MARTIN FILZMAIER, MATNR. 0310519

E-mail address: martin.filzmaier@stud.uni-graz.at

ANDREAS PHILIPP, MATNR. 0312877

E-mail address: andreas.philipp@stud.uni-graz.at

CHRISTOPH UNTERBERGER, MATNR. 0212464

E-mail address: christoph.unterberger@stud.uni-graz.at

ZUSAMMENFASSUNG. Im ersten Abschnitt wird die Stabilität im Spezialfall skalarer autonomer Differentialgleichungen behandelt, während im zweiten die Theorie auf autonome 2-dimensionale Systeme ausgedehnt wird, und im dritten schließlich ein Beispiel (mit allen auftretenden Fällen) untersucht wird.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| 1. Skalare autonome Differentialgleichungen | 4 |
| 1.1. Hilfsmittel | 4 |
| 1.2. Einführung und Motivation | 4 |
| 1.3. Theorie | 6 |
| 1.4. Strukturelle Stabilität und Bifurkation | 11 |
| 2. Qualitative Theorie autonomer 2-dimensionaler Systeme | 18 |
| 2.1. Einführung | 18 |
| 2.2. Lineare Systeme | 18 |
| 2.3. Nichtlineare Systeme | 25 |
| 3. Explizite Behandlung eines „verwickelten“ Beispiels | 27 |
| 3.1. Allgemeiner Fall | 35 |
| 3.2. Konstruktion eines expliziten Beispiels | 40 |

1. Skalare autonome Differentialgleichungen

1.1. Hilfsmittel. Wie aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt ist, gilt der folgende Satz¹.

SATZ 1.1 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz). *Sei in der skalaren autonomen Differentialgleichung*

$$\dot{x} = f(x)$$

f lokal Lipschitz-stetig, es gelte also

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists U_\delta(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x)) \exists K = K(\delta(x)),$$

so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad (\forall x_1, x_2 \in U_\delta(x)),$$

dann gilt

(a) *Das Anfangswertproblem (AWP)*

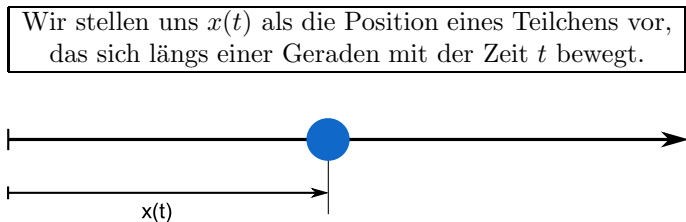
$$\dot{x} = f(x) \quad \wedge \quad x(t_0) = x_0$$

hat eine eindeutige Lösung.

(b) *Diese Lösung kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.*

BEWEIS. Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen. □

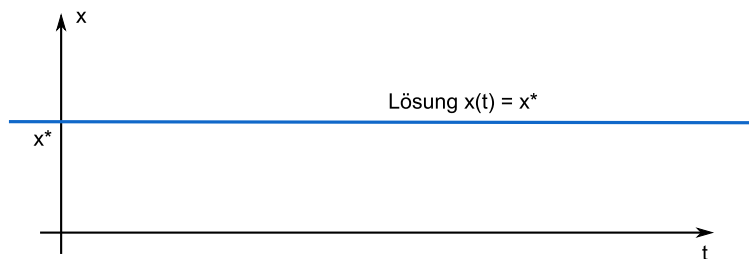
1.2. Einführung und Motivation. Das Ziel des *qualitativen Zugangs* ist es, den Verlauf von Lösungskurven abzuschätzen, ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen (was in den meisten Fällen ohnehin nicht möglich ist). Die Vorstellung die dem qualitativen Zugang zugrunde liegt ist folgende:



Mit dieser Vorstellung drängt sich aber sofort die Frage auf, was an den Stellen x^* mit $f(x^*) = 0$ geschieht (diese Stellen heißen *stationäre* oder *kritische Punkte*). Gemäß unserer Vorstellung hat das Teilchen in einem stationären Punkt x^* keine „Geschwindigkeit“. Damit „steht“ das Teilchen in x^* und

$$x(t) = x^*$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung.

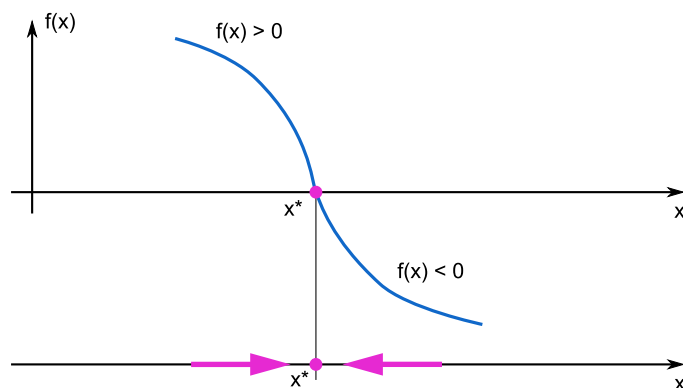


¹Dieser Satz wird benötigt, um auf die Existenz von lokalen Lösungen und von diesen auf das *asymptotisches Verhalten* des untersuchten Systems zu schließen.

Man bezeichnet x^* als *stationären Punkt* (in der Literatur auch *kritischer Punkt*).

Was können wir nun über die Bewegung eines Teilchens in der Nähe eines stationären Punktes aussagen?

Eine Nullstelle von $f(x)$ kann zum Beispiel durch einen Vorzeichenwechsel zustandekommen:

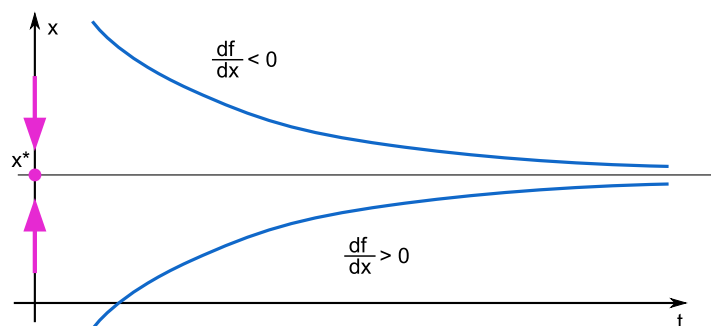


Interpretieren wir diesen Fall mit der Vorstellung des bewegten Teilchens so bedeutet das:

- Teilchen „rechts“ von x^* bewegen sich nach „links“ da in diesem Bereich $\dot{x} = f(x) < 0$ gilt, die „Geschwindigkeit“ des Teilchens ist somit negativ.
- Teilchen „links“ von x^* bewegen sich nach „rechts“ da in diesem Bereich $\dot{x} = f(x) > 0$ gilt, die „Geschwindigkeit“ des Teilchens ist somit positiv.

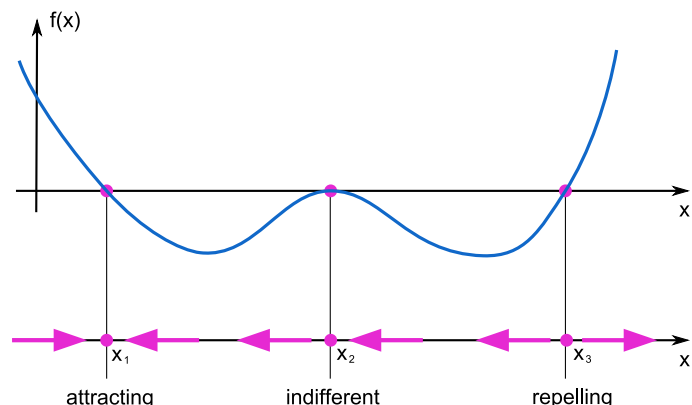
Was bedeutet dies nun für die Lösung?

Alle Lösungen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t^* einen Punkt $x(t^*)$ enthalten, wobei $x(t^*) > x^*$ gilt und $x(t^*)$ sich in „hinreichender Nähe“ von x^* befindet, müssen x^* „asymptotisch erreichen“.



Das „Erreichen müssen“ folgt aus dem bisher Gesagten, d.h. der obigen Überlegung bez. der Beziehung von Geschwindigkeit und Ort. Das „asymptotische Erreichen“ folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung (Lösungskurven können x^* nicht schneiden, da $x(t) \equiv x^*$ eine (konstante) Lösung der Differentialgleichung ist).

Das „Geschwindigkeitsfeld“ des Teilchens wird als *Phasendiagramm* bezeichnet.



Anhand des Phasendiagrammes erkennt man:

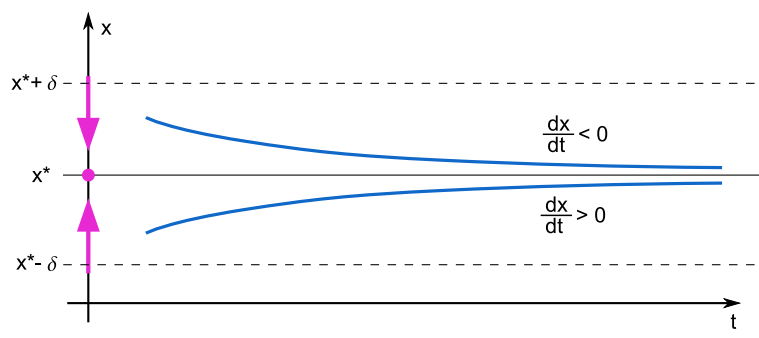
- Jedes Teilchen in der Nähe von x_1 wird von x_1 angezogen. Die Lösung bleibt also in der Nähe von x_1 . Dieses Verhalten wird als *attracting* (anziehend) bezeichnet.
- Jedes Teilchen in der Nähe von x_3 wird von x_3 abgestoßen. Die Lösung entfernt sich somit von x_3 . Dieses Verhalten bezeichnet man als *repelling* (abstoßend).
- Über x_2 ist *keine* derartige Aussage möglich: Ob das Teilchen in der Nähe von x_2 angezogen oder abgestoßen wird hängt von der Position des Teilchens ab (ob es sich „links“ oder „rechts“ von x_2 befindet). Diese Art stationärer Punkte wird *indifferent* genannt.

1.3. Theorie.

DEFINITION 1.2. Ein stationärer Punkt x^* heißt *attracting* genau dann, wenn

$$\exists \delta > 0 : [\forall x \in (x^* - \delta, x^*) : \dot{x} = f(x) > 0 \wedge \forall x \in (x^*, x^* + \delta) : \dot{x} = f(x) < 0]$$

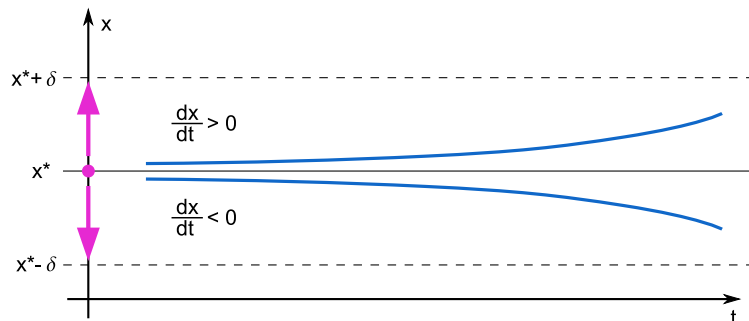
gilt.



DEFINITION 1.3. Ein stationärer Punkt x^* heißt *repelling* genau dann, wenn

$$\exists \delta > 0 : [\forall x \in (x^* - \delta, x^*) : \dot{x} = f(x) < 0 \wedge \forall x \in (x^*, x^* + \delta) : \dot{x} = f(x) > 0]$$

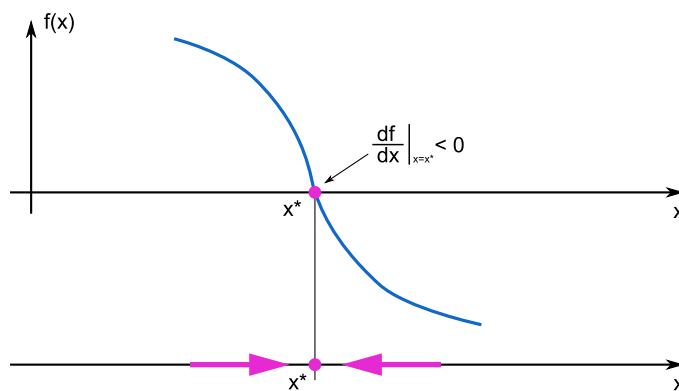
gilt.



SATZ 1.4. Ein stationärer Punkt x^* ist *attracting*, wenn

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x^*} < 0$$

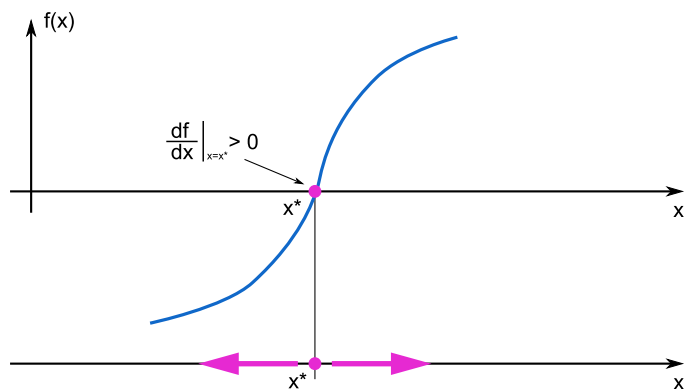
BEWEIS. Trivial. □



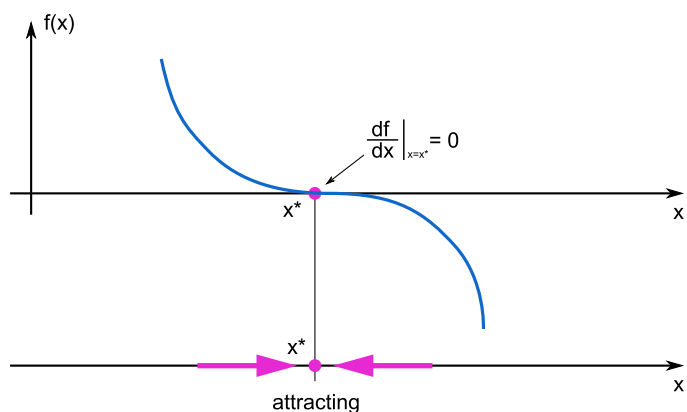
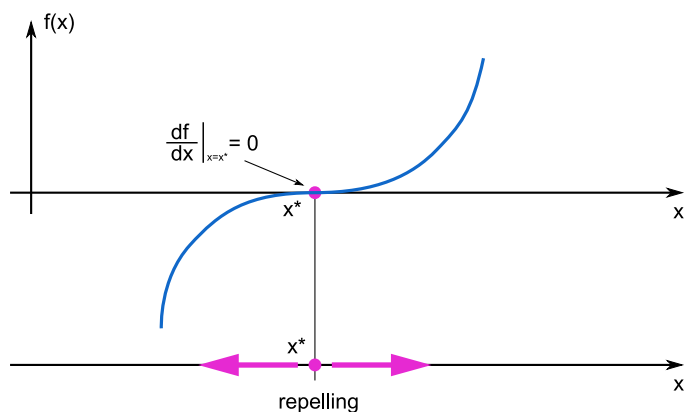
SATZ 1.5. Ein stationärer Punkt x^* ist repelling, wenn

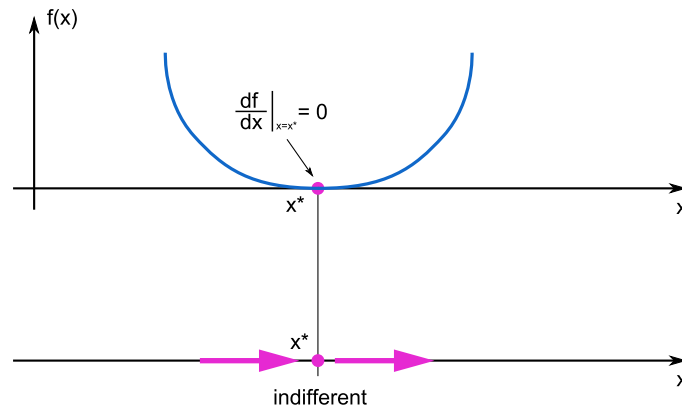
$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x^*} > 0$$

BEWEIS. Trivial. □



BEMERKUNG 1.6. Gilt in einem stationären Punkt x^* $\frac{df}{dx} \Big|_{x=x^*} = 0$, dann kann keine Aussage über die Art des stationären Punktes getroffen werden, wie man anhand der folgenden drei Abbildungen leicht erkennen kann.





DEFINITION 1.7. Sei x^* stationärer Punkt der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

und x_0 der „Startpunkt“ des AWP

$$\dot{x} = f(x) \quad \wedge \quad x(t_0) = x_0.$$

x^* heißt *stabil* genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad [|x^* - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon \quad (\forall t > \tau)].$$

BEMERKUNG 1.8. Die Definition besagt: Wenn ich in der Nähe eines *stabilen* stationären Punktes beginne, dann bleibe ich in der Nähe dieses Punktes.

DEFINITION 1.9. Ein stationärer Punkt x^* heißt *instabil* genau dann, wenn er nicht stabil ist.

SATZ 1.10. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und x^* ein stationärer Punkt der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Dann gilt:

$$x^* \text{ ist attracting.} \Leftrightarrow x^* \text{ ist stabil.}$$

BEMERKUNG 1.11. Dieser Satz gilt nur im *eindimensionalen* Fall.

BEWEIS. „ \Rightarrow “ Laut Voraussetzung $\exists \delta > 0$, so dass

$$\forall x \in (x^* - \delta, x^*) : \dot{x} = f(x) > 0 \quad \wedge \quad \forall x \in (x^*, x^* + \delta) : \dot{x} = f(x) < 0$$

Es ist zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_0 : \quad [|x^* - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, (x_0, t_0)) - x^*| < \varepsilon \quad (\forall t > \tau = \tau(t_0))].$$

Wir führen den Beweis durch Widerspruch, es gelte also die Annahme:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_0 : \quad |x_0 - x^*| < \frac{1}{n},$$

wobei

$$(1) \quad |x(t, (x_0, t_0)) - x^*| > \varepsilon_0 \quad (\forall t > \tau(x_0)).$$

Sei nun $x_0 > x^*$, dann gilt $x(t) > x^*$ (die Lösung darf x^* nicht schneiden). Sei nun n so groß, dass $x_0 \in (x^*, x^* + \delta)$, dann gilt laut Voraussetzung $f(x_0) < 0$. Weil der Abstand von x_0 zu x^* beliebig klein werden kann, aus (1) aber folgt, dass $x(t)$ ab $\tau = \tau(x_0)$ einen größeren Abstand von x^* als x_0 hat, so gilt: $\forall t > t_0$ hat $x(t)$ von x^* einen größeren Abstand als x_0 (sonst müsste sich x zuerst von x_0 aus auf x^* zu bewegen, und dann wieder weg, d.h. \dot{x} müsste 0 werden womit jedoch $x(t)$ x^* schneiden

würde, und das ist ein Widerspruch).

Wenden wir nun den Mittelwertsatz auf x im Intervall (t_0, t) an, so ergibt sich:

$$\exists \xi \in (t, t_0) : \quad x(t) - x_0 = \dot{x}(\xi) (t - t_0).$$

Laut der Überlegung im letzten Absatz ist der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen positiv. Da auch $(t - t_0)$ positiv ist, ergibt sich $\dot{x}(\xi) > 0$. Wählen wir nun t nur geringfügig größer als t_0 , dann ist $x(\xi) \in (x^*, x^* + \delta)$, also insbesondere

$$\exists x(\xi) \in (x^*, x^* + \delta) : \quad \dot{x}(\xi) = f(x(\xi)) > 0$$

und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„ \Rightarrow “ Sei x^* stabil, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 : \quad [|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon \quad (\forall t > \tau(x_0))].$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\lim_{x_0 \rightarrow x^*} x(t, x_0) = x^*.$$

Laut Mittelwertsatz gilt wiederum

$$\exists \xi \in (t, t_0) : \quad x(t) - x_0 = f(x(\xi)) (t - t_0).$$

Wählen wir nun $x_0 < x^*$, so ist der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen positiv ($x(t)$ muss größer als x_0 sein, da $x(t) \rightarrow x^*$). Da auch $t - t_0 > 0$ ergibt sich insgesamt

$$f(x(\xi)) > 0 \quad (\forall x(\xi) \in (x^* - \delta, x^*)).$$

Analog erhält man

$$f(x(\xi)) < 0 \quad (\forall x(\xi) \in (x^*, x^* + \delta)).$$

□

BEISPIEL 1.12 (Logistische Gleichung).

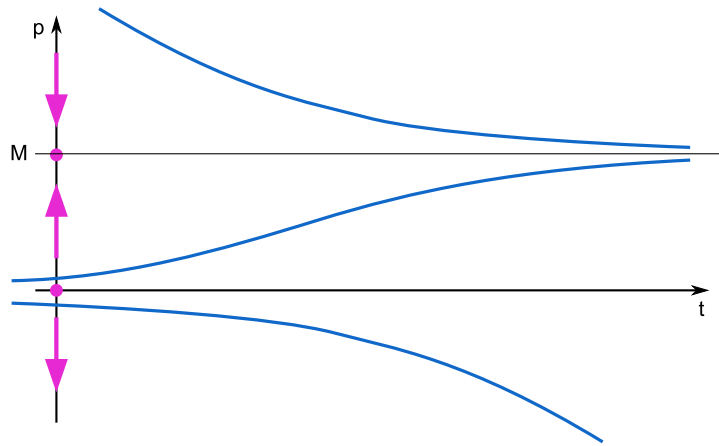
$$(2) \quad f(p) = \frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{M}\right) \quad k, M > 0$$

Es ist klar, dass die Differentialgleichung genau die kritischen Punkte $p = 0$ und $p = M$ besitzt. Zur Charakterisierung der kritischen Punkte leiten wir f nach p ab:

$$\frac{df}{dp} = k\left(1 - \frac{p}{M}\right) - \frac{kp}{M} \quad \left. \frac{df}{dp} \right|_{p=0} = k \quad \left. \frac{df}{dp} \right|_{p=M} = -k$$

Da $k > 0$ vorausgesetzt wurde, ergibt sich:

- $p = 0$ ist *attracting*, und damit stabil.
- $p = M$ ist *repelling*, und damit instabil.



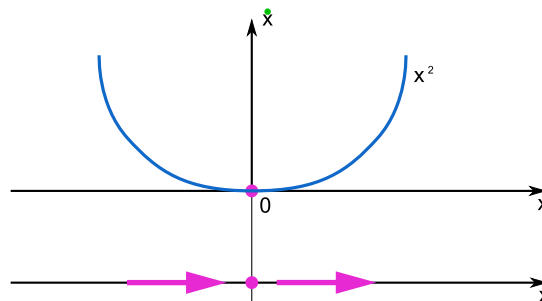
BEMERKUNG 1.13. Die Differentialgleichung (2) ist ein Populationsmodell für eine große Anzahl von Individuen. Man sieht an diesem Modell, dass es kein beliebiges Anwachsen einer Bevölkerung gibt (Ursachen hierfür sind Krankheiten, Nahrungsknappheit usw.). Alle Lösungen nähern sich asymptotisch M .

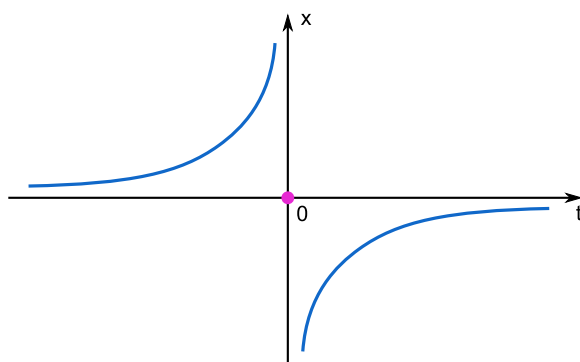
1.4. Strukturelle Stabilität und Bifurkation.

BEISPIEL 1.14. Als erstes Beispiel betrachten wir die autonome Differentialgleichung

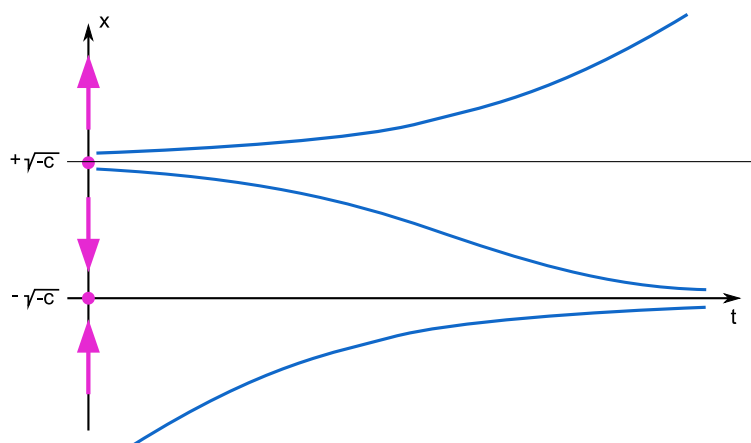
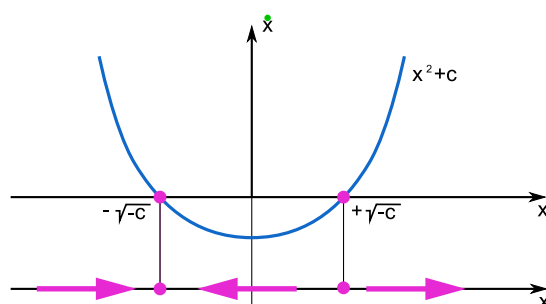
$$\dot{x} = x^2 + c$$

mit qualitativen Methoden, wobei wir den Parameter c jetzt *variieren*. Für $c = 0$ hat die Phasenebene folgende Gestalt:





Der stationäre Punkt $x = 0$ ist instabil.
 Für $c < 0$ ergeben sich die stationären Punkte $x_1^* = -\sqrt{-c}$ und $x_2^* = +\sqrt{-c}$, wobei x_1^* stabil und x_2^* instabil ist.



Für $c > 0$ gibt es *keine* stationären Punkte. Wir sehen also:

Bei kleinen Änderungen des Parameters c ändert sich die Phasenebene drastisch.

BEMERKUNG 1.15. Wir sagen, die Differentialgleichung durchläuft eine *Bifurkation*. Ändert sich die Phasenebene (und damit das qualitative Verhalten) bei kleinen Änderungen der Parameter nicht, so spricht man von *struktureller Stabilität*.

BEISPIEL 1.16 (Pitchfork bifurcation („Heugabel Bifurkation“)). Wir betrachten nun

$$\dot{x} = x(k - x^2) \quad k > 0,$$

wobei der Parameter k variiert wird.

Bestimmung der stationären Punkte:

Für $k \leq 0$ gibt es offensichtlich nur *einen* stationären Punkt, nämlich

| | |
|-----------|--------|
| $x^* = 0$ | stabil |
|-----------|--------|

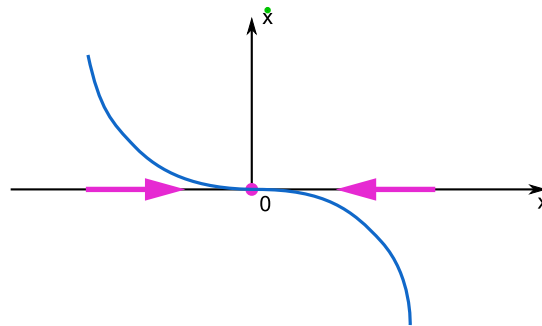
Für $k > 0$ ergeben sich leicht die *drei* stationären Punkte:

| | |
|---------------------|----------|
| $x_1^* = -\sqrt{k}$ | stabil |
| $x_2^* = 0$ | instabil |
| $x_3^* = +\sqrt{k}$ | stabil |

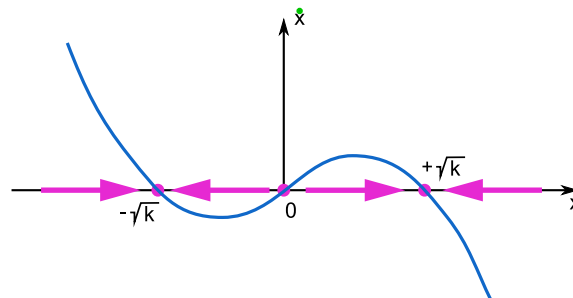
Man beachte dabei insbesondere das „Umschlagen“ des Stabilitätsverhaltens im Ursprung: Für $k \leq 0$ ist der Ursprung stabil, für $k > 0$ ist er instabil!

Phasendiagramme:

$k \leq 0$:

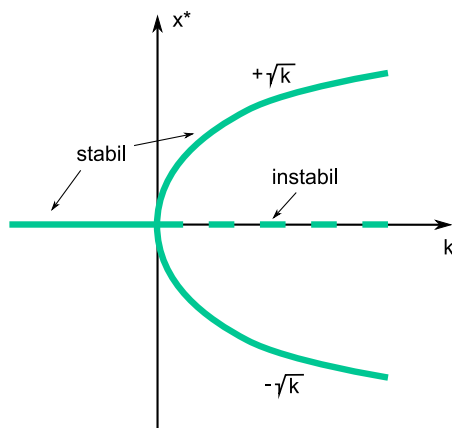


$k > 0$:



Bifurkationsdiagramm:

Die drastische Änderung der Struktur der Lösungen wird am besten in einem *Bifurkationsdiagramm* dargestellt:



BEISPIEL 1.17 (Transkritische Bifurkation).

$$\dot{x} = kx - x^2.$$

Bestimmung der stationären Punkte:

Offensichtlich gibt es genau *zwei* stationäre Punkte:

$$\begin{matrix} x_1^* = 0 \\ x_2^* = k \end{matrix}$$

Typisierung der stationäre Punkte:

Die Rechnung ergibt $\frac{df}{dx} = k - 2x$, also

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = k \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=k} = -k$$

Somit ist der Typ der stationären Punkte vom Parameter k abhängig und wir müssen drei Fälle unterscheiden:

(a) $k > 0$

$$\begin{matrix} x_1^* = 0 & \text{instabil} \\ x_2^* = k & \text{stabil} \end{matrix}$$

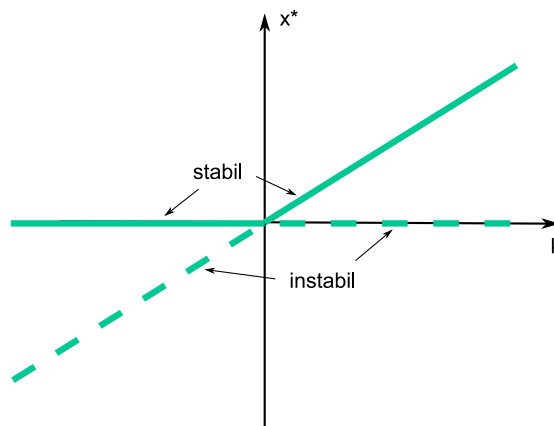
(b) $k = 0$

$$\begin{matrix} x_1^* = 0 & \text{instabil} \\ x_2^* = k & \text{instabil} \end{matrix}$$

(c) $k < 0$

$$\begin{matrix} x_1^* = 0 & \text{stabil} \\ x_2^* = k & \text{instabil} \end{matrix}$$

Bifurkationsdiagramm:



BEISPIEL 1.18 (Saddle node bifurcation).

$$\dot{x} = x^2 - k.$$

Bestimmung der stationären Punkte:

Für $k < 0$ gibt es *keine* stationären Punkte, für $k > 0$ ergibt sich:

| |
|---------------------|
| $x_1^* = +\sqrt{k}$ |
| $x_2^* = -\sqrt{k}$ |

Typisierung der stationäre Punkte:

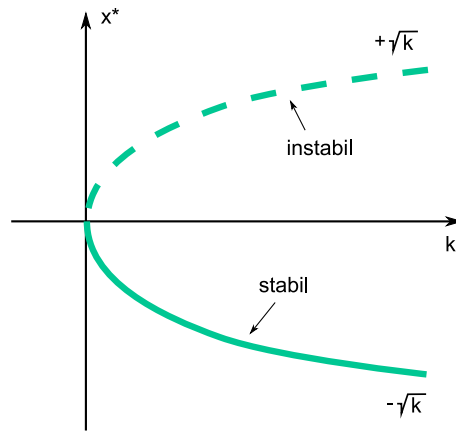
Die Rechnung ergibt $\frac{df}{dx} = 2x$, also

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=+\sqrt{k}} = +2\sqrt{k} \qquad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=-\sqrt{k}} = -2\sqrt{k}$$

und somit:

| | |
|---------------------|----------|
| $x_1^* = +\sqrt{k}$ | instabil |
| $x_2^* = -\sqrt{k}$ | stabil |

Bifurkationsdiagramm:



BEISPIEL 1.19 (Multiple Bifurkation).

$$\dot{x} = -(1+x)(x^2 - k).$$

Bestimmung der stationären Punkte:

| |
|---------------------|
| $x^* = -1$ |
| $x^* = \pm\sqrt{k}$ |

(Für $k < 0$ gibt es natürlich nur den stationären Punkt $x^* = -1$.)

Typisierung der stationäre Punkte:

Die Rechnung ergibt $\frac{df}{dx} = -(x^2 - k) - 2x(1+x)$, und somit

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=-1} = -(1-k), \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=+\sqrt{k}} = -2\sqrt{k}(1+\sqrt{k}), \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=-\sqrt{k}} = +2\sqrt{k}(1-\sqrt{k}).$$

Wiederum ist das Stabilitätsverhalten vom Parameter k abhängig. Dieses Mal tritt jedoch an zwei Stellen ($k = 0$ und $k = 1$) Bifurkation auf (deswegen auch *multiple* Bifurkation).

Es ergeben sich die Fälle:

(a) $k < 0$

| | |
|------------|--------|
| $x^* = -1$ | stabil |
|------------|--------|

(b) $k = 0$

| | |
|------------|----------|
| $x^* = -1$ | stabil |
| $x^* = 0$ | instabil |

(c) $0 < k < 1$

| | |
|-------------------|----------|
| $x^* = -1$ | stabil |
| $x^* = +\sqrt{k}$ | stabil |
| $x^* = -\sqrt{k}$ | instabil |

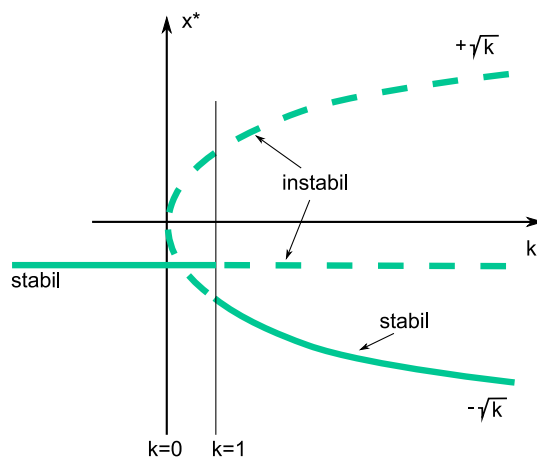
(d) $k = 1$

| | |
|-------------------|----------|
| $x^* = -1$ | instabil |
| $x^* = +\sqrt{k}$ | stabil |
| $x^* = -\sqrt{k}$ | instabil |

(e) $k > 1$

| | |
|-------------------|----------|
| $x^* = -1$ | instabil |
| $x^* = +\sqrt{k}$ | stabil |
| $x^* = -\sqrt{k}$ | stabil |

Bifurkationsdiagramm:



2. Qualitative Theorie autonomer 2-dimensionaler Systeme

2.1. Einführung. Gegenstand dieses Abschnitts sind Systeme von autonomen Differentialgleichungen,

$$(3) \quad y' = f(y), \quad f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit U offen und f einmal stetig differenzierbar. Lösungen von (3) sind dann Abbildungen $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ mit $\phi'(t) = f(\phi(t))$ für alle $t \in I$.

Im Weiteren werden wieder nicht konkrete Lösungen von (3) behandelt, sondern nur ihr *asymptotisches* Verhalten für $t \mapsto \pm\infty$.

BEMERKUNG 2.1. Die Beschränkung auf den 2-dimensionalen Fall erlaubt folgende (anschaulich-physikalische) Vorstellung für eine Lösung ϕ :

Die Definitionsmenge I kann man als Zeitabschnitt auffassen (Das wurde in der Bezeichnung bereits vorweggenommen.). Die Funktionswerte $\phi(t)$ der Lösung beschreiben dann z.B. den Ort eines Partikels. In unserem Fall ist die (durch die Differentialgleichung beschreibbare) Bewegung auf einen Teil (entspricht U) einer Ebene (entspricht \mathbb{R}^2) beschränkt. $f(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^2$ entspricht damit dem Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens am Ort y .

Damit ist auch nachfolgende Definition ohne Weiteres verständlich.

DEFINITION 2.2. Ist $\phi(t_0, y_0) : I_{y_0} \rightarrow U$ eine Lösung von (3) mit $\phi(t_0) = y_0$ und maximalem Existenzintervall I_{y_0} , dann heißt die Menge $\{\phi(t, t_0, y_0) \mid t \in I_{y_0}\} \subset U$ Orbit der Lösung und die Vereinigung aller Orbits (= U) Phasenebene. Weiters nennt man die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ mit $\phi(t, y) := \phi_t(y) := \phi(t, t_0, y)$ Fluss von (3).

BEMERKUNG 2.3.

- (a) Da in (3) die unabhängige Veränderliche t (bzw. die Zeit) nicht explizit auftritt (d.h. gerade das (3) autonom ist), kann in obiger Definition o.E. $t_0 = 0$ gesetzt werden.
- (b) Die Orbits konstanter Lösungen sind einpunktig, also $\{y\}$ mit $f(y) = 0$. In der physikalischen Vorstellung sind das sich nicht bewegende Teilchen. Solche Orbits nennt man Equilibria (Einzahl: Equilibrium).
- (c) Eine nichtkonstante Lösung kann höchstens im Grenzwert für $t \mapsto \pm\infty$ den Wert einer konstanten Lösung annehmen.

Als ersten Schritt werden wir uns auf lineare Systeme beschränken und deren qualitatives Verhalten vollständig angeben. Später werden wir dann mit der, dann wichtigen, Voraussetzung das die rechte Seite f stetig differenzierbar ist auch (3) behandeln können.

2.2. Lineare Systeme. Sei jetzt

$$(4) \quad f(y) := Ay \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Insbesondere ist $U = \mathbb{R}^2$ und $I_y = \mathbb{R}$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$, d.h. die Phasenebene ist tatsächlich eine ganze Ebene und alle Lösungen für alle Zeiten definiert.

Für die Equilibria von (4) lässt sich folgender Satz zeigen.

SATZ 2.4. *Ist $\det(A) \neq 0$, dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das einzige Equilibrium. Ist $\det(A) = 0$, dann ist entweder jeder Punkt von \mathbb{R}^2 ein Equilibrium oder es gibt eine Gerade von Equilibria durch den Ursprung.*

BEWEIS. Klar mittels Definition und des entsprechenden Satzes aus der linearen Algebra (siehe auch Bemerkung 2.7). \square

Von besonderem Interesse ist jetzt das Verhalten von Lösungen in der Nähe solcher Equilibria. Um hier eine zusätzliche Vereinfachung zu erreichen, nutzt man aus das sich die Matrix A durch eine geeignete lineare Transformation auf eine „kanonische Normalform“ bringen lässt. Entsprechend führt diese Transformation auf eine „neue“ Differentialgleichung, deren Lösungen „das gleiche qualitative Verhalten“ aufweisen. Das präzisieren wir jetzt.

BEMERKUNG 2.5. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt es eine (invertierbare) Matrix $C \in GL_2(\mathbb{R})$, so dass mit $z := Cy$ und $B := CAC^{-1}$ gilt:

B ist von einer der folgenden kanonischen Formen (Normalformen):

- (a) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
- (b) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie
- (c) $B = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Die Matrix C lässt sich mittels folgender Bemerkungen und Definitionen leicht berechnen.

DEFINITION 2.6.

- (a) Sei A eine 2×2 -Matrix über \mathbb{R} und seien $v \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$, dann heißt λ Eigenwert von A und v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .
- (b) Das Polynom $\det(A - x\mathbb{E}_2)$ heißt das charakteristische Polynom von A .

BEMERKUNG 2.7. Seien A, λ, v wie oben. $Av = \lambda v$ ist äquivalent zu $Av - \lambda v = 0$. Es gibt also genau dann einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ , wenn v im Kern von $Av - \lambda v$ liegt und das ist genau dann der Fall, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist.

BEMERKUNG 2.8. Man unterscheidet folgende Fälle für die Nullstellen λ_1, λ_2 des charakteristischen Polynoms:

- λ_1 und λ_2 sind reell. Dann definiere man $C := (v_1, v_2)$, wobei v_1 bzw. v_2 linear unabhängige (falls $\lambda_1 = \lambda_2$) Eigenvektoren von λ_1 bzw. λ_2 sind.
- Ist $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ eine Nullstelle der Vielfachheit 2 und existiert kein Paar linear unabhängiger Eigenvektoren zu v_1 , dann gibt es zumindest ein Vektor v_2 mit $(A - x\mathbb{E}_2)v_2 = v_1$. Setze dann $C := (v_1, v_2)$.
- Gibt es nur 2 (dann zueinander konjugierte(!)) komplexe Nullstellen $\mu \pm i\nu$, dann sei v ein (komplexer) Eigenvektor zu einer der Nullstellen. Durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil ($v = v_1 + iv_2$) erhält man zwei linear unabhängige Vektoren v_1 und v_2 . Setze $C := (v_1, v_2)$.

Betrachtet man jetzt die Differentialgleichung (Bezeichnungen wie in Bemerkung 2.5)

$$(5) \quad z' = Bz,$$

dann ist ϕ genau dann eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (4), wenn $\psi := C\phi$ eine Lösung von (5) ist [denn: $\phi' = A\phi \Leftrightarrow C\phi' = CA\phi = BC\phi \Leftrightarrow \psi' = B\psi$]. Die durch C gegebene lineare Transformation ist insbesondere ein Homöomorphismus der Phasenebene in sich selbst (anschaulich: eine „Verzerrung“). Damit übertragen sich auch das Grenzwertverhalten für $t \mapsto \pm\infty$ und Aussagen mit Hilfe von Umgebungen der Lösungen ϕ von (4) auf die Lösungen ψ von (5).

Wir betrachten jetzt die einzelnen Fälle:

Fall 1: Sei B in der Normalform (a) der Bemerkung (2.5). Dann kann man folgende Unterscheidungen treffen:

- (a) Sind die Eigenwerte von (5) – λ_1, λ_2 – verschieden und positiv, erhält man im Equilibrium $(0, 0)$ eine Quelle.

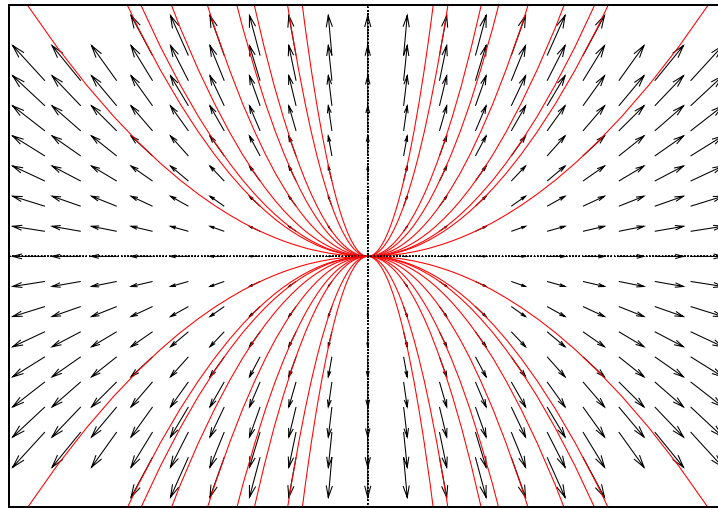


ABBILDUNG 1. Quelle

Wie man an diesem Bild sieht, entfernt sich jede Lösung in der Nähe des Equilibriums (im Zentrum), daher nennt man das Equilibrium in diesem Fall einen instabilen Knotenpunkt oder Quelle. Dieses Verhalten ergibt sich sofort aus (5).

Sind beide Eigenwerte negativ erhält man das entsprechende Bild einer Senke:

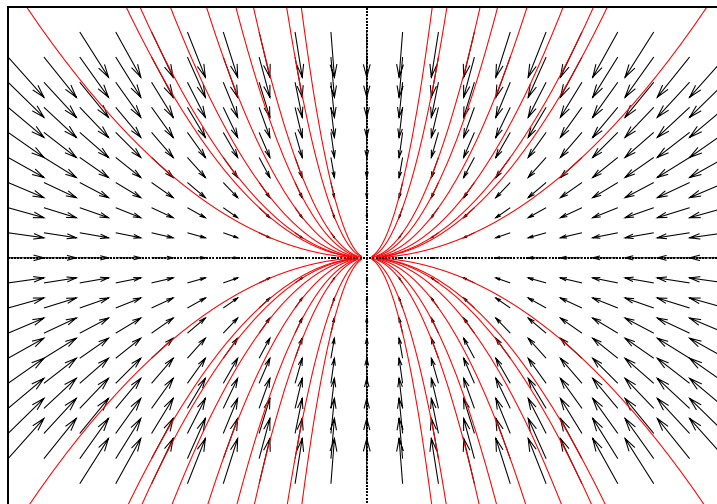


ABBILDUNG 2. Senke

Abbildung 2 sieht ähnlich aus wie Abbildung 1. Diesmal laufen die Lösungen aber auf das Equilibrium zu, daher nennt man es einen (asymptotisch) stabilen Knotenpunkt oder Senke.

(b) Sind jedoch (o.B.d.A) $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$, so ergibt sich ein Sattel.

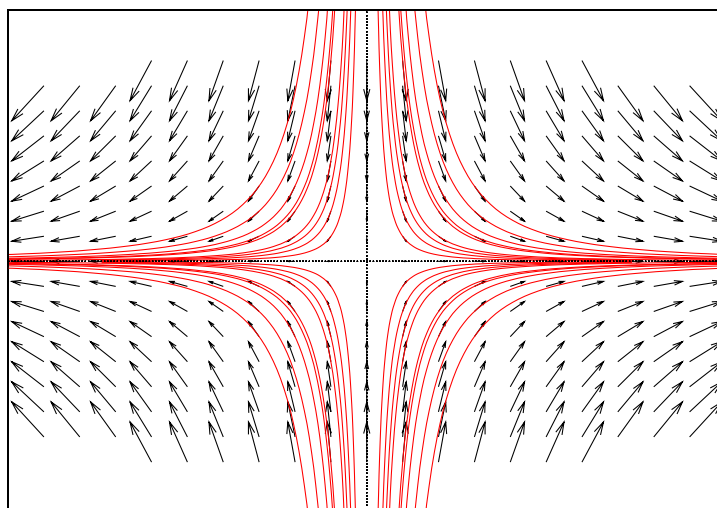


ABBILDUNG 3. Sattel

Hier hängt das Verhalten der Lösungen davon ab „wo“ sie sind. Man sieht, dass Lösungen, die auf der x -Achse liegen, „weglaufen“ (d.h. die $(1, 0)$ -Richtung ist abstoßend oder repelling) und Lösungen auf der y -Achse auf das Equilibrium zu (d.h. die $(0, 1)$ -Richtung ist anziehend oder attracting). Andere Lösungen zeigen eine Kombination

dieser beiden Bewegungen.

- (c) Gilt $\lambda_1 = \lambda_2$, so ergibt sich für $\lambda_1 > 0$ wiederum eine Quelle mit dem besonderen Namen „Star“ bzw. mit $\lambda_2 < 0$ eine Senke.

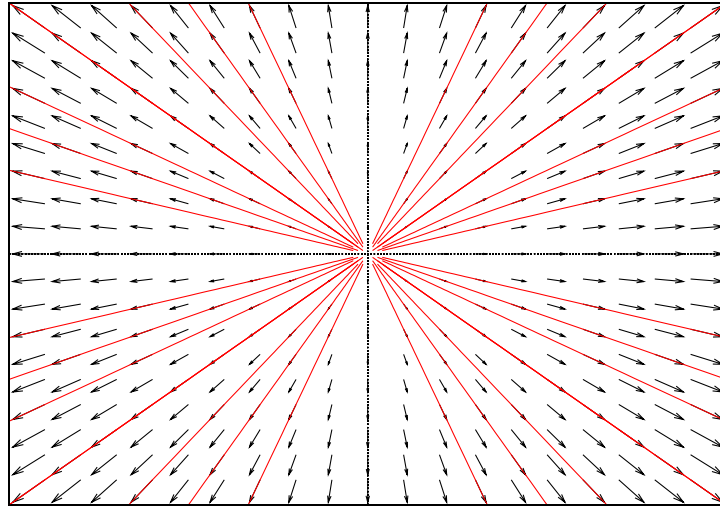


ABBILDUNG 4. Star (Quelle)

Abbildung 4 sieht ähnlich aus wie Abbildung 1. Da dieses Mal beide Eigenwerte gleich sind, laufen die Lösungen in beiden Richtungen gleich schnell hinaus, wodurch sich „gerade“ Orbits ergeben, deshalb auch der Name Star.

Fall 2: Sei jetzt B in der Normalform (b) der Bemerkung (2.5) und weiters $\lambda > 0$, dann erhält man eine (entartete) Quelle:

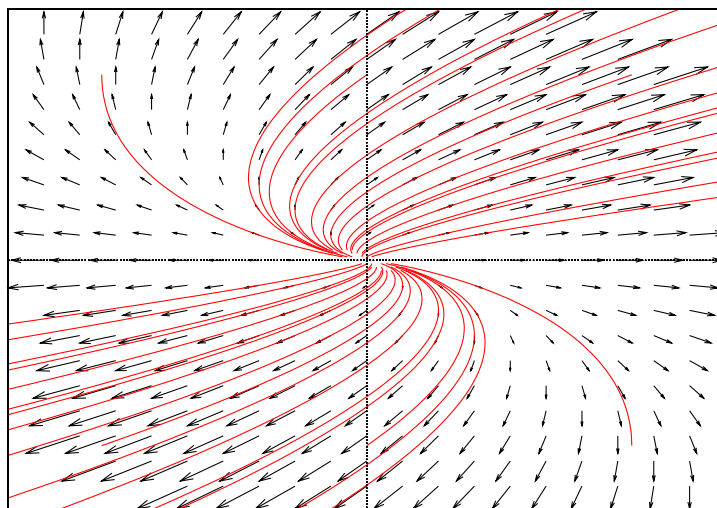


ABBILDUNG 5. Quelle (entartet)

Für $\lambda < 0$ erhält man entsprechend eine (entartete) Senke.

Fall 3: Ist B in der Normalform (c) der Bemerkung (5) und
(a) $\mu > 0$ liefert eine Quelle mit dem speziellen Namen „Strudel“.

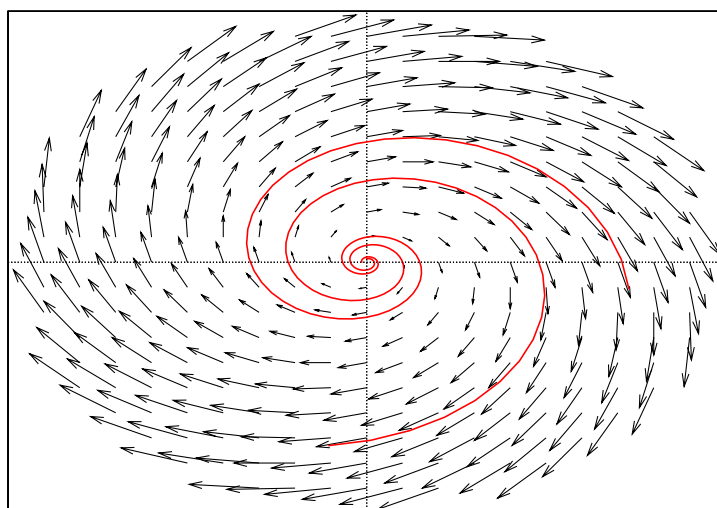


ABBILDUNG 6. Quelle (Strudel)

Entsprechend erhält man für $\mu < 0$ eine Senke.

(b) Ist $\mu = 0$, so erhält man ein Zentrum.

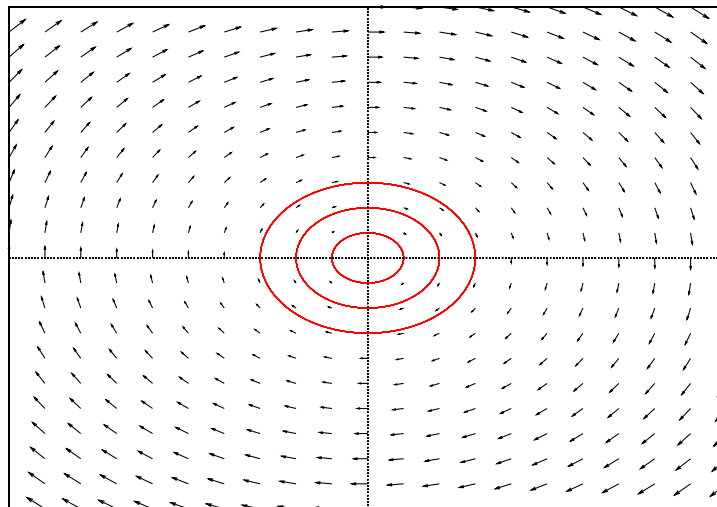


ABBILDUNG 7. Zentrum

Betrachtet man das charakteristische Polynom aus Definition (2.6) und definiert die Spur $\text{Sp}(A) := \lambda_1 + \lambda_2$, erhält man als charakteristisches Polynom $x^2 - \text{Sp}(A)x + \det(A)$. Damit kann man insgesamt folgendes Determinanten-Spur-Diagramm aufstellen:

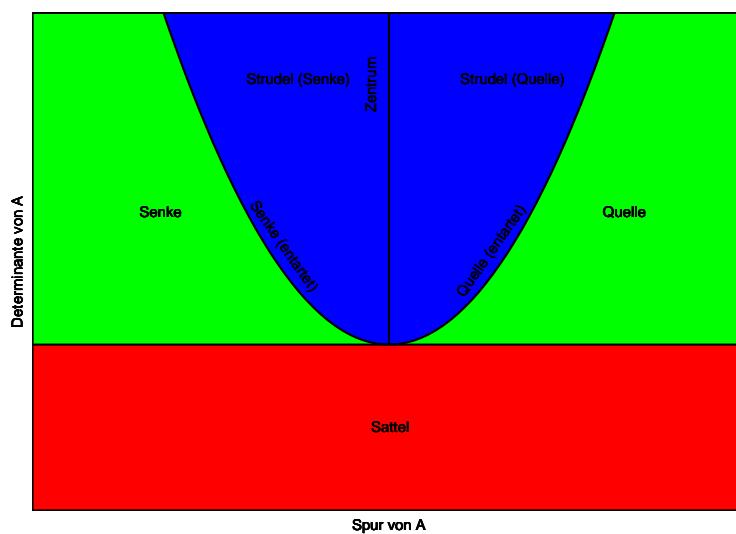


ABBILDUNG 8. Determinante-Spur-Diagramm

2.3. Nichtlineare Systeme. Um jetzt auch nichtlineare Systeme behandeln zu können, brauchen wir noch Folgendes:

DEFINITION 2.9.

- Ist f die rechte Seite von (3), dann heißt das System

$$y' = df(y)$$

Linearisierung von (3) im Punkt y , wobei df die Jacobi-Matrix ist.

- Haben alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix df im Punkt y einen Realteil $\neq 0$, dann heißt das Differentialgleichungs-System (3) hyperbolisch im Punkt y .

Damit können wir folgenden Satz formulieren:

SATZ 2.10 (Linearisierungssatz von Hartman-Grobman). *Ist y ein hyperbolischer Punkt von (3), dann gibt es Umgebungen U und V von y und einen Homöomorphismus h , der den Fluss der Linearisierung (eingeschränkt auf U) homöomorph auf den Fluss von (3) (eingeschränkt auf V) abbildet.*

Diesen Satz werden wir hier nicht beweisen. Als Konsequenz ergibt sich aus ihm aber Folgendes.

BEMERKUNG 2.11.

- Ist das Equilibrium der Linearisierung im Punkt $y = (y_1, y_2)$ ein Sattelpunkt, dann gibt es eine Umgebung von y , so dass alle Orbits (bis auf vier und dem Equilibrium selbst), die in diese Umgebung eintreten, sie wieder verlassen.
- Ergibt die Linearisierung in y einen Sattelpunkt, so bezeichnen wir auch den Punkt y selbst als Sattelpunkt.

Insgesamt kann man damit folgende Schritte festlegen, um die prinzipielle Gestalt einer Lösung von (3) herauszufinden:

- 1. Schritt:** Bestimmung der Equilibria ($f(y) = 0$).
- 2. Schritt:** Bestimmung des Typs (z.B. Quelle, Senke, Sattel bzw. ist es ein hyperbolischer Punkt) der Equilibria.
- 3. Schritt:** Bestimmung der Isoklinen (d.h. der Kurven in der Phasenebene, in denen die Änderung nach der Zeit in y_1 - oder y_2 -Richtung = 0 ist).

Für Isoklinen ergibt sich Folgendes.

BEMERKUNG 2.12. Die Schnittpunkte von Isoklinen sind Equilibria.

Die Methodik zeigen wird anhand von Beispiel 2.13.

BEISPIEL 2.13.

$$(6) \quad \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + 2y_1^2$$

$$(7) \quad \frac{dy_2}{dt} = -3y_1 + y_2 + 3y_1^2$$

Der 1. Schritt führt auf die Equilibria $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Die Jacobi-Matrizen für diese Punkte sind $df(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ und $df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Durch Diagonalisieren dieser beiden Matrizen und dem Linearisierungssatz folgt aus der 1. Matrix das $(0, 0)$ ein Sattel und $(1, 0)$ eine Quelle ist.

Die Isoklinen von (6) & (7) schließlich ergeben sich aus

$$\begin{aligned} -2y_1 + 2y_1^2 &= 0 \\ -3y_1 + y_2 + 3y_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, 1 \\ y_2 &= 3y_1(1 - y_1). \end{aligned}$$

Insgesamt kann man damit folgende Skizze anfertigen:

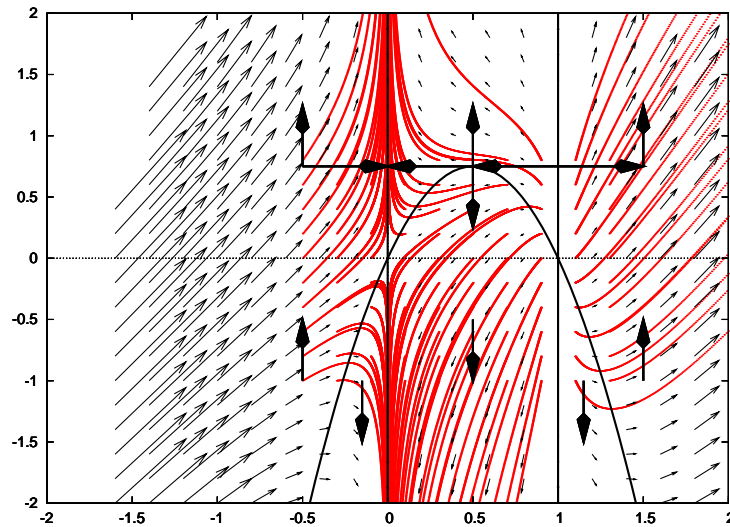


ABBILDUNG 9. Beispiel

Die großen Pfeile deuten die prinzipielle Richtung der Orbits für die jeweiligen Bereiche an. Sie zeigen nochmals die Bedeutung der Isoklinen. Das Beispiel zeigt auch, wie man durch die obigen einfachen Rechnungen (i.e. ohne das System explizit zu lösen) eine klare Vorstellung der qualitativen Gestalt der Phasenebene erhalten kann.

3. Explizite Behandlung eines „verwickelten“ Beispiels

In diesem Abschnitt wird das Differentialgleichungssystem

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{u}(t) &= au(t) - (1 - u(t)) + bu(t)v(t) \\ \dot{v}(t) &= cv(t) - (1 - v(t)) + du(t)v(t) \end{aligned}$$

untersucht.

Gesucht wird hierbei die qualitative Gestalt der Phasenebene in Abhängigkeit von (a, b, c, d) .

BEMERKUNG 3.1. Das System (8) kann als Modell für die Interaktion zweier Spezies angesehen werden. Sind insbesondere $a, b \neq 0$, dann gehorchen sie in ihrem Wachstum dem logistischen Modell. Je nachdem ob b bzw. d größer oder kleiner 0 ist, beeinflussen sie sich gegenseitig in positiver oder negativer Weise (Koppelung).

BEMERKUNG 3.2.

- (a) Obwohl im Fall eines Populationsmodells nur der 1. Quadrant der Phasenebene eine Rolle spielt, untersuchen wir aus Interesse die ganze Ebene.
- (b) Bei beliebiger Wahl von (a, b, c, d) degeneriert das Modell oft bis zur "Unkenntlichkeit". Wir lassen trotzdem als Wertebereich für die Koeffizienten ganz \mathbb{R} zu.

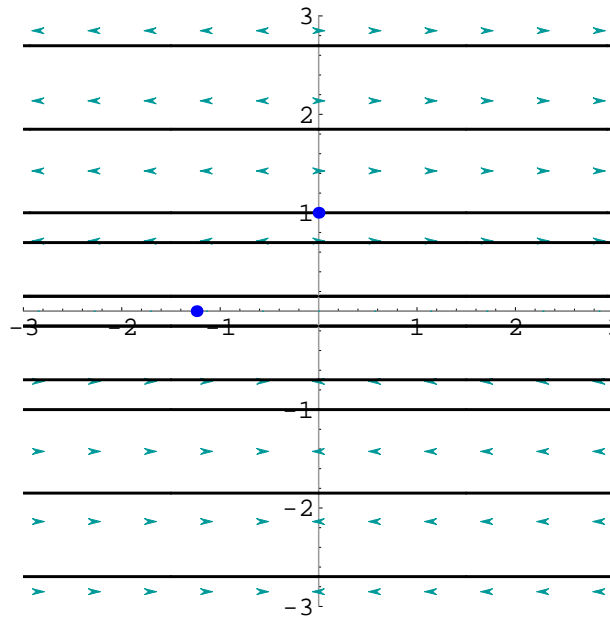
Wir beginnen jetzt mit der Untersuchung von (8). Die auftretenden Fälle sind nach Art und Anzahl der Equilibria geordnet.

Fall 1 (trivialer Fall): Jeder Punkt der Phasenebene ist ein Equilibrium.

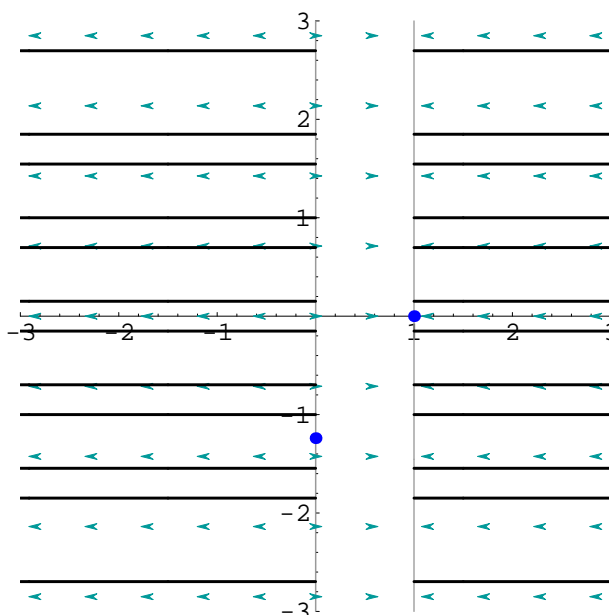
Das ist der Fall, wenn $a, b, c, d = 0$. Damit sind $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Lösungen.

Fall 2: Alle Equilibria sind Geraden.

- (a) Es gibt ∞ -viele Equilibria, die alle auf einer Geraden liegen.
Das ist der Fall für $a, b, c = 0, d \neq 0$. Daraus folgt $\dot{u} = 0$ und $\dot{v} = d v$. Damit ist $v = 0$ eine Gerade von Equilibria und je nach Vorzeichen von d und dem Startwert u_0 einer Lösung attraktiv ($u_0 d < 0$) oder abstoßend ($u_0 d > 0$). Analoges gilt für den Fall $a, c, d = 0$ und $b \neq 0$ (siehe Abbildung).



- (b) Es gibt ∞ -viele Equilibria auf 2 parallelen Geraden.
 Das ist der Fall für $b, c, d = 0$ und $a \geq 0$ oder $a, b, d = 0$ und $c \geq 0$. Für $a > 0$ ergibt sich beispielsweise $\dot{u} = a(1 - u)u$ und $\dot{v} = 0$.



Aus der 1. Gleichung folgt mit $\dot{u} = 0$, dass $u = 0$ und $u = 1$ zwei Geraden von Equilibria sind. Insgesamt erhält man:

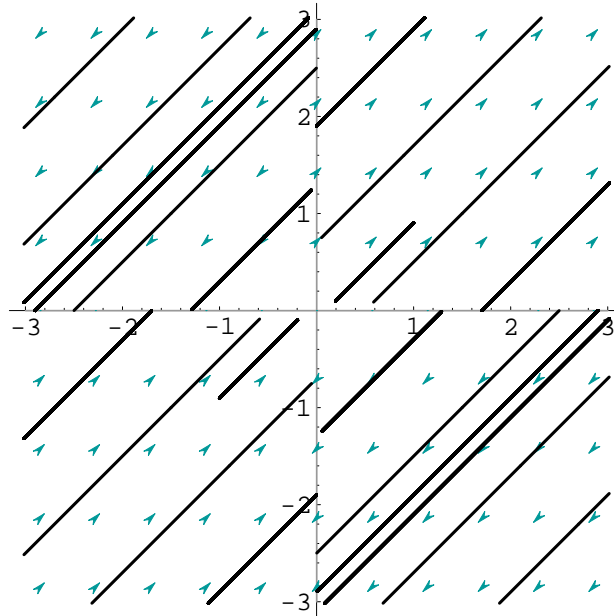
Art der Gleichgewichtspunkte im Fall $b, c, d = 0$:

| | |
|---------|---|
| $a > 0$ | $u = 1$ ist attracting $u = 0$ ist repelling |
| $a < 0$ | $u = 1$ ist repelling $u = 0$ ist attracting |

Art der Gleichgewichtspunkte im Fall $a, b, d = 0$:

| | |
|---------|---|
| $c > 0$ | $v = 1$ ist attracting $v = 0$ ist repelling |
| $c < 0$ | $v = 1$ ist repelling $v = 0$ ist attracting |

- (c) Es gibt ∞ -viele Equilibria auf zwei Geraden, die sich schneiden. Das ist der Fall für $a, c = 0$. Damit ist $\dot{u} = buv$ und $\dot{v} = duv$. Die Equilibria liegen auf den Geraden $u = 0$ und $v = 0$.



Für die Art der Gleichgewichtspunkte erhält man die Tabelle:

| | $v = 0$ | | $u = 0$ | |
|----------------|-------------|-------------|------------|------------|
| $b, d > 0$ | indifferent | indifferent | repelling | attracting |
| $b, d < 0$ | attracting | attracting | attracting | repelling |
| $b > 0, d < 0$ | attracting | repelling | repelling | attracting |
| $b < 0, d > 0$ | repelling | repelling | attracting | attracting |
| | $u > 0$ | $u < 0$ | $v > 0$ | $v < 0$ |

BEISPIEL 3.3. Für $b, d > 0$ und $v > 0$ ist jede Lösung an $u = 0$ repelling.

Fall 3: Ein Equilibrium liegt nicht auf einer Geraden und es gibt ∞ -viele Equilibria auf einer Geraden.

- (a) Eine der beiden Koordinatenachsen ist eine Gerade von Equilibria.
- Ist $a = 0$, dann muss man das System $\dot{u} = buv$ und $\dot{v} = cv(1-v) + duv$ betrachten. Dann ist die Gerade durch Equilibria $v = 0$ und $(0, 1)$ ein Equilibrium. Die Art der des Equilibriums $(0, 1)$ ergibt sich aus der Jacobi-Matrix

$$dF(0, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(0,1)}{\partial u} & \frac{\partial g(0,1)}{\partial v} \\ \frac{\partial f(0,1)}{\partial v} & \frac{\partial g(0,1)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

mit $f := au - (1 - u) + buv$ und $g := cv - (1 - v) + duv$.
Also insgesamt:

$$dF(0, 1) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

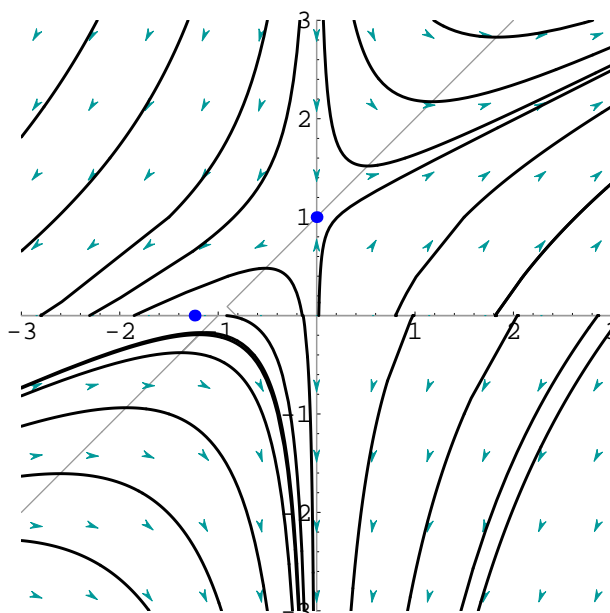
Damit erhält man folgende Tabelle:

| | | |
|---------|---------|---------|
| | $b > 0$ | $b < 0$ |
| $c > 0$ | Sattel | Senke |
| $c < 0$ | Quelle | Sattel |

- Der Fall $c = 0$ wird analog behandelt. Hier ist dann $u = 0$ die Gerade von Equilibria und $(1, 0)$ ein Equilibrium. Damit ergibt sich wie im vorigen Fall die Tabelle

| | | |
|---------|---------|---------|
| | $a > 0$ | $a < 0$ |
| $d > 0$ | Sattel | Senke |
| $d < 0$ | Quelle | Sattel |

BEISPIEL 3.4. Sei $a = 0$ und $c, b > 0$. Dann ist $(0, 1)$ ein Sattel.



(b) Diesen Fall betrachten wir im Nächsten.

Fall 4: Es gibt disjunkte Isoklinen und 3 Equilibria.

BEMERKUNG 3.5. Isoklinen sind Geraden, auf denen $\dot{u} = \dot{v} = 0$ sind, d.h. bei Überschreiten einer Isokline mit $\dot{u} = 0$ durch eine Lösung ändert sich die u -Richtung der "Geschwindigkeit" (analog für \dot{v}). Insbesondere ist der Schnitt zweier Isoklinen ein stationärer Punkt.

- (a) Schneiden sich die Isoklinen nicht (sind also parallel und disjunkt) führt das mit (8) auf folgende Bedingungen für die Isoklinen:

$$\begin{aligned} a(1-u) + bv &= 0 \\ c(1-v) + du &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -au + bv &= -a \\ du - cv &= -c \\ u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Sind jetzt 2 Isoklinen parallel, also $ac = db$, dann sind nur 3 Equilibria, nämlich $N_1 = (0,0)$, $N_2 = (1,0)$ und $N_3 = (0,1)$ möglich. Die Typisierung dieser Punkte erfolgt wie oben durch die jeweilige Jacobi-Matrix:

$$dF(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

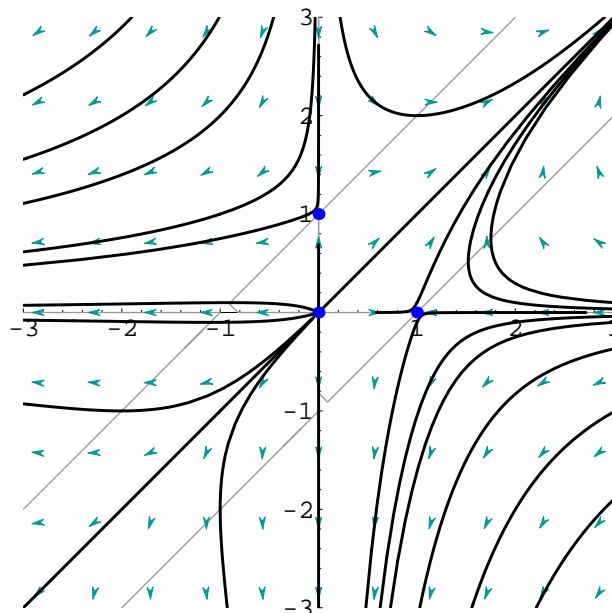
$$dF(1,0) = \begin{pmatrix} -a & b \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$$

$$dF(0,1) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Der Typ der stationären Punkte hängt jetzt von a, b, c, d ab. Man beachte: Ist beispielsweise $c + d, c, a = 0$ und $b, d < 0$, dann muss für das Vorzeichen von $a + b$ unter Beachtung von $c = \frac{db}{a}$

$$\frac{db}{a} + d > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 < 0 \Rightarrow b + a < 0$$

gelten.



- (b) Hier ist nun der Nachtrag zum Fall 3b. Sind die Isoklinen parallel aber nicht disjunkt (d.h. sie fallen zusammen) ergeben sie eine Gerade von Equilibria. Als Bedingung für diesen Fall ergibt sich

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = 1.$$

Die Jacobi-Matrix im Punkt $(0, 0)$ ist

$$dF(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

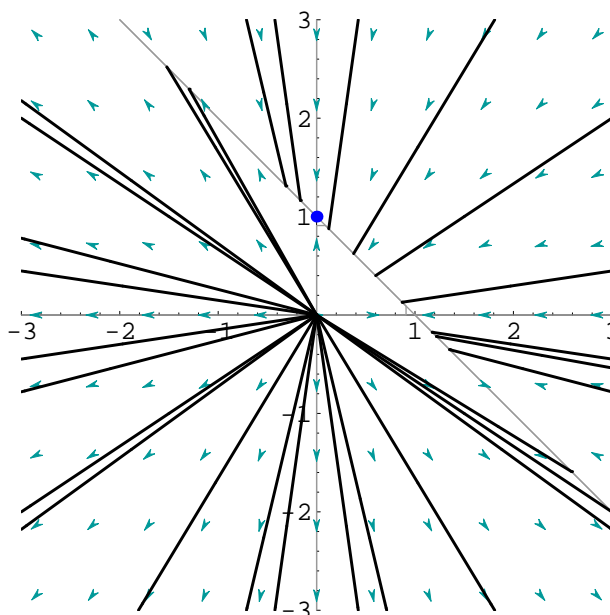
| | | |
|---------|---------|---------|
| | $a > 0$ | $a < 0$ |
| $c > 0$ | Quelle | Sattel |
| $c < 0$ | Sattel | Senke |

Für die Isoklinen erhält man:

$$1 - u = v$$

$$1 - v = u$$

Sie fallen also, wie gesagt, zusammen.



Für den Fall 4a) (dh. $ac = db$) erhält man insgesamt:

| | $c + d > 0$ | | | $c + d < 0$ | | |
|--------------------|---|---|---|--|--|--|
| | $c > 0$ $d > 0$ | $c > 0$ $d < 0$ | $c < 0$ $d > 0$ | $c < 0$ $d < 0$ | $c > 0$ $d < 0$ | $c < 0$ $d > 0$ |
| $a > 0$ $b > 0$ | N_1 : Quelle N_2 : Sattel N_3 : Sattel $a + b > 0$ | | | N_1 : Sattel N_2 : Senke N_3 : Sattel $a + b > 0$ | | |
| $a < 0$ $b < 0$ | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Senke $a + b < 0$ | | | N_1 : Senke N_2 : Sattel N_3 : Sattel $a + b < 0$ | | |
| $a > 0$ $b < 0$ | | N_1 : Quelle N_2 : Sattel N_3 : Senke $a + b < 0$ | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Quelle $a + b > 0$ | | N_1 : Quelle N_2 : Senke N_3 : Sattel $a + b > 0$ | N_1 : Sattel N_2 : Senke N_3 : Quelle $a + b > 0$ |
| $a < 0$ $b > 0$ | | N_1 : Sattel N_2 : Quelle N_3 : Sattel $a + b > 0$ | N_1 : Senke N_2 : Sattel N_3 : Sattel $a + b < 0$ | | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Senke $a + b < 0$ | N_1 : Senke N_2 : Sattel N_3 : Sattel $a + b < 0$ |

Fall 5: Es gibt vier Equilibria. Wenn sich das System entkoppelt (d.h. für $b = d = 0$) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{u} &= au - au^2 \\ \dot{v} &= cv - cv^2 \end{aligned}$$

Die stationären Punkte sind hier $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ und als Jacobi-Matrix bekommt man

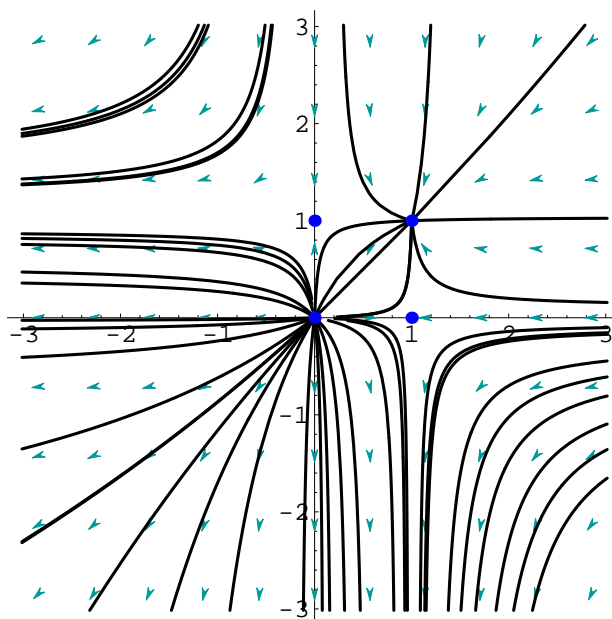
$$dF = \begin{pmatrix} a - 2au & 0 \\ 0 & c - 2cv \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} dF(0,0) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ dF(1,0) &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ dF(0,1) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \text{ und} \\ dF(1,1) &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Gleichgewichtspunkte:

| | $a > 0$ | $a < 0$ |
|---------|---|---|
| $c > 0$ | (0, 0): Quelle (1, 0): Sattel (0, 1): Sattel (1, 1): Senke | (0, 0): Sattel (1, 0): Quelle (0, 1): Senke (1, 1): Sattel |
| $c < 0$ | (0, 0): Sattel (1, 0): Senke (0, 1): Quelle (1, 1): Sattel | (0, 0): Senke (1, 0): Sattel (0, 1): Sattel (1, 1): Senke |



3.1. Allgemeiner Fall.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= au(1-u) + buv \\ \dot{v} &= cv(1-v) + dvu\end{aligned}$$

Wie in den bisherigen Fällen gibt es drei stationäre Punkte, die unabhängig von den Parametern sind: $N_1 = (0, 0)$, $N_2 = (1, 0)$, $N_3 = (0, 1)$.

Zur Berechnung des vierten stationären Punktes (u^*, v^*) müssen wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a - au + bv &= 0, \\ c - cv + du &= 0,\end{aligned}$$

lösen, das ist in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -c \end{pmatrix}$$

lautet.

Mit $D := \begin{vmatrix} -a & b \\ d & -c \end{vmatrix} = ac - db$ ergibt die Cramer'sche Regel für Gleichungssysteme:

$$u^* = \frac{\begin{vmatrix} -a & b \\ -b & -c \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac + bc}{D}$$

$$v^* = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a \\ d & -c \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac + ad}{D}$$

Berechnung der Jacobi Matrizen

Mit $f(u, v) = au - au^2 + buv$ und $g(u, v) = cv - cv^2 + duv$ erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a - 2au + bv,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = bu,$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = dv \text{ und}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = c - 2cv + du.$$

Das ergibt die Jacobi Matrizen

$$N_1 = (0, 0) : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$N_2 = (1, 0) : \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & c + d \end{pmatrix}$$

$$N_3 = (0, 1) : \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$N_4 = (u^*, v^*) : \begin{pmatrix} -ac\frac{a+b}{D} & bc\frac{a+b}{D} \\ da\frac{c+d}{D} & -ac\frac{c+d}{D} \end{pmatrix}$$

Die Jacobi Matrix für (u^*, v^*) berechnet sich dabei folgendermaßen:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u^*, v^*) = a - 2a\left(\frac{ac + bc}{D}\right) + b\left(\frac{ac + da}{D}\right) = \frac{-a^2c - abc}{D}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u^*, v^*) = b\frac{ac + bc}{D}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u^*, v^*) = d\frac{ac + da}{D}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u^*, v^*) = c - 2c\left(\frac{ac + da}{D}\right) + d\left(\frac{ac + bc}{D}\right) = \frac{-ac^2 - cda}{D}$$

Bestimmung der Eigenwerte

Da die Jakobi Matrizen für die ersten drei stationären Punkte Diagonalmatrizen sind, macht deren Typisierung keine Probleme (die Eigenwerte sind natürlich die Diagonaleinträge). Zur Typisierung von (u^*, v^*) berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -ac\frac{a+b}{D} - \lambda & bc\frac{a+b}{D} \\ da\frac{c+d}{D} & -ac\frac{c+d}{D} - \lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 + \frac{ac}{D}(a+b+c+d)\lambda + \frac{(a+b)(c+d)}{D^2}(a^2c^2 - bcda) \\ &= \lambda^2 + \frac{ac}{D}(a+b+c+d)\lambda + \frac{ac}{D^2}(a+b)(c+d)(ac - bd) \\ &= \lambda^2 + \frac{ac}{D}(a+b+c+d)\lambda + \frac{ac}{D}(a+b)(c+d) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Nullestellen des charakteristischen Polynoms (und damit als Eigenwerte der Jakobimatrix):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{ac}{D}(a+b+c+d) \pm \sqrt{\frac{(ac)^2}{4D^2}(a+b+c+d)^2 - \frac{ac}{D}(a+b)(c+d)}$$

Typisierung von (u^*, v^*)

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} x &:= a + b, \\ y &:= c + d, \\ z &:= \frac{ac}{D}. \end{aligned}$$

Durch Betrachtung der Eigenwerte der Jakobimatrix in (u^*, v^*) ergibt sich:

Haben x und y unterschiedliche Vorzeichen und ist $z > 0$ so haben wir in (u^*, v^*) einen Sattelpunkt. Ebenso ergibt sich ein Sattelpunkt für den Fall, dass x und y das gleiche Vorzeichen haben und $z < 0$ ist.

Haben x und y das gleiche Vorzeichen und ist $z > 0$, so ist im Fall $z > 1$ der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv.

$$z^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - zxy > 0$$

[denn: $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)]

Wir haben dann im Fall $\frac{x+y}{2} > 0$ eine Senke, im Fall $\frac{x+y}{2} < 0$ eine Quelle.

Wird $z < 1$ so kann der Ausdruck unter der Wurzel null werden. Dies geschieht in

$$(9) \quad z = \frac{xy}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

Damit findet in diesem Punkt eine Bifurkation statt. Für $z < \frac{xy}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$ wird (u^*, v^*) zum Spiralpunkt.

Das selbe geschieht, wenn x und y unterschiedliche Vorzeichen haben und $z < 0$ ist.

Für $|z| > 1$ (also $z < -1$) haben wir für $\frac{x+y}{2} > 0$ eine Senke, im Fall $\frac{x+y}{2} < 0$ eine Quelle.

Für $-1 < z < 0$ tritt bei falls (9) erfüllt ist, wieder eine Bifurkation auf und wir erhalten ab $z > \frac{xy}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$ in (u^*, v^*) einen Spiralpunkt.

Die Bedingung $|z| < 1$ (also $|\frac{ac}{ac-bd}| < 1$) ergibt folgendes System von Ungleichungen:

Fall 1: $ac > 0$ und $ac - bd > 0$.

$|z| < 1$ bedeutet hier $ac < ac - bd$ und damit ergeben sich die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}bd &< 0 \\ac &> 0 \\ac &> bd\end{aligned}$$

Fall 2: $ac > 0$ und $ac - bd < 0$

Die Bedingung an z ergibt nun $2ac < bd$, also:

$$\begin{aligned}ac &> 0 \\ac &< bd \\2ac &< bd\end{aligned}$$

Fall 3: $ac < 0$ und $ac - bd < 0$

Die Bedingung bedeutet hier $bd > 0$, damit insgesamt:

$$\begin{aligned}ac &< 0 \\ac &< bd \\bd &> 0\end{aligned}$$

Fall 4: $ac < 0$ und $ac - bd > 0$

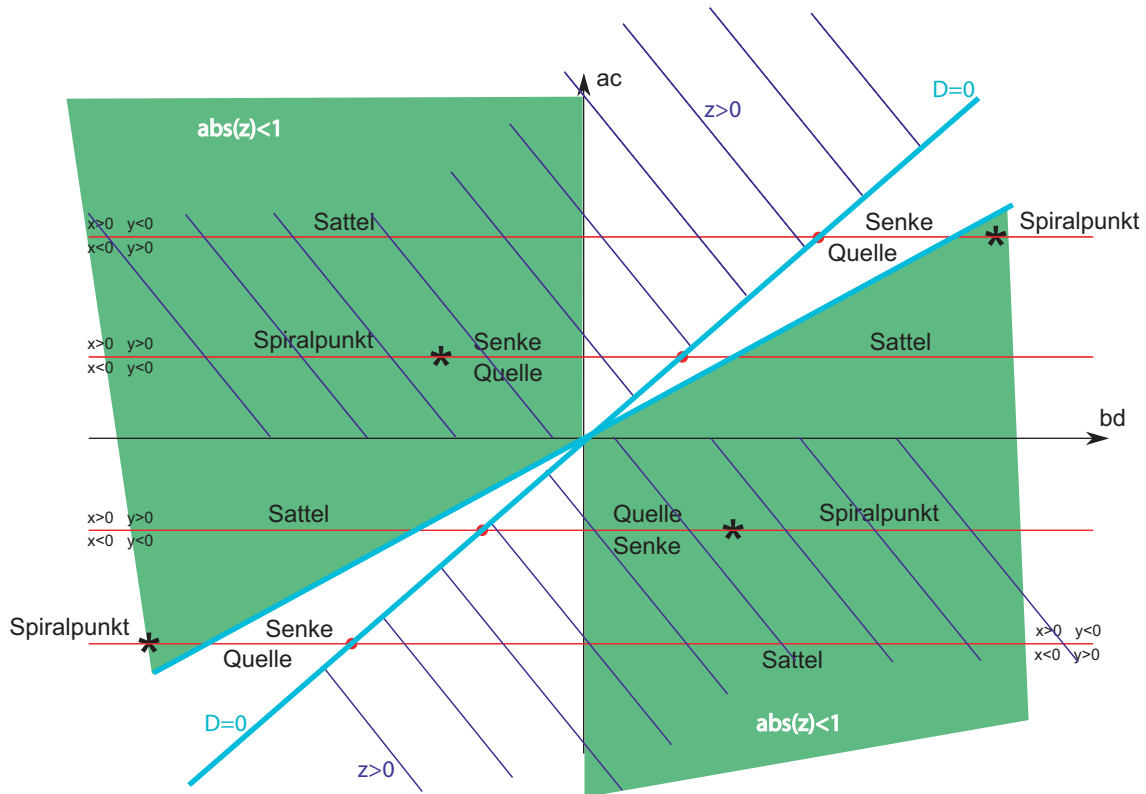
Hier ergibt die Bedingung $2ac > bd$, und insgesamt:

$$\begin{aligned}ac &< 0 \\ac &> bd \\2ac &> bd\end{aligned}$$

Auf Grund dieser Überlegungen sind wir nun in der Lage, für den Punkt (u^*, v^*) ein Bifurkationsdiagramm zu zeichnen. Dafür tragen wir auf der Abszisse bd auf, und auf der Ordinate ac . Für den Bereich in dem $z > 0$ ist ergibt sich

$$z = \frac{ac}{ac - bd} > 0,$$

also entweder $ac > 0 \wedge ac > bd$ oder $ac < 0 \wedge ac < bd$.



Bemerkungen zum Arbeiten mit dem Bifurkationsdiagramm

Wenn a, b, c, d fest stehen, müssen zuerst ac und bd berechnet, sowie das Vorzeichen von $x = a + b$ und $y = c + d$ bestimmt werden. Mit dieser Information geht man dann in das Diagramm: ac wird auf der Ordinate aufgetragen, bd auf der Abszisse. Wie der Punkt im Diagramm zu interpretieren ist, ergibt sich aus den Vorzeichen von x und y (diese Information ist in den roten Linien im Diagramm enthalten). Ob es sich um eine Senke/Quelle oder einen Spiralpunkt handelt, muss schließlich anhand der Bedingung (9) ermittelt werden. Dies ist natürlich nur für die kritischen Bereiche notwendig, d.h. für die Bereiche, in denen auf der zugehörigen roten Linie ein „*“ eingezeichnet ist.

Bifurkationstabelle für die fixen stationären Punkte

Da die Jakobimatrizen für die fixen stationären Punkte Diagonalmatrizen sind ergibt sich ihr Stabilitätsverhalten einfach durch Betrachtung der Vorzeichen der Diagonaleinträge. Das Ergebnis ist hier noch einmal als Tabelle zusammengefasst:

| | $a > 0, c > 0$ | $a > 0, c < 0$ | $a < 0, c > 0$ | $a < 0, c < 0$ |
|-----------------------------------|--|--|--|---|
| $a + b > 0$ und $c + d > 0$ | N_1 : Quelle N_2 : Sattel N_3 : Sattel | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Quelle | N_1 : Sattel N_2 : Quelle N_3 : Sattel | N_1 : Senke N_2 : Quelle N_3 : Quelle |
| $a + b > 0$ und $c + d < 0$ | N_1 : Quelle N_2 : Senke N_3 : Sattel | N_1 : Sattel N_2 : Senke N_3 : Quelle | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Sattel | N_1 : Senke N_2 : Sattel N_3 : Quelle |
| $a + b < 0$ und $c + d > 0$ | N_1 : Quelle N_2 : Sattel N_3 : Senke | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Senke | N_1 : Sattel N_2 : Quelle N_3 : Sattel | N_1 : Senke N_2 : Quelle N_3 : Sattel |
| $a + b < 0$ und $c + d < 0$ | N_1 : Quelle N_2 : Senke N_3 : Senke | N_1 : Sattel N_2 : Sattel N_3 : Sattel | N_1 : Sattel N_2 : Senke N_3 : Senke | N_1 : Senke N_2 : Sattel N_3 : Sattel |

3.2. Konstruktion eines expliziten Beispiels. Um ein interessantes Beispiel zu erhalten, konstruieren wir uns Parameter, die einen Spiralpunkt ergeben. Dazu müssen laut obigen Überlegungen z.B. folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
 ac > 0 \quad a + b > 0 \\
 bd < 0 \quad c + d > 0 \\
 \frac{ac}{ac - bd} < \frac{(a + b)(c + d)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Dies ist z.B. für folgende Parameter der Fall:

| | |
|---------|----------|
| $a = 2$ | $b = -1$ |
| $c = 1$ | $d = 2$ |

Dies überprüft man leicht durch Einsetzen². Als Koordinaten des Spiralpunktes erhalten wir:

$$N_4 = (u^*, v^*) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Mit Hilfe der der Bifurkationstabelle ergibt sich folgendes Stabilitätsverhalten für die stationären Punkte:

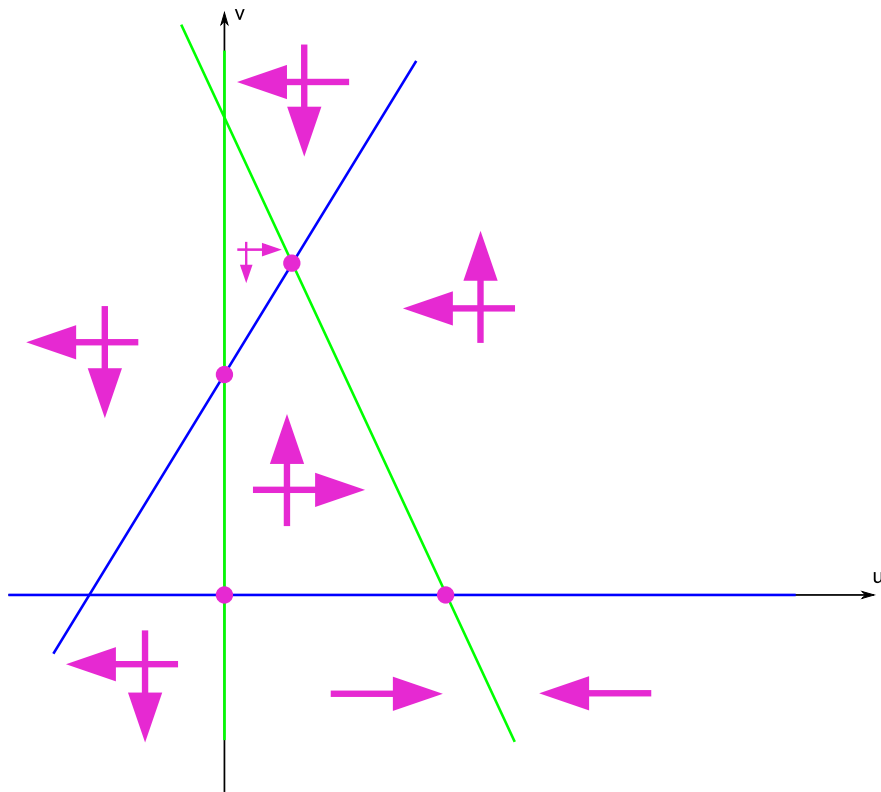
- N_1 : Quelle
- N_2 : Sattel
- N_3 : Sattel
- N_4 : Spiralpunkt (lt. Konstruktion)

Durch Nullsetzen von \dot{u} bzw. \dot{v} erhalten wir folgende Isoklinen:

- $v \equiv 0$
- $u \equiv 0$
- $v = 2 - 2u$
- $v = 1 + 2u$

²Sei hier aus Platzgründen dem Leser überlassen.

Damit sind wir in der Lage, eine Prinzipskizze zu konstruieren, die bereits eine sehr gute qualitative Beschreibung der Phasebene enthält:



Die genaue Berechnung der Phasebenen ergibt:

