

Ein neuer numerischer Ansatz zur L^p -Regularisierung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Frank Werner

aus

Hofgeismar

angefertigt am

Institut für

Numerische und Angewandte Mathematik

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

2008

Einleitung

Die Theorie der *Inversen Probleme* beschäftigt sich mit der approximativen Lösung von Operatorgleichungen der Form

$$\text{Finde } \varphi \in \mathcal{D}(T) \subseteq X \text{ mit } T(\varphi) = g \quad (0.1)$$

für einen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ zwischen normierten Räumen X und Y sowie gegebenem $g \in Y$.

Üblicherweise sind solche Probleme *schlecht gestellt*, d.h. falls eine Lösung existiert ist diese nicht eindeutig bestimmt oder hängt nicht stetig von den Daten g ab. Insbesondere letzteres erschwert akzeptable Rekonstruktionen unter gestörten Messdaten g^δ , für die im Allgemeinen nur $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ bekannt ist.

Bis vor einigen Jahren wurde vor allem der Fall untersucht, dass X und Y Hilberträume sind. Dieser Teil der Theorie ist sehr gut untersucht und als nahezu vollständig anzusehen (vergleiche [EHN96], [Rie03] oder [Hoh02]).

In letzter Zeit beschäftigte man sich mehr und mehr mit dem Fall, dass X „nur“ ein Banachraum ist. Die Wahl von X als Banachraum dient dazu, verschiedene gewünschte Eigenschaften der approximierten Lösungen zu (0.1) in das Modell zu übertragen. Hilberträume besitzen oftmals zu viel Struktur bzw. zu „schöne“ geometrische Eigenschaften, um diesen Wünschen Rechnung zu tragen.

In dem Fall, dass X ein Banachraum ist, stehen sowohl weniger Methoden zur approximativen Lösung von (0.1) zur Verfügung, als auch ist die Konvergenzanalyse dieser Methoden weitaus schwieriger. Viel Verbreitung findet weiterhin die so genannte *Tikhonov-Regularisierung* (vergleiche [TA79], [Tik63] im Original oder [LPR07], [Res05], [Lor08], [GHS08], [BO04] für neuere Analysen): Um Stabilität bei den Näherungslösungen zu erreichen, ersetzen wir (0.1) durch das Problem

$$\|T(\varphi) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha J(\varphi) = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in \mathcal{D}(T), \quad (0.2)$$

wobei $J : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ ein konvexes Funktional und $\alpha > 0$ der Regularisierungsparameter ist. Die Wahl von J liefert ebenfalls Möglichkeiten zur Steuerung gewünschter Eigenschaften der approximativen Lösungen von (0.1), d.h. der Lösungen von (0.2). Ein spezieller Fall ist $J(\varphi) = \|\varphi\|_X^s$ mit geeignetem Exponenten $s > 0$. Im Banachraumfall liegen für die Form (0.2) der Regularisierung bisher nur Konvergenzraten in Form von Bregman-Distanzen vor (vergleiche etwa [BO04] oder [Res05]).

Diese Arbeit beschäftigt sich zunächst mit dem Fall $X = \mathbf{L}^p(\Omega)$ für vorgegebenes $1 \leq p < 2$ und $J(\varphi) = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p$, welcher als *\mathbf{L}^p -Regularisierung* bekannt ist. Bei $p = 1$ zeigen wir für lineares, beschränktes T mit geeignetem Definitionsbereich erstmals die Konvergenzraten $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ in der Norm unter der Annahme, dass eine gekoppelte Quellbedingung der Form

$$\exists \omega \in Y \text{ s.d. } T^*\omega = \frac{1}{2} \text{ auf } \text{supp}(\varphi^\dagger) \text{ mit } \|\omega\|_Y < \frac{1}{2\|T\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y}} \quad (0.3)$$

für die Minimum-Norm-Lösung φ^\dagger von (0.1) erfüllt ist.

Allerdings wird kein Beispiel präsentiert, welches die Erfüllbarkeit dieser Bedingung zeigt.

Für nicht-lineares T wird analog die Rate $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ gezeigt, die Voraussetzungen an T sind dort jedoch aufwändiger zu formulieren.

Für $p > 1$ werden grundlegende Rechnungen präsentiert, die aber nicht zur Formulierung eines analogen Resultats reichen. Die Konvergenzanalyse dort ist als unvollständig anzusehen. Allerdings präsentieren wir mittels einer Ungleichung aus [Lor08] eine Abschätzung der Bregman-

Distanz zu $J(\varphi) = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p$ nach unten durch die \mathbf{L}^2 -Norm, woraus Konvergenzraten in der \mathbf{L}^2 -Norm folgen.

Gleichzeitig wird in dieser Arbeit ein Algorithmus zur Berechnung der Lösungen zu (0.2) vorgestellt, der für $p > 1$ ebenso wie für $p = 1$ funktioniert. Dieser Algorithmus wie auch die Konvergenzanalyse für $p = 1$ resultieren direkt daraus, dass es gelingt, den Raum $\mathbf{L}^2(\Omega)$ mittels einer nicht-linearen, Fréchet-differenzierbaren Transformation bijektiv auf $\mathbf{L}^p(\Omega)$ abzubilden. Damit kann (0.2) auf ein nicht-lineares Hilbertraum-Problem zurückgeführt werden, welches durch die bekannte Theorie (vergleiche [EHN96, Kapitel 10] oder [LPR07]) abgedeckt wird.

Eine Alternative zur Modellbildung des Problems mittels Wahl von X als Banachraum ist es, X weiterhin als Hilbertraum anzunehmen und dafür auch dort mittels

$$\left\|T(\varphi) - g^\delta\right\|_Y^2 + \alpha J(\varphi) = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in \mathcal{D}(T) \quad (0.4a)$$

zu regularisieren, wobei das (konvexe) Funktional J so zu wählen ist, dass die Lösungen von (0.4a) die gewünschten Eigenschaften haben. Die Wahl von $X = \mathbf{L}^p(\Omega)$ im Banachraumkontext führt zu einem ähnlichen Minimierungsproblem wie die Wahl von

$$J(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle \varphi, \varphi_k \rangle_X|^p \quad (0.4b)$$

für ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von X im Hilbertraumkontext. Hierbei spricht man auch von *Regularisierung mit ℓ^p -Strafterm*. Dieses Vorgehen wurde kürzlich in [DDD04], [GHS08] und [Lor08] untersucht. Wir stellen einen Vergleich zwischen den dort präsentierten Ergebnissen und einer analogen Anwendung unseres Vorgehens für (0.4) vor.

Diese Arbeit ist wie folgt organisiert:

In **Abschnitt 1** werden elementare Grundlagen über \mathbf{L}^p -Räume, Operatoren, Fréchet-Differenzierbarkeit, Kompaktheit, schlecht-gestellte Probleme und Regularisierung wiederholt.

Abschnitt 2 fasst Ergebnisse über die Tikhonov-Regularisierung in Hilbert- wie in Banachräumen zusammen. Dabei wird im Banachraumfall nur auf die Gut-Gestelltheit des Minimierungsproblems eingegangen, ohne dass Konvergenzraten gezeigt oder rezitiert werden.

In **Abschnitt 3** werden die oben erwähnten Transformationen von $\mathbf{L}^2(\mu)$ in $\mathbf{L}^p(\mu)$ für beliebige Maße μ vorgestellt und elementare Eigenschaften dieser Transformationen bewiesen.

Abschnitt 4 befasst sich mit der \mathbf{L}^p -Regularisierung, insbesondere mit der Anwendbarkeit der Kriterien aus Abschnitt 2 für die Gut-Gestelltheit des Minimierungsproblems und der Umformulierung des \mathbf{L}^p -Problems in ein (nicht-lineares) Hilbertraumproblem mittels der Transformationen aus Abschnitt 3.

In Abschnitt 4 wird dann auch der mögliche Algorithmus zur Berechnung der Lösungen von (0.2) vorgestellt und die erwähnten Konvergenzraten für $p = 1$ werden bewiesen. Zuletzt findet sich dort die Abschätzung der Bregman-Distanz für $p > 1$ und der Vergleich zwischen den Literaturergebnissen und unserem Konvergenzsatz für die Regularisierung mit ℓ^p -Strafterm.

Abschnitt 5 wendet den Algorithmus und die theoretischen Resultate aus Abschnitt 4 auf Entfaltungprobleme im \mathbb{R}^2 an. Die Ergebnisse dort zeigen, dass das Verfahren und insbesondere der vorgestellte Algorithmus aus Abschnitt 4 wie gewünscht für dieses Beispiel anwendbar und stabil ist. Diese Tatsache wird durch numerische Ergebnisse in Form von Bildern untermauert. Allerdings zeigt die Konvergenzanalyse dort, dass die Bedingung (0.3) in diesem Zusammenhang leider nicht erfüllbar ist, womit ein ursprüngliches Ziel dieser Arbeit als gescheitert betrachtet werden muss.

Der **Anhang A** über Topologie dient der Verdeutlichung wie Rechtfertigung der Ergebnisse aus Abschnitt 2 über die Gut-Gestelltheit des Tikhonov-Minimierungsproblems. Außerdem werden dort einige topologische Grundlagen eingeführt, die zur Formulierung und zum Beweis der genannten Ergebnisse aus Abschnitt 2 notwendig sind. Insbesondere zeigt das Beispiel A.30 die Grenzen der Lemmata aus Abschnitt 2 auf.

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr. Thorsten Hohage für die Vergabe und exzellente Betreuung dieser Arbeit über ein durchaus interessantes und durchweg spannendes Thema. Außerdem möchte er Herrn Prof. Dr. Andreas Thom für hilfreiche Hinweise auf dem Gebiet der Topologie danken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Inhaltsverzeichnis	7
1 Einleitung und Grundlagen	9
1.1 Die Funktionenräume $\mathbf{L}^p(\mu)$	9
1.1.1 Definitionen	9
1.1.2 Notationen	11
1.1.3 Operatoren	11
1.1.4 Besondere Eigenschaften der Räume $\mathbf{L}^p(\Omega)$ und ihrer Dualräume	14
1.1.5 Adjungierte Operatoren	15
1.2 Fréchet-Differenzierbarkeit und nicht-lineare Kompaktheit	17
1.2.1 Fréchet-Differenzierbarkeit	17
1.2.2 (nicht-lineare) Kompaktheit	22
1.3 Schlecht-Gestelltheit eines Problems und Regularisierung	23
1.3.1 Schlecht-Gestelltheit	23
1.3.2 Regularisierung	24
2 Tikhonov-Regularisierung	31
2.1 Der lineare Fall auf Hilberträumen	31
2.2 Der nicht-lineare Fall auf Hilberträumen	33
2.3 Verallgemeinerungen für Banachräume	36
2.3.1 Lösbarkeit	37
2.3.2 Eindeutigkeit	39
2.3.3 Stetige Abhängigkeit	40
2.3.4 Konvergenz	43
3 Transformation von $\mathbf{L}^2(\mu)$ in $\mathbf{L}^p(\mu)$ für $p \in [1, 2]$	47
3.1 Definition der Transformation	47
3.2 Einige Eigenschaften	48
4 \mathbf{L}^p-Regularisierung für $p \in [1, 2]$	55
4.1 Gut-Gestelltheit des Tikhonov-Minimierungs-Problems	55
4.1.1 Einbettung in den doppelten Dualraum	56
4.1.2 Einbettung in einen Sobolev-Raum	57
4.2 Ein neuer Lösungsansatz	61
4.3 Ein resultierender Algorithmus	62
4.4 Konvergenzanalyse des neuen Lösungsansatzes	63
4.4.1 Konvexität des Definitionsbereiches	64
4.4.2 Hölder-Stetigkeit der Fréchet-Ableitung	64
4.4.3 Die Quellbedingung	68
4.4.4 Konvergenzraten für $p = 1$	69
4.4.5 Bereits bekannte Konvergenzraten für $p > 1$	72
4.5 Diskussion der Ergebnisse	75
4.5.1 Zusammenfassung für $p = 1$	75
4.5.2 Ausblicke für $p = 1$	76
4.5.3 Ausblicke für $p > 1$	76
4.6 Regularisierung mit ℓ^p -Strafterm	77
4.6.1 Die Räume $\ell^p(S)$	77
4.6.2 ℓ^p -Regularisierung	77
4.6.3 Berechnung der minimierenden Elemente	79

5	Enfaltungsprobleme	83
5.1	Problemstellung	83
5.2	Diskretisierung des Problems	85
5.3	Numerische Ergebnisse	86
5.4	Konvergenzanalyse	95
A	Elementare Topologie	97
A.1	Grundlagen	97
A.2	Netze	102
A.3	Unterhalbstetige Funktionen	103
	Literatur	105

1 Einleitung und Grundlagen

1.1 Die Funktionenräume $L^p(\mu)$

1.1.1 Definitionen

In diesem Abschnitt soll die grundlegende Notation und Definition der Räume $L^p(\mu)$ rekapituliert werden. Wir brauchen dazu Grundlagen aus der Maßtheorie wie „Maßraum“, „ σ -Algebra“, „meßbar“, „Nullmenge“, „fast überall“ usw., die als bekannt vorausgesetzt werden. Für eine Einführung sei etwa auf [Rud99, Kapitel 1] verwiesen. Wir werden als Spezialfall das Lebesgue-Maß stets mit m bezeichnen und $dm = dx$ schreiben. In diesem Zusammenhang bedeutet das Attribut „meßbar“ dann entsprechend Lebesgue-meßbar, „Nullmenge“ entsprechend Lebesgue-Nullmenge usw.

Sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Die Beweise und formalen Grundlagen zu den folgenden Definitionen und Sätzen können etwa in [Wer05, Seite 13ff., Beispiele (h) und (i)] oder [Rud99, Kapitel 3] nachgelesen werden.

1.1 Definition:

Sei $1 \leq p < \infty$. Wir definieren den Raum der p -fach μ -integrierbaren Funktionen auf Ω als

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mu\text{-meßbar und } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Dieser Raum ist für jedes $p \in [1, \infty[$ ein Vektorraum.

1.2 Definition:

Wir definieren durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu)$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$.

1.3 Definition:

Wir definieren den Raum der essentiell beschränkten Funktionen auf Ω durch

$$\mathcal{L}^{\infty}(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mu\text{-meßbar und es gibt eine } \mu\text{-Nullmenge } N \subset \Omega \text{ s.d. } f|_{\Omega \setminus N} \text{ beschränkt ist} \right\}.$$

Dabei bezeichnet $f|_{\Omega \setminus N}$ die kanonische Einschränkung von f auf $\Omega \setminus N$.

Auch dieser Raum ist ein Vektorraum.

1.4 Definition:

Wir definieren durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mu)} := \inf_{N \subset \Omega \text{ } \mu\text{-Nullmenge}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$.

Um nun die Banachräume $L^p(\mu)$ zu konstruieren, setze

$$\mathcal{N}(\mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mu\text{-meßbar und } \mu\text{-fast überall gilt } f = 0\}.$$

Beachte, dass $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ für jedes $p \in [1, \infty]$!

1.5 Definition:

Für $p \in [1, \infty]$ ist der Raum $\mathbf{L}^p(\mu)$ definiert als der Quotientenraum

$$\mathbf{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}(\mu).$$

1.6 Definition:

Sei $[f] \in \mathbf{L}^p(\mu)$. Wähle einen Vertreter $f \in [f]$ und definiere durch

$$\|[f]\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mu)}$$

eine Norm auf $\mathbf{L}^p(\mu)$.

1.7 Bemerkung:

Beachte, dass wir Elemente $[f] \in \mathbf{L}^p(\mu)$ der allgemeinen Konvention ohne die Klassenschreibweise $[\cdot]$ notieren und wie Funktionen behandeln werden. In diesem Sinne identifizieren wir $[f]$ und den Vertreter f . Natürlich ist f dann nur μ -fast überall wohldefiniert.

1.8 Bemerkung:

Des Öfteren werden wir nur den Fall betrachten, dass alle Funktionen reellwertig sind. Dazu verwenden wir folgende Notation:

$$\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu) := \{f \in \mathbf{L}^p(\mu) \mid f \text{ ist } (\mu\text{-fast überall) reellwertig}\}.$$

Offenbar ist es für die Norm auf $\mathbf{L}^p(\mu)$ unbedeutend, ob die Funktion reell- oder komplexwertig ist, da Beträge verwendet werden. Daher schreiben wir auf $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ weiterhin $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}$ als Norm.

1.9 Satz:

Die Räume $(\mathbf{L}^p(\mu), \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mu)})$ für $p \in [1, \infty]$ sind Banachräume.

1.10 Definition:

Für $f, g \in \mathbf{L}^2(\mu)$ definiere

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int_{\mu} f \cdot g \, dx.$$

1.11 Satz:

Es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbf{L}^2(\mu)$, und der Raum $(\mathbf{L}^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu)})$ ist ein Hilbertraum.

1.12 Satz (Höldersche Ungleichung):

Sei $1 \leq r \leq \infty$ und $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ (mit der Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$). Sei außerdem $f \in \mathbf{L}^r(\mu)$ und $g \in \mathbf{L}^s(\mu)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathbf{L}^1(\mu)$ und es gilt

$$\|f \cdot g\|_{\mathbf{L}^1(\mu)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^r(\mu)} \cdot \|g\|_{\mathbf{L}^s(\mu)}. \quad (1.1)$$

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, Satz I.1.10].

Einen Spezialfall der Hölderschen Ungleichung stellt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung dar, die in beliebigen Hilberträumen gilt. In der hier verwendeten Formulierung liefert sie eine etwas stärkere Aussage für $p = q = 2$ als die Höldersche Ungleichung, sie ist uns aus der linearen Algebra bekannt:

1.13 Lemma (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $x, y \in X$ die Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle_X| \leq \|x\|_X \cdot \|y\|_X.$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn x und y linear abhängig sind.

1.1.2 Notationen

Sei im Folgenden stets $p \in [1, \infty]$.

1.14 Bemerkung:

Für den Maßraum $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbf{m})$, wobei \mathbf{m} wie vereinbart das Lebesgue-Maß und \mathcal{B}_Ω die Borelsche σ -Algebra von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet, schreiben wir auch

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \mathbf{L}^p(\mu).$$

Analog notieren wir $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) := \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$.

1.15 Definition:

Sei $R > 0$ eine reelle Zahl und X ein normierter Raum.. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{B}_R(\varphi) = \{y \in X \mid \|x - y\|_X < R\}$$

für $x \in X$ den offenen Ball mit Radius R um x .

Wir werden Konvergenzbegriffe auf den Räumen $\mathbf{L}^p(\Omega)$ benötigen. Insbesondere unterscheiden wir:

1.16 Definition:

Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbf{L}^p(\Omega)$ und $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, so sagen wir, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen f , falls

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und schreiben auch

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f.$$

Diese Konvergenz wird üblicherweise auch als „starke“ Konvergenz bezeichnet.

Ein schwächerer Konvergenzbegriff ergibt sich wie folgt:

1.17 Definition:

Sei τ eine gröbere Topologie auf $\mathbf{L}^p(\Omega)$ als die kanonische Normtopologie $\tau_{\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}}$, d.h. es gilt $U \in \tau \Rightarrow U \in \tau_{\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}}$. Vergleiche dazu auch Definition A.22 ff..

Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbf{L}^p(\Omega)$, die bezüglich der Topologie τ gegen $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ konvergiert, so schreiben wir

$$f_n \xrightarrow[\tau]{n \rightarrow \infty} f.$$

1.1.3 Operatoren

Die Theorie der linearen, stetigen Operatoren zwischen Banachräumen wird vorausgesetzt. Wir wiederholen nur kurz die Notation der Operatornorm sowie einige Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren.

1.18 Definition:

Seien X und Y zwei normierte Räume und $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. Wir definieren die Operatornorm von T durch

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y.$$

Dabei bezeichnet $\sup_{\|x\|_X=1}$ das Supremum über alle $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ und $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ die Norm in X, Y entsprechend.

1.19 Bemerkung:

Beachte, dass T genau dann stetig ist, wenn $\|T\|_{X \rightarrow Y} < \infty$.

Offenbar gilt für $x \in X$, dass

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|x\|_X.$$

Die Abbildung $T \mapsto \|T\|_{X \rightarrow Y}$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(X, Y)$ aller stetigen, linearen Operatoren von X nach Y .

Ist Y ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X, Y)$ ebenfalls ein Banachraum.

Ist X ein normierter Raum über dem vollständigen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist der topologische Dualraum

$$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

also ein Banachraum.

Vergleiche hierzu etwa [Wer05, Satz II.1.4].

1.20 Bemerkung:

Inkonsistenter Weise werden wir für Operatoren

$$T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega)$$

die Operatornorm trotzdem als

$$\|T\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)}$$

schreiben, da es wie weiter oben schon bemerkt für die Norm egal ist, ob es sich um einen Raum reell- oder komplexwertiger Funktionen handelt.

Folgendes Lemma ist aus der Funktionalanalysis bekannt:

1.21 Lemma:

Die Operatornorm ist submultiplikativ, d.h. sind X, Y, Z normierte Räume und $T : Y \longrightarrow Z$ sowie $S : X \longrightarrow Y$ lineare, stetige Operatoren, dann gilt

$$\|T \circ S\|_{X \rightarrow Z} \leq \|T\|_{Y \rightarrow Z} \cdot \|S\|_{X \rightarrow Y}. \quad (1.2)$$

1.22 Definition:

Sei $p \in [1, 2)$ fest, $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Definiere den Multiplikationsoperator

$$\mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)$$

durch

$$\mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}}(\psi) := |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot \psi, \quad \psi \in \mathbf{L}^2(\mu).$$

1.23 Lemma:

Sei $p \in [1, 2)$ fest, $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Dann ist $\mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}}$ wohldefiniert,

linear und stetig mit

$$\left\| \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)} = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2}{p}-1}. \quad (1.3)$$

Beweis:

Nach der Hölderschen Integralungleichung (1.1) gilt mit $r = \frac{2}{2-p}$ und $s = \frac{2}{p}$

$$\left\| |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot \psi \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p = \left\| |\varphi|^{2-p} |\psi|^p \right\|_{\mathbf{L}^1(\mu)} \leq \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{2-p} \cdot \|\psi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^p.$$

Das zeigt die Wohldefiniertheit von $\mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}}$. Die Linearität dieses Operators ist klar.

Außerdem folgt daraus

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)} &= \sup_{\|\psi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}=1} \left\| |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot \psi \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} \\ &\leq \sup_{\|\psi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}=1} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2-p}{p}} \cdot \|\psi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \\ &= \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2}{p}-1}. \end{aligned}$$

Die Wahl von $\psi = \frac{1}{\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}} \varphi$ liefert

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)} &\geq \left\| \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \psi \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} \\ &= \frac{1}{\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{2-p} |\varphi|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}} \cdot \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2}{p}} \\ &= \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2}{p}-1}. \end{aligned}$$

Beides zusammen zeigt die Behauptung. □

Es sei darauf hingewiesen, dass obiges Lemma mit der Vereinbarung $0^0 = 1$ auch für $p = 2$ gültig bleibt. Der resultierende Operator ist in diesem Fall die Identität.

Man kann dieses Lemma noch in einer anderen Form formulieren:

1.24 Lemma:

Sei $p \in [1, 2)$ und $u \in \mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)$. Dann ist

$$\mathcal{M}_u : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu), \quad \varphi \mapsto u \cdot \varphi$$

ein wohldefinierter, linearer und stetiger Operator mit

$$\|\mathcal{M}_u\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)} = \|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}. \quad (1.4)$$

Beweis:

Zunächst folgt wieder mit der Hölderschen Integralungleichung (1.1) für $r = \frac{2}{2-p}$ und $s = \frac{2}{p}$,

dass

$$\begin{aligned} \|u \cdot \varphi\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p &= \| |u|^p |\varphi|^p \|_{\mathbf{L}^1(\mu)} \\ &\leq \|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^p \cdot \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^p. \end{aligned}$$

Das zeigt zum einen die Wohldefiniertheit von \mathcal{M}_u und zum anderen auch

$$\|\mathcal{M}_u\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)} \leq \|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}.$$

Da die Linearität von \mathcal{M}_u klar ist, bleibt nur zu zeigen, dass in (1.4) sogar Gleichheit gilt. Dazu wählen wir

$$\varphi := \frac{|u|^{\frac{p}{2-p}}}{\|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^{\frac{p}{2-p}}}.$$

Zunächst ist dann

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2 = \int_{\Omega} \frac{|u|^{\frac{2p}{2-p}}}{\|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^{\frac{2p}{2-p}}} \, d\mu = 1,$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_u\|_{\mathbf{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbf{L}^p(\mu)}^p &\geq \|\mathcal{M}_u \varphi\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p \\ &= \frac{1}{\|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^{\frac{p^2}{2-p}}} \int_{\Omega} |u|^{p+\frac{p^2}{2-p}} \, d\mu \\ &= \frac{1}{\|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^{\frac{p^2}{2-p}}} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2p}{2-p}} \, d\mu \\ &= \|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^{\frac{2p}{2-p} - \frac{p^2}{2-p}} \\ &= \|u\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\mu)}^p. \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

1.1.4 Besondere Eigenschaften der Räume $\mathbf{L}^p(\Omega)$ und ihrer Dualräume

Dieser Abschnitt soll wiederholen, welche besonderen Eigenschaften die Räume $\mathbf{L}^p(\Omega)$ haben, insbesondere für $p \in [1, 2)$. Da wir später auch die topologischen Dualräume $(\mathbf{L}^p(\Omega))'$ benötigen, wird hier auch die Dualitätstheorie für diese Räume kurz vorgestellt.

1.25 Definition:

Sei X ein normierter Raum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . In Bemerkung 1.19 haben wir schon gesehen, dass der topologische Dualraum X' dann ein Banachraum ist. Für $x \in X$ setze

$$f_x(\lambda) := \lambda(x), \quad \lambda \in X'.$$

Dann ist $f_x \in (X')' =: X''$ und wir definieren durch

$$\iota_X : X \longrightarrow X'', \quad x \mapsto f_x$$

eine stetige lineare Isometrie, die auch als kanonische Einbettung bezeichnet wird. Als Isometrie ist J injektiv.

Ist J auch surjektiv, so nennen wir X reflexiv.

Vergleiche dazu [Wer05, Satz III.3.1].

1.26 Bemerkung:

Ist X ein nicht vollständiger normierter Raum, so kann X offenbar nicht reflexiv sein.

Ist X reflexiv, so gilt per Definition

$$X \cong X'',$$

wobei \cong hier „isometrisch isomorph“ bedeuten soll. Allerdings ist diese Bedingung nicht hinreichend, vergleiche [Wer05, Seite 105].

1.27 Satz:

Sei $1 < p < \infty$. Dann ist der Raum $\mathbf{L}^p(\Omega)$ reflexiv.

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, Seite 105].

1.28 Bemerkung:

Da $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, ist dieser Raum nach dem Satz von Riesz kanonisch isomorph zu seinem Dualraum. Allgemeiner sind Hilberträume stets reflexiv.

1.29 Satz:

Sei $1 \leq p < \infty$. Wie in der Hölderschen Ungleichung gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann definiert

$$\Phi : \mathbf{L}^q(\Omega) \longrightarrow (\mathbf{L}^p(\Omega))', \quad (\Phi g)(f) := \int_{\Omega} fg \, dx$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Da \mathbb{R}^n und entsprechend auch alle Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich dx σ -endlich sind, können wir für den Beweis auf [Wer05, Satz II.2.4] verweisen.

1.30 Bemerkung:

Mit dieser Identifikation ist der Dualraum von $\mathbf{L}^p(\Omega)$ also $\mathbf{L}^q(\Omega)$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Insbesondere ist der Dualraum von $\mathbf{L}^1(\Omega)$ gegeben als

$$(\mathbf{L}^1(\Omega))' \cong \mathbf{L}^\infty(\Omega).$$

1.31 Satz:

Der Raum $\mathbf{L}^1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Vergleiche für den Beweis etwa [Wer05, Seite 62].

1.1.5 Adjungierte Operatoren

1.32 Definition:

Seien X und Y normierte Räume und $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator. Der zu T adjungierte Operator $T' : Y' \longrightarrow X'$ durch

$$(T'y')(x) := y'(Tx), \quad x \in X, \quad y' \in Y'$$

definiert.

Es ist offensichtlich, dass T' wohldefiniert ist und $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ gilt, d.h. dass T' linear und stetig ist.

1.33 Bemerkung:

Sind X , Y und Z normierte Räume und $T : X \longrightarrow Y$, $S : Y \longrightarrow Z$ lineare, beschränkte Operatoren, so gilt

$$(S \circ T)' = T' \circ S'.$$

Die obige Definition ist sehr allgemein, wir werden uns nun mit den Fällen beschäftigen, in denen mindestens einer der beiden Räume X und Y ein Hilbertraum ist. Da nach dem Satz von Riesz der Dualraum eines Hilbertraumes isometrisch isomorph zum Raum selbst ist, erhält man folgende

1.34 Definition:

Sind X und Y Hilberträume und ist $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator, so ist der zu T adjungierte Operator $T^* : Y \longrightarrow X$ ist durch

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^*y \rangle_X, \quad x \in X, y \in Y$$

definiert.

Vergleiche dazu etwa [Wer05, Kapitel V.5, insbes. Definition V.5.1 und Satz V.5.2].

1.35 Definition:

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, X)$ für einen Hilbertraum X heißt selbstadjungiert, falls

$$A^* = A$$

gilt.

Da $\mathbf{L}^p(\Omega)$ für $p \in [1, 2)$ jedoch kein Hilbertraum ist, sind diese Definitionen für uns noch nicht ausreichend.

Hier wollen wir vereinfachend annehmen, dass alle Funktionen reellwertig sind.

1.36 Definition:

Sei $p \in [1, 2)$ fest und sei $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ ein linearer, beschränkter Operator.

Definiere den zu T adjungierten Operator $T^* : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega))'$ durch

$$(T^*\varphi)(\psi) := \langle T\psi, \varphi \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \psi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega), \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega).$$

1.37 Bemerkung:

Wie im Fall zweier Hilberträume in [Wer05] überzeugt man sich schnell davon, dass T^* wohldefiniert sowie linear und beschränkt ist.

Unter der Identifikation $(\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega))' \cong \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega)$ aus Bemerkung 1.30 mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist $T^* : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega)$, und die definierende Gleichung schreibt sich als

$$\int_{\Omega} T\psi \cdot \varphi \, dx = \langle T\psi, \varphi \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \langle \psi, T^*\varphi \rangle_{\text{dual}} = \int_{\Omega} \psi \cdot T^*\varphi \, dx, \quad \psi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega), \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega).$$

1.38 Definition:

Sei $p \in [1, 2)$ fest und $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ ein linearer, beschränkter Operator.

Definiere den zu T adjungierten Operator $T^* : (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega))' \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ durch

$$f(T\varphi) = \langle \varphi, T^*f \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad f \in (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega))', \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega).$$

1.39 Bemerkung:

Wie im Fall zweier Hilberträume in [Wer05] überzeugt man sich schnell davon, dass T^* wohldefiniert sowie linear und beschränkt ist.

Unter der Identifikation $(\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega))' \cong \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega)$ aus Bemerkung 1.30 mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist $T^* : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ und die definierende Gleichung schreibt sich als

$$\int_{\Omega} T\varphi \cdot f \, dx = \langle T\varphi, f \rangle_{\text{dual}} = \langle \varphi, T^*f \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi \cdot T^*f \, dx, \quad f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega), \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega).$$

Wir benötigen vor allem den Fall

$$T \circ S : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$$

mit beschränkten, linearen Operatoren $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ und $S : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ für ein $p \in [1, 2)$. Diesen Fall wollen wir nun etwas genauer untersuchen:

1.40 Lemma:

Ist $p \in [1, 2)$ fest und sind $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$, $S : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ lineare, beschränkte Operatoren, so gilt

$$(T \circ S)^* \varphi = (S^* \circ T^*) \varphi$$

für alle $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$.

Beweis:

Für alle $f, g \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ gilt per Definition

$$\begin{aligned} \langle f, (T \circ S)^* g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \langle (T \circ S) f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \langle Sf, T^*g \rangle_{\text{dual}} \\ &= \langle f, S^* \circ T^*g \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

1.41 Bemerkung:

Natürlich verallgemeinert sich diese Aussage auch für Operatoren zwischen \mathbf{L}^p -Räumen mit anderen Maßen als dem Lebesgue-Maß.

1.2 Fréchet-Differenzierbarkeit und nicht-lineare Kompaktheit

Später in dieser Arbeit werden der Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit sowie einige Eigenschaften Fréchet-differenzierbarer Operatoren benötigt. Darüber hinaus wird in diesem Abschnitt kurz der Begriff der (nicht-linearen) Kompaktheit von Operatoren wiederholt.

Seien hier stets X und Y normierte Räume.

1.2.1 Fréchet-Differenzierbarkeit

1.42 Definition:

Sei $\mathcal{U} \subset X$ offen und $T : \mathcal{U} \longrightarrow Y$ ein Operator. Wir nennen T an der Stelle $x \in \mathcal{U}$ **Fréchet-differenzierbar**, falls es einen linearen, beschränkten Operator $T'[x] : X \longrightarrow Y$ gibt mit

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - T'[x]h\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \quad h \in X.$$

Der Operator $T'[x]$ wird dann die **Fréchet-Ableitung** von T an der Stelle x genannt.

Wir nennen T Fréchet-differenzierbar in \mathcal{U} , falls T an jeder Stelle $x \in \mathcal{U}$ Fréchet-differenzierbar ist.

1.43 Bemerkung:

Man überzeugt sich leicht, dass die Fréchet-Ableitung sofern existent eindeutig bestimmt ist. Außerdem impliziert Fréchet-Differenzierbarkeit die Stetigkeit des Operators.

Zuletzt sieht man als Beispiel sofort, dass lineare Operatoren stets Fréchet-differenzierbar sind und als Fréchet-Ableitung in jedem Punkte φ sich selbst haben.

1.44 Satz (Kettenregel):

Seien X, Y, Z normierte Räume sowie $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen. Seien $T : U \longrightarrow V$ und $S : V \longrightarrow Z$ Fréchet-differenzierbare Operatoren. Dann ist $S \circ T : U \longrightarrow Z$ ebenfalls Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$(S \circ T)' [x] = S' [T(x)] \circ T' [x], \quad x \in U.$$

Beweis:

Sei $x \in U$ und $h \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{\|(S \circ T)(x+h) - (S \circ T)(x) - (S'[T(x)] \circ T'[x])h\|_Z}{\|h\|_X} \\ &= \frac{\|S(T(x+h)) - S(T(x)) - S'[T(x)](T'[x]h)\|_Z}{\|h\|_X} \\ &\leq \frac{\|S(T(x+h)) - S(T(x)) - S'[T(x)](T(x+h) - T(x))\|_Z}{\|h\|_X} \\ &\quad + \frac{\|S'[T(x)](T(x+h) - T(x) - T'[x]h)\|_Z}{\|h\|_X} \\ &\leq \frac{\|S(T(x+h)) - S(T(x)) - S'[T(x)](T(x+h) - T(x))\|_Z}{\|T(x+h) - T(x)\|_Y} \cdot \frac{\|T(x+h) - T(x)\|_Y}{\|h\|_X} \\ &\quad + \|S'[T(x)]\|_{Y \rightarrow Z} \cdot \frac{\|T(x+h) - T(x) - T'[x]h\|_Y}{\|h\|_X}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $S'[T(x)]$ ein beschränkter linearer Operator, d.h. es ist

$$\|S'[T(x)]\|_{Y \rightarrow Z} < \infty.$$

Wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit von T gilt

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - T'[x]h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

damit folgt, dass der zweite Term der rechten Seite für $\|h\|_X \rightarrow 0$ gegen 0 geht.

Mit $y := T(x)$ und $j := T(x+h) - T(x)$ ist der erste Term der rechten Seite genau

$$\frac{\|S(y+j) - S(y) - S'[y]j\|_Z}{\|j\|_Y} \cdot \frac{\|T(x+h) - T(x)\|_Y}{\|h\|_X}.$$

Da T Fréchet-differenzierbar ist, ist T stetig, d.h. mit $\|h\|_X \rightarrow 0$ geht auch $\|j\|_Y \rightarrow 0$. Aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von S folgt also, dass der erste Term dieses Produktes für $\|h\|_X \rightarrow 0$ gegen 0 geht, ebenso wie dass der zweite Term dieses Produktes beschränkt bleibt, da T Fréchet-differenzierbar ist. \square

Folgendes Ergebnis benötigen wir für die Analyse der Tikhonov-Regularisierung:

1.45 Lemma:

Sei U eine offene Teilmenge des normierten Raumes X . Ist $T : U \longrightarrow \mathbb{R}$ Fréchet-differenzierbar

an der Stelle $\varphi \in U$ und ist $\varphi \in U$ ein lokales Minimum von T , so ist

$$T'[\varphi] = 0.$$

Beweis:

Wir nehmen an, es wäre $T'[\varphi]h \neq 0$ für ein $h \in X$ mit $\|h\|_X = 1$. Ohne Einschränkung nehmen wir $T'[\varphi]h < 0$ an. Damit gilt dann aber wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit von T an φ , dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{T(\varphi + \varepsilon h) - T(\varphi)}{\varepsilon} = T'[\varphi]h < 0.$$

Da aber φ nach Annahme ein lokales Minimum ist, muss für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ stets

$$T(\varphi + \varepsilon h) - T(\varphi) \geq 0$$

gelten - ein Widerspruch! □

Darüber hinaus benötigen wir noch folgende Theorie für die Analyse der nicht-linearen Tikhonov-Regularisierung. Sie ist [Hoh02, Kapitel 7] entnommen.

1.46 Definition:

Sei $G : [a, b] \longrightarrow X$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit Werten in dem Hilbertraum X . Das Funktional $L : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$L(\varphi) := \int_a^b \langle G(t), \varphi \rangle_X dt$$

ist antilinear und nach Cauchy-Schwarz beschränkt, da $t \mapsto \|G(t)\|_X$ stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$ ist. Nach dem Satz von Riesz gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in X$ mit $L(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle_X$ für alle $\varphi \in X$. Dann definieren wir

$$\int_a^b G(t) dt := x.$$

1.47 Bemerkung:

Nach dem Satz von Riesz ist sofort klar, dass die Standard-Abschätzung

$$\left\| \int_a^b G(t) dt \right\|_X = \sup_{\|\varphi\|_X=1} |L(\varphi)| \leq \int_a^b \|G(t)\|_X dt$$

gilt.

1.48 Lemma:

Seien X, Y Hilberträume und $U \subset X$ offen. Seien außerdem $\varphi, h \in X$ so, dass $\varphi + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Ist $T : X \longrightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar derart, dass $t \mapsto T'[\varphi + th]$ stetig auf $[0, 1]$ ist, so gilt

$$T(\varphi + h) - T(\varphi) = \int_0^1 T'[\varphi + th] h dt$$

im obigen Sinne.

Beweis:

Für gegebenes $\psi \in Y$ betrachten wir die Funktion

$$f(t) := \langle T(\varphi + th), \psi \rangle_Y, \quad t \in [0, 1].$$

Da $y \mapsto \langle y, \psi \rangle_Y$ linear ist, folgt aus der Kettenregel (Satz 1.44) die Fréchet-Differenzierbarkeit (d.h. in diesem Fall die gewöhnliche Differenzierbarkeit) von f mit

$$f'(t) = \langle T'[\varphi + th]h, \psi \rangle_Y.$$

Darüber hinaus ist f' unter den gemachten Voraussetzungen stetig. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$\langle T(\varphi + h) - T(\varphi), \psi \rangle_Y = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \left\langle \int_0^1 T'[\varphi + th]h dt, \psi \right\rangle_Y$$

mit obiger Definition des Integrals. Da diese Gleichung für alle $\psi \in Y$ gilt, folgt die Behauptung. \square

1.49 Lemma:

Seien X und Y Hilberträume und sei $U \subset X$ offen. Es sei $T : U \rightarrow Y$ Fréchet-differenzierbar und es gebe eine Konstante $L \geq 0$ und eine Zahl $s > 0$ derart, dass

$$\|T'[\varphi_1] - T'[\varphi_2]\|_{X \rightarrow Y} \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X^s$$

für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in U$. Ist $\varphi + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, so gilt unter diesen Voraussetzungen die Ungleichung

$$\|T(\varphi + h) - T(\varphi) - T'[\varphi]h\|_Y \leq \frac{L}{s+1} \|h\|_X^{s+1}.$$

Beweis:

Unter den gemachten Voraussetzungen ist $\varphi \mapsto T'[\varphi]$ offenbar stetig. Nach obigem Lemma gilt also

$$T(\varphi + h) - T(\varphi) = \int_0^1 T'[\varphi + th]h dt.$$

Das liefert zusammen mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned} \|T(\varphi + h) - T(\varphi) - T'[\varphi]h\|_Y &= \left\| \int_0^1 (T'[\varphi + th]h - T'[\varphi]h) dt \right\|_Y \\ &\leq \int_0^1 \|T'[\varphi + th]h - T'[\varphi]h\|_Y dt \\ &\leq \int_0^1 Lt^s \|h\|_X^{s+1} dt \\ &= \frac{L}{s+1} \|h\|_X^{s+1} \end{aligned}$$

und zeigt somit die Behauptung. \square

Zuletzt wollen wir noch eine ganze Klasse von (reell) Fréchet-differenzierbaren Operatoren

$$T : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)$$

mit $p \in [1, 2)$ angeben.

1.50 Satz:

Sei $p \in [1, 2)$ fest und $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Weiterhin seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(1) f ist als Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ total differenzierbar mit totalem Differential $D_z f$ an $z \in \mathbb{R}^2$,

(2) es gibt eine Konstante $c \geq 0$ derart, dass

$$\|D_{z+h}f - D_zf\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \leq c \cdot \|h\|_{\mathbb{R}^2}^{\frac{2}{p}-1}$$

für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und $h \in \mathbb{R}^2$ gilt und

(3) für alle $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ ist $(f \circ \varphi) \in \mathbf{L}^p(\mu)$.

Dann ist der Operator

$$T_f : \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu), \quad T_f(\varphi) := f \circ \varphi \text{ fast überall,} \quad \varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$$

wohldefiniert und reell Fréchet-differenzierbar mit formaler Fréchet-Ableitung

$$T'_f[\varphi]h = D_\varphi f \cdot \begin{pmatrix} \Re(h) \\ \Im(h) \end{pmatrix}$$

für $h, \varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Das meint mit den Bezeichnungen $f_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ für $1 \leq j, k \leq 2$ genauer

$$T'_f[\varphi]h = (f_{11} \circ \varphi) \cdot \Re(h) + (f_{12} \circ \varphi) \cdot \Im(h) + i((f_{21} \circ \varphi) \cdot \Re(h) + (f_{22} \circ \varphi) \cdot \Im(h)).$$

Beweis:

Nach Voraussetzung (3) ist T_f offenbar wohldefiniert.

Da \mathbb{R}^2 ein Hilbertraum ist, liefert Lemma 1.49 mit Voraussetzung (2) entsprechend

$$\|f(z+h) - f(z) - D_x f h\|_{\mathbb{R}^2} \leq \frac{cp}{2} \|h\|_{\mathbb{R}^2}^{\frac{2}{p}} \quad (1.5)$$

für alle $x, h \in \mathbb{R}^2$.

Da $t \mapsto t^p$ für das gegebene p monoton wachsend ist folgt unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Norm im \mathbb{R}^2 genau der Betrag der identifizierten komplexen Zahl ist, dass

$$\begin{aligned} \|T_f(\varphi+h) - T_f(\varphi) - D_\varphi f \cdot h\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p &= \int_{\Omega} |f \circ (\varphi+h) - f \circ \varphi - D_\varphi f \cdot h|^p \, d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{cp}{2}\right)^p \left(|h|^{\frac{2}{p}}\right)^p \, d\mu \\ &= \left(\frac{cp}{2}\right)^p \|h\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir (1.5) punktweise verwendet haben. Insbesondere haben wir also

$$\|T_f(\varphi + h) - T_f(\varphi) - D_\varphi f \cdot h\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} \leq \frac{c_p}{2} \cdot \|h\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2}{p}},$$

und da $\frac{2}{p} > 1$ für das gegebene $p \in [1, 2)$ ist, folgt somit die Behauptung. \square

1.51 Bemerkung:

Sind die Voraussetzungen von Satz 1.50 für $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ erfüllt und ist $f|_{\mathbb{R}}$ reellwertig, so gilt insbesondere auch $T_f : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$, und T_f ist Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$T'_f[\varphi]h = \left((f|_{\mathbb{R}})' \circ \varphi \right) \cdot h,$$

d.h. $T'_f[\varphi] = \mathcal{M}_{(f|_{\mathbb{R}})' \circ \varphi}$.

1.2.2 (nicht-lineare) Kompaktheit

1.52 Definition:

Seien X, Y normierte Räume und sei

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$$

ein Operator. Wir nennen T **kompakt**, falls für jede beschränkte Menge $U \subset \mathcal{D}(T)$ das Bild $T(U)$ von U unter T in Y relativ kompakt ist.

1.53 Bemerkung:

Beachte, dass im nicht-linearen Fall aus der Kompaktheit von T nicht zwingend die Stetigkeit von T folgt.

1.54 Bemerkung:

Seien X, Y, Z normierte Räume und sei $T = H \circ G$ mit $G : \mathcal{D}(G) \subset X \longrightarrow Z$ und $H : Z \longrightarrow Y$. Es ist per Definition klar, dass dann T kompakt ist, falls

- G kompakt und H stetig ist oder
- G stetig und H kompakt ist.

1.55 Lemma:

Seien X, Y normierte Räume und $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ kompakt. Sei weiterhin $\mathcal{D}(T)$ offen in X und X unendlich-dimensional. Dann kann es keinen stetigen Operator T^{-1} geben.

Beweis:

Falls T^{-1} nicht existiert, ist nichts zu zeigen. Angenommen T^{-1} existiert als stetiger Operator. Dann ist

$$\text{id} = T^{-1} \circ T$$

kompakt, und da insbesondere ein $\varphi_0 \in \mathcal{D}(T)$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, s.d.

$$B = \{\varphi \in X \mid \|\varphi - \varphi_0\|_X < \varepsilon\} \subset \mathcal{D}(T)$$

ist dann

$$B = \text{id}(B)$$

relativ kompakt. Dies widerspricht wegen $\dim(X) = \infty$ aber der Tatsache, dass die Einheitskugel eines normierten Raumes genau dann kompakt ist, wenn der Raum endlich-dimensional ist (vergleiche etwa [Wer05, Satz I.2.7]). \square

Für die numerische Implementation von Regularisierungsmethoden (vergleiche den nächsten Abschnitt) ist insbesondere auch noch folgendes Lemma interessant:

1.56 Lemma:

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und sei $\mathcal{D}(T) \subset X$ offen für einen kompakten und Fréchet-differenzierbaren Operator $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow Y$. Dann ist $T'[\varphi] : X \longrightarrow Y$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ ein kompakter Operator.

Für den Beweis verweisen wir auf [Hoh02, Theorem 7.8].

1.3 Schlecht-Gestelltheit eines Problems und Regularisierung

Hier wollen wir kurz die Theorie der Inversen Probleme vorstellen und anschließend einige Lösungsansätze diskutieren. Dieser Abschnitt orientiert sich an [EHN96] und [Rie03].

1.3.1 Schlecht-Gestelltheit

Die folgenden beiden Definitionen sind aus [Rie03, Kapitel 1.5] übernommen:

1.57 Definition:

Ein **mathematisches Modell** [zu einem Problem] ist eine Abbildung

$$T : X \longrightarrow Y$$

von der Menge der Ursachen (Parameter) X in die Menge der Wirkungen (Daten) Y . Im **direkten Problem** berechnen wir die Wirkung aus der Ursache, d.h. wir ermitteln $T\varphi$ für $\varphi \in X$. Im umgekehrten Fall sprechen wir vom **inversen Problem**: wir finden zur Wirkung $g \in Y$ die Ursache $\varphi \in X$, s.d. $T\varphi = g$ ist.

1.58 Bemerkung:

Beachte, dass wir im Sinne dieser Definition von dem Problem (T, X, Y) sprechen werden. Damit kann sowohl das inverse als auch das direkte Problem gemeint sein. Sprechen wir von dem Problem $T\varphi = g$, so ist stets das inverse Problem im Sinne der obigen Definition gemeint.

1.59 Definition (gut gestelltes Problem nach Hadamard):

Sei $T : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y . Das Problem (T, X, Y) heißt **gut gestellt** (well-posed), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) Die Gleichung $T\varphi = g$ hat für jedes $g \in Y$ eine Lösung.
- (2) Diese Lösung ist eindeutig bestimmt.
- (3) Die inverse Abbildung $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ ist stetig, d.h. die Lösung φ hängt stetig von den Daten g ab (kleine Störungen in g bewirken kleine Störungen in φ).

Ist eine der Bedingungen verletzt, so heißt das Problem **schlecht gestellt** (ill-posed).

Hadamard definierte in [Had52, Seite 4] den Begriff „correctly set“ für ein Problem ganz ähnlich. Er ging - wie auch einige andere (zum Beispiel Courant oder Hilbert, vergleiche [CH62]) - davon aus, dass mathematische Modelle, die physikalische Probleme modellieren, immer auf gut gestellte Probleme führen. Anderenfalls müsse das mathematische Modell unvollständig oder fehlerhaft sein. Diese Annahme wird heute jedoch als falsch angesehen: Inverse Probleme sind häufig schlecht gestellt, insbesondere dann, wenn die Daten nicht exakt vorliegen, sondern aus Messungen gewonnen werden. In diesem Fall ist die Bedingung (3) besonders kritisch, sie ist auch am häufigsten verletzt.

Natürlich hängt die Bedingung (3) stark von den verwendeten Topologien auf X und Y ab. Beachte, dass man die Stetigkeit des inversen Operators T^{-1} entweder durch Wahl einer größeren

Topologie auf X oder durch Verfeinern der Topologie auf Y erzwingen kann - meist sind die Topologien auf X und Y jedoch durch die Problemstellung vorgegeben.

Wir wollen nun noch eine hinreichende Bedingung dafür angeben, dass ein Problem (T, X, Y) schlecht gestellt ist.

Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass beispielsweise kompakte Operatoren mit nicht-endlichdimensionalem Bildraum schlecht gestellte Probleme definieren. Das folgt schon aus Lemma 1.55. Vergleiche dazu etwa [Rie03, Satz 2.2.8 (e)].

Eine genauere Formulierung liefert folgendes Lemma:

1.60 Lemma:

Seien X und Y Hilberträume, $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ kompakt und stetig (aber nicht zwingend linear). Sei außerdem T schwach abgeschlossen, d.h. ist $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ eine gegen $\varphi \in X$ schwach konvergente Folge und konvergiert auch die Folge $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen $g \in Y$, so folgt

$$\varphi \in \mathcal{D}(T) \quad \text{und} \quad T(\varphi) = g.$$

Sei $T(x^\dagger) = y$ für ein $x^\dagger \in \mathcal{D}(T)$ und es gebe ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $T(x) = \bar{y}$ für alle $\bar{y} \in \mathcal{R}(T) \cap \{\omega \in Y \mid \|\omega - y\|_Y < \varepsilon\}$ eindeutig lösbar ist. Falls es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ gibt, welche schwach aber nicht stark gegen x^\dagger konvergiert, so ist T^{-1} (definiert auf $\bar{y} \in \mathcal{R}(T) \cap \{\omega \in Y \mid \|\omega - y\|_Y < \varepsilon\}$) nicht stetig an y .

Für den Beweis verweisen wir auf [EHN96, Proposition 10.1].

1.3.2 Regularisierung

Ist ein Problem schlecht gestellt, weil Bedingung (3) verletzt ist, so hat man insbesondere die Schwierigkeit, dass ein kleiner Messfehler in den Daten zu einem beliebig großen Fehler in den Parametern führen kann. Um das Problem trotzdem adäquat und möglichst genau zu lösen, muss man regularisieren. Der erste Schritt der Regularisierung besteht darin, das Problem so zu formulieren, dass die Bedingungen (1) und (2) (zumindest im linearen Fall) keine Schwierigkeiten mehr machen. Dazu benötigt man zunächst die so genannte **Moore-Penrose-Inverse** des Operators T . Diese kann nicht für allgemeine topologische Räume definiert werden, da sie zu wenig Struktur besitzen. Daher nehmen wir hier stets an, dass X und Y Hilberträume sind. In diesem Fall können wir definieren:

1.61 Definition:

Sei $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer beschränkter Operator. Dann ist

$$\mathcal{R}(T) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } Tx = y\}$$

der **Wertebereich** von T und

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X \mid Tx = 0 \in Y\}$$

der **Nullraum** von T . Für einen Unterraum $W \subset X$ bezeichnen wir mit W^\perp das **orthogonale Komplement** von W , d.h.

$$W^\perp := \{x \in X \mid \langle x, w \rangle_X = 0 \text{ für alle } w \in W\}.$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ das Skalarprodukt in X .

Jetzt können wir uns der verallgemeinerten Inversen von T zuwenden:

1.62 Definition:

Sei $T : X \longrightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator.

(1) $\varphi \in X$ heißt **least-squares-Lösung** von $T\varphi = g$, falls

$$\|T\varphi - g\|_Y = \inf_{x \in X} \|Tx - g\|_Y$$

gilt.

(2) Wir nennen $\varphi \in X$ die **beste Approximation** an $T\varphi = g$, falls φ eine least-squares-Lösung von $T\varphi = g$ ist und

$$\|\varphi\|_X = \inf \{ \|x\|_X \mid x \text{ ist least-squares-Lösung von } T\varphi = g \}$$

gilt.

Die beste Approximation an $T\varphi = g$ ist also eine least-squares-Lösung von $T\varphi = g$ mit minimaler Norm. Man kann zeigen, dass es stets höchstens eine beste Approximation an $T\varphi = g$ gibt.

1.63 Definition:

Die (verallgemeinerte) **Moore-Penrose-Inverse** T^\dagger von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist definiert als die eindeutige lineare Fortsetzung von \tilde{T}^{-1} auf

$$\mathcal{D}(T^\dagger) := \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$$

mit

$$\mathcal{N}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T)^\perp$$

für

$$\tilde{T} := T|_{\mathcal{N}(T)^\perp} : \mathcal{N}(T)^\perp \longrightarrow \mathcal{R}(T).$$

Diese Definition ist [EHN96, Definition 2.2] entnommen, die Wohldefiniertheit von T^\dagger kann dort nachgelesen werden. Eine andere Möglichkeit, die Moore-Penrose-Inverse zu definieren, findet sich bei [Rie03, Abschnitt 2.1].

Wir wollen nun kurz die Konsequenzen dieser Definitionen zusammenfassen:

1.64 Lemma:

Die Abbildung $T^\dagger : \mathcal{D}(T^\dagger) \longrightarrow \mathcal{N}(T)^\perp$ ist beschränkt genau dann, wenn $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist.

Für den Beweis verweisen wir auf [EHN96, Proposition 2.4].

1.65 Lemma:

Sei $g \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Dann hat das Problem $T\varphi = g$ eine eindeutige beste Approximation φ^\dagger , welche durch

$$\varphi^\dagger = T^\dagger g$$

gegeben ist.

Für den Beweis verweisen wir auf [EHN96, Theorem 2.5].

1.66 Lemma:

Sei $g \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Dann ist $\varphi \in X$ genau dann eine least-squares-Lösung von $T\varphi = g$, wenn

$$T^*T\varphi = T^*g$$

gilt.

Für den Beweis verweisen wir auf [EHN96, Theorem 2.6].

Jetzt können wir uns dem eigentlichen Begriff der Regularisierung zuwenden. Wir orientieren uns bei der Begriffsbildung an [Rie03, Definition 3.1.1].

1.67 Definition:

Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Familie stetiger (möglicherweise nicht-linearer) Operatoren von Y nach X mit $R_\alpha 0 = 0$ für alle $\alpha > 0$. Falls es eine Abbildung $\gamma :]0, \infty[\times Y \longrightarrow]0, \infty[$ derart gibt, dass für jedes $g \in \mathcal{R}(T)$ die Relation

$$\sup \left\{ \left\| T^\dagger g - R_{\gamma(\delta, g^\delta)} g^\delta \right\|_X \mid g^\delta \in Y, \left\| g - g^\delta \right\|_Y \leq \delta \right\} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

gilt, so heißt das Paar $(\{R_\alpha\}_{\alpha>0}, \gamma)$ eine **Regularisierung** oder ein **Regularisierungsverfahren** für T^\dagger . Wir sprechen von einer **linearen Regularisierung**, falls alle R_α linear sind. Die Abbildung γ wird **Parameterwahl** genannt. Sie sei so orientiert, dass

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \gamma(\delta, g^\delta) \mid g^\delta \in Y, \left\| g - g^\delta \right\|_Y \leq \delta \right\} = 0$$

ist.

Der Zahlenwert $\gamma(\delta, g^\delta)$ heißt **Regularisierungsparameter**. Hängt γ nur von δ ab, so sprechen wir von einer **a priori Parameterwahl**, ansonsten von einer **a posteriori Parameterwahl**.

1.68 Bemerkung:

Eine Regularisierung des (schlecht gestellten) Problems (T, X, Y) ist also eine Approximation von T^\dagger durch eine Familie stetiger Operatoren $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ auf Y . Allerdings ist damit noch nicht geklärt, welches $\alpha > 0$ wir wählen müssen, damit $R_\alpha g^\delta$ den Wert $T^\dagger g$ wirklich approximiert! Es ist nicht allgemein möglich, $\alpha > 0$ so zu wählen, dass $R_\alpha g^\delta$ das best-approximierende Element der Menge $\{R_\beta g^\delta \mid \beta > 0\}$ ist, da wir $T^\dagger g$ nicht kennen. Daher fordert die obige Definition nur die asymptotische Annäherung von $R_\alpha g^\delta$ an $T^\dagger g$ bei abnehmendem Rauschpegel δ .

Es ist nicht zwingend erforderlich, \mathbb{R}^+ als Parameterbereich für α zu verwenden. Bei iterativen Regularisierungsverfahren (auf die hier nicht näher eingegangen wird) handelt es sich beispielsweise um eine diskrete Menge mit Häufungspunkt in der Null.

Wir wollen nun eine allgemeine Theorie linearer Regularisierungen vorstellen. Dazu leistet uns der so genannte **Funktionalkalkül** gute Dienste:

1.69 Satz (Stetiger Funktionalkalkül):

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$\Phi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{L}(X, X)$$

mit

(1) $\Phi(t) = T$ und $\Phi(1) = \text{id}_X$ (dabei symbolisiert t die Funktion $t \mapsto t$ und 1 die Funktion $t \mapsto 1$),

(2) Φ ist ein involutiver Algebrenhomomorphismus, d.h.

- Φ ist linear,
- Φ ist multiplikativ, also

$$\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g),$$

- Φ ist involutiv, also

$$\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*,$$

und

(3) Φ ist stetig.

Dabei bezeichnet $\sigma(T)$ das Spektrum von T , d.h.

$$\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - T)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{L}(X, X) \right\}.$$

Φ heißt stetiger Funktionalkalkül von T . Wir schreiben

$$f(T) := \Phi(f)$$

für $f \in C(\sigma(T))$.

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, Satz VII.1.3].

Darüber hinaus besitzt der Funktionalkalkül eine weitere nützliche Eigenschaft:

1.70 Satz:

Sei wieder X ein Hilbertraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ selbstadjungiert. Sei $f \mapsto f(T)$ der stetige Funktionalkalkül zu T auf $C(\sigma(T))$. Dann gilt

$$\|f(T)\|_{X \rightarrow X} = \|f\|_{\infty} := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|$$

für alle $f \in C(\sigma(T))$.

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, Satz VII.1.4, (a)].

Diese Aussage macht um so mehr Sinn, da $\sigma(T)$ für selbstadjungiertes T kompakt in \mathbb{R} ist:

1.71 Lemma:

Sei X ein reeller oder komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ selbstadjungiert. Bezeichne

$$m(T) := \inf_{\|x\|_X=1} \langle Tx, x \rangle \quad \text{und} \quad M(T) := \sup_{\|x\|_X=1} \langle Tx, x \rangle.$$

Dann sind $m(T)$ und $M(T)$ reelle Zahlen und es gilt $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$.

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, Korollar VII.1.2].

Diese grundlegenden Ergebnisse aus der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren genügen, um eine allgemeine Theorie linearer Regularisierungen herzuleiten. Sei dazu $T : X \longrightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator auf Hilberträumen X und Y über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Wir beschäftigen uns mit der Operatorgleichung

$$T\varphi = g$$

für $g \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ und nehmen stets $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ an.

1.72 Bemerkung:

Beachte zunächst, dass $T^*T : X \longrightarrow X$ in jedem Falle selbstadjungiert ist. Daher können wir auf diesen Operator obigen Funktionalkalkül anwenden.

Außerdem ist

$$\langle T^*Tx, x \rangle_X = \langle Tx, Tx \rangle_Y \geq 0,$$

weshalb $m(T) \geq 0$ in der Notation von Lemma 1.71 gilt. Genauso sieht man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Lemma 1.13)

$$\langle T^*Tx, x \rangle_X \leq \|T^*Tx\|_X \cdot \|x\|_X \leq \|T^*T\|_{X \rightarrow X} \cdot \|x\|_X^2.$$

Das zeigt $M(T) \leq \|T^*T\|_{X \rightarrow X}$ und somit

$$\sigma(T^*T) \subset [0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}].$$

Wir können also den Funktionalkalkül $f(T^*T)$ für beliebige Funktionen $f \in C([0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}])$ bilden.

Nun wollen wir T^\dagger durch die Familie

$$R_\alpha := q_\alpha(T^*T)T^*$$

von stetigen Operatoren approximieren. Dabei ist $q_\alpha \in C([0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}])$ und $\alpha > 0$.

Wir verwenden die folgenden üblichen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}\varphi^\dagger &:= T^\dagger g, \\ \varphi_\alpha &:= R_\alpha g, \\ \varphi_\alpha^\delta &:= R_\alpha g^\delta.\end{aligned}$$

Man definiert außerdem

$$r_\alpha(\lambda) := 1 - \lambda q_\alpha(\lambda), \quad \lambda \in [0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}],$$

denn dann kann man zeigen, dass der Rekonstruktionsfehler unter exakten Daten

$$\varphi^\dagger - \varphi_\alpha = r_\alpha(T^*T)\varphi^\dagger$$

erfüllt (vergleiche [Hoh02, Gleichung (5.4)]).

Nehmen wir nun an, dass die Funktionen q_α und r_α die Bedingungen

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha(\lambda) &=: r_0(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda > 0, \\ 1 & \text{falls } \lambda = 0 \end{cases}, \\ |r_\alpha(\lambda)| &\leq C_r \text{ für alle } \lambda \in [0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}], \\ |q_\alpha(\lambda)| &\leq \frac{C_q}{\alpha} \text{ für alle } \lambda \in [0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}] \end{aligned} \quad (1.6)$$

mit Konstanten $C_r > 0$, $C_q > 0$ erfüllen, so haben wir folgenden

1.73 Satz:

Unter diesen Bedingungen konvergieren die Operatoren R_α mit $\alpha \rightarrow 0$ punktweise gegen T^\dagger . Außerdem gilt

$$\|R_\alpha\|_{Y \rightarrow X} \leq \sqrt{\frac{(C_r + 1)C_q}{\alpha}}.$$

Ist $\gamma(\delta, g^\delta)$ eine Parameterauswahlregel mit

$$\gamma(\delta, g^\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ und } \frac{\delta}{\sqrt{\gamma(\delta, g^\delta)}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

so ist $(\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}, \gamma)$ eine Regularisierungsmethode für T^\dagger .

Für den Beweis verweisen wir auf [Hoh02, Theorem 5.1].

Man kann allerdings zeigen, dass die Konvergenz einer jeden Regularisierungsmethode im Allgemeinen beliebig langsam sein kann:

1.74 Satz:

Es gebe eine Regularisierungsmethode $(\{R_\alpha\}_{\alpha > 0}, \gamma)$ für T^\dagger und eine stetige Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

mit $f(0) = 0$ derart, dass

$$\sup \left\{ \left\| R_{\gamma(\delta, g^\delta)} g^\delta - T^\dagger g \right\|_X \mid g^\delta \in Y, \left\| g - g^\delta \right\|_Y \leq \delta \right\} \leq f(\delta)$$

für alle $g \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ mit $\|g\|_Y \leq 1$ und alle $\delta > 0$.

Dann ist T^\dagger stetig.

Für den Beweis verweisen wir auf [Hoh02, Theorem 3.11]

Dieser Satz zeigt insbesondere, dass für jede Regularisierungsmethode für ein schlecht-gestelltes Problem die Konvergenz beliebig langsam sein kann. Es sind also zusätzliche Annahmen über den Operator T und die exakte Lösung φ^\dagger nötig, um Konvergenzraten zu zeigen. Im Kontext allgemeiner Hilberträume X und Y haben diese Annahmen die Form

$$\varphi^\dagger = f(T^*T)\omega$$

für ein $\omega \in X$ mit $\|\omega\|_X \leq \rho$ und einer stetigen Funktion f mit $f(0) = 0$. Solch eine Annahme wird auch **Quellbedingung** genannt. Die häufigste Wahl für f in diesem Zusammenhang ist

$$f(\lambda) = \lambda^\mu$$

mit einem $\mu > 0$. In diesem Fall spricht man auch von **Hölderquellbedingungen**. Oftmals kann eine solche Bedingung als abstrakte Glattheitsbedingung betrachtet werden, insbesondere dann, wenn T ein in gewissem Sinne „glättender“ Operator ist (vergleiche [Hoh02, Kapitel 6]).

Darüber hinaus ist es notwendig anzunehmen, dass es Konstanten $0 \leq \mu_0 \leq \infty$ und $C_\mu > 0$ gibt, s.d.

$$\sup_{\lambda \in [0, \|T^*T\|_{X \rightarrow X}]} |\lambda^\mu r_\alpha(\lambda)| \leq C_\mu \alpha^\mu \text{ für } 0 \leq \mu \leq \mu_0. \quad (1.7)$$

Unter diesen Annahmen erhält man den folgenden

1.75 Satz:

Möge (1.7) und $\varphi^\dagger = (T^*T)^\mu \omega$ mit $\omega \in X$, $\|\omega\|_X \leq \rho$ für $0 \leq \mu \leq \mu_0$ gelten. Dann erfüllt der Approximationsfehler die Abschätzung

$$\left\| \varphi^\dagger - \varphi_\alpha \right\|_X \leq C_\mu \alpha^\mu \rho$$

für alle $0 \leq \mu \leq \mu_0$ und das Bild unter T erfüllt

$$\left\| T\varphi^\dagger - T\varphi_\alpha \right\|_Y \leq C_{\mu+\frac{1}{2}} \alpha^{\mu+\frac{1}{2}} \rho$$

für alle $0 \leq \mu \leq \mu_0 - \frac{1}{2}$.

Nehmen wir zusätzlich $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ und (1.6) an, so liefert die Parameterauswahlregel

$$\alpha = c\delta^{\frac{2}{2\mu+1}}$$

mit einem $c > 0$ die Abschätzung

$$\left\| \varphi^\dagger - \varphi_\alpha^\delta \right\|_X \leq c_\mu \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

mit einer von g^δ unabhängigen Konstanten c_μ für den totalen Fehler.

Für den Beweis verweisen wir auf [Hoh02, Theorem 5.2].

Ein analoges Ergebnis für die Wahl

$$f(\lambda) := \begin{cases} (-\ln(\lambda))^{-p} & \text{falls } 0 < \lambda \leq \exp(-1), \\ 0 & \text{falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

mit einem $p > 0$ wird in [Hoh02, Theorem 5.3] vorgestellt.

2 Tikhonov-Regularisierung

In diesem Abschnitt sollen einige bereits bekannte Resultate über die Tikhonov-Regularisierung vorgestellt werden. Wir behandeln dabei den linearen Fall sowie den nicht-linearen Fall in Hilberträumen und diskutieren zuletzt noch die Gut-Gestelltheit und Stabilität des Verfahrens im Banachraumfall.

2.1 Der lineare Fall auf Hilberträumen

Dieser Abschnitt orientiert sich zunächst an [Hoh02, Kapitel 2].

Die Idee der Tikhonov-Regularisierung (ursprünglich vorgestellt von Tikhonov selbst zur stabilen Lösung von Fredholm-Gleichungen, vergleiche etwa [TA79] oder [Tik63] für seine Variante mit Differentialoperatoren) ist folgende: Ist $T : X \rightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator zwischen Hilberträumen X und Y und will man

$$T\varphi = g$$

für $g \in \mathcal{R}(T)$ unter gegebenen Messdaten g^δ mit $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ lösen, so ist dieses Problem äquivalent zu

$$\|T\varphi - g^\delta\|_Y^2 = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in X. \quad (2.1)$$

Wir wollen nicht zwingend annehmen, dass T injektiv ist. Daher kann es sein, dass sowohl $T\varphi = g$ als auch (2.1) nicht eindeutig lösbar sind.

Natürlich hängt auch die Lösung von (2.1) nicht stetig von den Messdaten g^δ ab, falls das bei dem Problem $T\varphi = g$ der Fall ist (im Falle der Injektivität von T also, falls dieses Problem schlecht gestellt ist). Die Idee der Tikhonov-Regularisierung ist es nun, zu (2.1) einen Strafterm hinzu zu addieren, welcher die Stetigkeit der Lösung in Abhängigkeit von g^δ wiederherstellt. Man betrachtet also das Funktional

$$J_\alpha(\varphi) := \|T\varphi - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_X^2, \quad \varphi \in X,$$

wobei $\alpha > 0$ wiederum der Regularisierungsparameter und φ_0 eine Initialnäherung an die Lösung ist. Falls keine Initialnäherung bekannt ist, so wird $\varphi_0 = 0$ verwendet.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Regularisierung nur ein Spezialfall der obigen allgemeinen linearen Theorie ist. Das folgende Lemma und der anschließende Satz sind mitsamt Beweisen aus [Hoh02, Kapitel 2] entnommen.

2.1 Lemma:

Das Tikhonov-Funktional J_α ist für jedes $\alpha \geq 0$ Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung ist gegeben durch

$$J'_\alpha[\varphi]h = 2\Re\left(\left\langle T^*(T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \right\rangle_X\right), \quad \varphi, h \in X.$$

Beweis:

Man berechnet für $\varphi, h \in X$ mit obiger Bezeichnung, dass

$$\begin{aligned}
& J_\alpha(\varphi + h) - J_\alpha(\varphi) - J'_\alpha[\varphi]h \\
&= \langle T\varphi + Th - g^\delta, T\varphi + Th - g^\delta \rangle_Y + \alpha \langle \varphi + h - \varphi_0, \varphi + h - \varphi_0 \rangle_X - \langle T\varphi - g^\delta, T\varphi - g^\delta \rangle_Y \\
&\quad - \alpha \langle \varphi - \varphi_0, \varphi - \varphi_0 \rangle_X - 2\Re \left(\langle T^* (T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle_X \right) \\
&= \langle Th, T\varphi - g^\delta \rangle_Y + \langle T\varphi - g^\delta, Th \rangle_Y + \langle Th, Th \rangle_Y + \alpha \langle \varphi - \varphi_0, h \rangle_X + \alpha \langle h, \varphi - \varphi_0 \rangle_X \\
&\quad + \alpha \langle h, h \rangle_X - 2\Re \left(\langle T^* (T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle_X \right) \\
&= 2\Re \left(\langle T^* (T\varphi - g^\delta), h \rangle_X \right) + \|Th\|_Y^2 + 2\alpha \Re(\langle \varphi - \varphi_0, h \rangle_X) + \|h\|_X^2 \\
&\quad - 2\Re \left(\langle T^* (T\varphi - g^\delta) + \alpha(\varphi - \varphi_0), h \rangle_X \right) \\
&= \|Th\|_Y^2 + \|h\|_X^2 \\
&\leq \|h\|_X^2 \left(\|T\|_{X \rightarrow Y}^2 + 1 \right).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

2.2 Satz:

Das Tikhonov-Funktional J_α besitzt ein eindeutiges Minimum φ_α^δ in X für alle $\alpha > 0$, $g^\delta \in Y$ und $\varphi_0 \in X$. Dieses Minimum ist gegeben durch

$$\varphi_\alpha^\delta = (T^*T + \alpha \text{id}_X)^{-1} (T^*g^\delta + \alpha\varphi_0).$$

Der Operator $T^*T + \alpha \text{id}_X$ ist stetig invertierbar, d.h. φ_α^δ hängt stetig von g^δ ab.

Beweis:

Angenommen, $\varphi_\alpha^\delta \in X$ minimiert J_α . Da J_α nach obigem Lemma Fréchet-differenzierbar ist, folgt aus Lemma 1.45, dass $J'_\alpha[\varphi_\alpha^\delta]h = 0$ für alle $h \in X$. Insbesondere folgt daraus für die Wahl

$$h = T^* (T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta) + \alpha (\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0)$$

mit obiger Darstellung für $J'_\alpha[\varphi_\alpha^\delta]$, dass

$$(T^*T + \alpha \text{id}_X) \varphi_\alpha^\delta = T^*g^\delta + \alpha\varphi_0$$

ist. Aus dem Lax-Milgram-Lemma (siehe etwa [Alt99, Satz 4.2]) folgt wegen

$$\Re(\langle (T^*T + \alpha \text{id}_X) \varphi, \varphi \rangle_X) = \|T\varphi\|_Y^2 + \alpha \|\varphi\|_X^2 \geq \alpha \|\varphi\|_X^2$$

die stetige Invertierbarkeit des Operators $T^*T + \alpha \text{id}_X$. Also erfüllt jedes minimierende Element φ_α^δ von J_α die Gleichung

$$\varphi_\alpha^\delta = (T^*T + \alpha \text{id}_X)^{-1} (T^*g^\delta + \alpha\varphi_0)$$

und ist somit bereits eindeutig bestimmt, d.h. es kann höchstens ein minimierendes Element geben. Um zu zeigen, dass das so definierte Element $\varphi_\alpha^\delta \in X$ auch tatsächlich J_α minimiert,

berechnet man

$$\begin{aligned}\psi(t) &:= J_\alpha(\varphi_\alpha^\delta + th) \\ &= J_\alpha(\varphi_\alpha^\delta) + t \langle Th, T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta \rangle_Y + t \langle T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta, Th \rangle_Y + t^2 \langle Th, Th \rangle_Y \\ &\quad + \alpha t \langle \varphi_\alpha^\delta - \varphi_0, h \rangle_X + \alpha t \langle h, \varphi_\alpha^\delta - \varphi_0 \rangle_X + \alpha t^2 \langle h, h \rangle_X\end{aligned}$$

für $h \in X \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$. Offenbar ist ψ ein Polynom zweiten Grades mit $\psi \geq 0$, da $J_\alpha \geq 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= \langle Th, T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta \rangle_Y + \langle T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta, Th \rangle_Y + \alpha \langle \varphi_\alpha^\delta - \varphi_0, h \rangle_X + \alpha \langle h, \varphi_\alpha^\delta - \varphi_0 \rangle_X \\ &= 2\Re \left(\langle T^* (T\varphi_\alpha^\delta - g^\delta) + \alpha (\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0), h \rangle_X \right) \\ &= 2\Re \left(\langle (T^*T + \alpha \text{id}_X) \varphi_\alpha^\delta - (T^*g^\delta + \alpha\varphi_0), h \rangle_X \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

per Definition von φ_α^δ . Das zeigt $\psi(t) \geq \psi(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

2.3 Bemerkung:

Mit diesem Lemma erhalten wir:

Wählen wir in der allgemeinen linearen Theorie aus Kapitel 1.3.2

$$q_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}, \quad \lambda \in [0, \infty[,$$

so entsprechen die entstehenden Operatoren

$$R_\alpha = q_\alpha(T^*T)T^* = (T^*T + \alpha \text{id}_X)^{-1}T^*$$

im Falle $\varphi_0 = 0$ genau der Tikhonov-Regularisierung. Offenbar ist mit dieser Wahl

$$r_\alpha(\lambda) = 1 - \lambda \frac{1}{\lambda + \alpha} = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}.$$

Man überlegt sich schnell, dass diese Funktionen die angegebenen Bedingungen erfüllen. Damit ist dieses Verfahren unter Wahl einer geeigneten Parameterauswahlregel tatsächlich ein Regularisierungsverfahren, und die angegebenen Konvergenzraten gelten.

2.4 Bemerkung:

Man erhält eine allgemeinere Variante der Tikhonov-Regularisierung (die so genannte **verallgemeinerte Tikhonov-Phillips-Regularisierung**), wenn man den Strafterm $\|\varphi - \varphi_0\|_X$ durch

$$\|B(\varphi - \varphi_0)\|_Z$$

ersetzt. Dabei ist $B \in \mathcal{L}(X, Z)$ ein Operator in einen weiteren Hilbertraum Z , welcher auf seinem Bildbereich stetig invertierbar ist (das ist gleichbedeutend mit der Existenz eines $\beta > 0$ s.d. $\beta \|\varphi\|_X \leq \|B\varphi\|_Z$ für alle $\varphi \in X$). Eine Diskussion dieses Verfahrens findet sich in [Rie03, Kapitel 4].

2.2 Der nicht-lineare Fall auf Hilberträumen

Dieser Abschnitt orientiert sich an [EHN96, Kapitel 10].

Seien hier wieder X und Y Hilberträume, aber diesmal $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ ein stetiger,

nicht notwendigerweise linearer Operator. Es ist üblich, zusätzlich zur Stetigkeit von T anzunehmen, dass T schwach abgeschlossen ist. D.h. ist $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ eine gegen $\varphi \in X$ schwach konvergente Folge und konvergiert auch die Folge $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen $g \in Y$, so folgt

$$\varphi \in \mathcal{D}(T) \text{ und } T(\varphi) = g.$$

Diese Annahme ist hinreichend für die Lösbarkeit des Problems

$$\left\| T(\varphi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_X^2 = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in \mathcal{D}(T),$$

wie man bei [EHN96] nachlesen kann.

Im nicht-linearen Fall kann die verallgemeinerte Moore-Penrose Inverse nicht definiert werden. Man nimmt daher an, dass $g \in \mathcal{R}(T)$ gilt und verwendet das so genannte Konzept einer φ_0 -minimum-Norm-Lösung:

2.5 Definition:

Ein Element $\varphi^\dagger \in \mathcal{D}(T)$ heißt **φ_0 -minimum-Norm-Lösung** zu dem Problem $T(\varphi) = g$, falls

$$T(\varphi^\dagger) = g$$

und

$$\left\| \varphi^\dagger - \varphi_0 \right\|_X = \inf \{ \|\varphi - \varphi_0\|_X \mid \varphi \in \mathcal{D}(T), T(\varphi) = g \}.$$

φ_0 wird dabei auch als **Startnäherung** bezeichnet.

Im Gegensatz zum linearen Fall spielt $\varphi_0 = 0$ für nicht-lineare Probleme keine besondere Rolle. Beachte, dass φ^\dagger nicht zwingend eindeutig bestimmt ist.

Man nimmt nun an, dass eine φ_0 -minimum-Norm-Lösung φ^\dagger zu dem Problem $T(\varphi) = g$ existiert und ersetzt wie im linearen Fall das Problem $T(\varphi) = g$ durch das Minimierungsproblem

$$\left\| T(\varphi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_X^2 = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in \mathcal{D}(T). \quad (2.2)$$

Dabei ist wieder $\alpha > 0$ und $g^\delta \in Y$ ist eine Approximation der Daten g in dem Sinne, dass $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$. Wie im linearen Fall bezeichnet man Lösungen von (2.2) mit φ_α^δ . Man kann leicht zeigen, dass diese Lösungen unter den gemachten Voraussetzungen stetig von den Daten g^δ abhängen (vergleiche etwa [EHN96, Theorem 10.2]).

Darüber hinaus kann man zeigen, dass die Lösungen zu (2.2) gegen eine φ_0 -minimum-Norm-Lösung zu dem Problem $T(\varphi) = g$ konvergieren:

2.6 Satz:

Sei $g^\delta \in Y$ so, dass $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ und sei γ eine a-priori Parameterauswahlregel derart, dass

$$\gamma(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ und } \frac{\delta^2}{\gamma(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Dann besitzt jede Folge $(\varphi_{\alpha_k}^{\delta_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\alpha_k := \gamma(\delta_k)$ und einer Lösung $\varphi_{\alpha_k}^{\delta_k}$ zu (2.2) entsprechend eine konvergente Teilfolge. Jeder Grenzwert einer konvergenten Teilfolge einer solchen Folge ist eine φ_0 -minimum-Norm-Lösung zu dem Problem $T(\varphi) = g$. Ist diese φ_0 -minimum-Norm-Lösung darüberhinaus eindeutig bestimmt als φ^\dagger , so gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_{\gamma(\delta)}^\delta = \varphi^\dagger.$$

Für den Beweis verweisen wir auf [EHN96, Theorem 10.3].

Zuletzt wollen wir noch Konvergenzraten für diese Regularisierung vorstellen. Da dieser Satz später in dieser Arbeit nochmals in einem anderen Zusammenhang benötigt wird, beweisen wir ihn auch. Der Beweis ist genau der Beweis von [EHN96, Theorem 10.4].

2.7 Satz:

Sei $\mathcal{D}(T)$ konvex, $g^\delta \in Y$ mit $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ und sei φ^\dagger eine φ_0 -minimum-Norm-Lösung zu dem Problem $T(\varphi) = g$. Mögen darüber hinaus die folgenden Bedingungen gelten:

- (1) T ist Fréchet-differenzierbar,
 (2) es gibt ein $\gamma > 0$ und ein $\rho > 2 \|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X$ s.d.

$$\|T'[\varphi^\dagger] - T'[\varphi]\|_{X \rightarrow Y} \leq \gamma \|\varphi^\dagger - \varphi\|_X$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(T) \cap \mathfrak{B}_\rho(\varphi^\dagger)$,

- (3) es gebe ein $\omega \in Y$ mit

$$\varphi^\dagger - \varphi_0 = T'[\varphi^\dagger]^* \omega$$

und

- (4) es gelte $\gamma \|\omega\|_Y < 1$.

Dann erhalten wir für die Parameterauswahl $\alpha = c \cdot \delta$ mit einem $c > 0$ die Konvergenzraten

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \quad \text{und} \quad \|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y = \mathcal{O}(\delta) \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Beweis:

Per Definition löst φ_α^δ das Problem (2.2). Daraus folgt mit den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0\|_X^2 &\leq \|T(\varphi^\dagger) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X^2 \\ &= \|g - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X^2 \\ &\leq \delta^2 + \alpha \|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X^2. \end{aligned}$$

Das zeigt mit Voraussetzung (3) wiederum

$$\begin{aligned} &\|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2 \\ &\leq \delta^2 + \alpha \left(\|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X^2 + \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2 - \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi_0\|_X^2 \right) \\ &= \delta^2 + \alpha \left(2 \langle \varphi^\dagger, \varphi^\dagger \rangle_X - 2 \Re \left(\langle \varphi^\dagger, \varphi_0 \rangle_X \right) - 2 \Re \left(\langle \varphi_\alpha^\delta, \varphi^\dagger \rangle_X \right) + 2 \Re \left(\langle \varphi_\alpha^\delta, \varphi_0 \rangle_X \right) \right) \\ &= \delta^2 + 2\alpha \Re \left(\langle \varphi^\dagger - \varphi_0, \varphi^\dagger - \varphi_\alpha^\delta \rangle_X \right) \tag{2.3} \end{aligned}$$

$$= \delta^2 + 2\alpha \Re \left(\langle \omega, T'[\varphi^\dagger] (\varphi^\dagger - \varphi_\alpha^\delta) \rangle_Y \right). \tag{2.4}$$

Ist nun $\alpha = c \cdot \delta$, so folgt aus (2.3) mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Lemma 1.13), dass $\varphi_\alpha^\delta \in \mathfrak{B}_\rho(\varphi^\dagger)$ für das fixierte $\rho > 2 \|\varphi^\dagger - \varphi_0\|_X$ aus der Voraussetzung (2), wenn δ hinreichend klein ist, was wir im Folgenden annehmen wollen. Wegen der Konvexität von $\mathcal{D}(T)$ folgt aus

Lemma 1.49 mit Voraussetzung (2) also, dass

$$T(\varphi_\alpha^\delta) = \underbrace{T(\varphi^\dagger)}_{=g} + T'[\varphi^\dagger](\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger) + r_\alpha^\delta \quad (2.5)$$

mit

$$\|r_\alpha^\delta\|_Y \leq \frac{\gamma}{2} \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2. \quad (2.6)$$

Setzen wir nun (2.4), (2.5) und (2.6) zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2 \\ & \leq \delta^2 + 2\alpha \Re \left(\langle \omega, T'[\varphi^\dagger](\varphi^\dagger - \varphi_\alpha^\delta) \rangle_Y \right) \\ & = \delta^2 + 2\alpha \Re \left(\langle \omega, (g - g^\delta) + (g^\delta - T(\varphi_\alpha^\delta)) + r_\alpha^\delta \rangle_Y \right) \\ & \leq \delta^2 + 2\alpha \delta \|\omega\|_Y + 2\alpha \|\omega\|_Y \|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y + \alpha \gamma \|\omega\|_Y \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $\Re(\cdot) \leq |\cdot|$ benutzt haben. Umstellen dieser Gleichung liefert

$$\left(\|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y - \alpha \|\omega\|_Y \right)^2 + \alpha(1 - \gamma \|\omega\|_Y) \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X^2 \leq (\delta + \alpha \|\omega\|_Y)^2.$$

Mit Voraussetzung (4) zeigt das

$$\|T(\varphi_\alpha^\delta) - g^\delta\|_Y \leq \delta + 2\alpha \|\omega\|_Y$$

und

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_X \leq \frac{\delta + \alpha \|\omega\|_Y}{\sqrt{\alpha(1 - \gamma \|\omega\|_Y)}}.$$

Einsetzen von $\alpha = c \cdot \delta$ zeigt nun die behaupteten Konvergenzraten. □

2.8 Bemerkung:

Beachte, dass die zu Beginn dieses Abschnitts geforderte schwache Abgeschlossenheit des Operators T für die Konvergenzraten nicht notwendig ist! Diese Tatsache werden wir später in Satz 4.20 noch ausnutzen.

Beachte auch, dass die Wahl einer guten Startnäherung φ_0 die Bedingung (2) deutlich abschwächt!

Für weitere Analysen und Ausführungen der nichtlinearen Tikhonov-Regularisierung in Hilberträumen sei der Leser auf [EHN96, Kapitel 10] verwiesen. Eine weitere mögliche Referenz für eine ausführliche Analysis der nicht-linearen Tikhonov-Regularisierung ist [LPR07].

2.3 Verallgemeinerungen für Banachräume

Wir haben bisher nur den Fall untersucht, dass sowohl X als auch Y Hilberträume sind. Hier wollen wir nun zumindest X als Banachraum zulassen. Sei also $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ ein stetiger Operator von einem Banachraum X in einen Hilbertraum Y . Ähnlich wie oben ersetzen wir die Gleichung

$$T\psi = g$$

mit $g \in \mathcal{R}(T)$ durch das Minimierungsproblem

$$\left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s = \mathbf{min!} \text{ über } \psi \in \mathcal{D}(T) \quad (2.7)$$

mit Näherungsdaten $g^\delta \in Y$, einem Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ und geeignetem $s \geq 1$, wobei wir allerdings zur Vereinfachung der Rechnungen nur die Startnäherung $\psi_0 = 0$ betrachten. Man kann eine deutlich allgemeinere Variante der Tikhonov-Regularisierung erhalten, indem man den Term $\|\psi\|_X^s$ durch $f(\psi)$ für ein konvexes Funktional $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mit $f \not\equiv \infty$ ersetzt. Allerdings benötigen wir für den Abschnitt 4 dieser Arbeit nur die Variante (2.7). Wir wollen uns hier auch nur um die Gut-Gestelltheit des Problems (2.7) kümmern. Für die Konvergenzanalyse der allgemeineren Version sei der Leser etwa auf [Res05] oder [BO04] verwiesen. Im Spezialfall $X = \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ und $s = p$ ist es ein Ziel dieser Arbeit, einen speziellen Lösungsansatz (mit potentiell besseren und vor allem aussagekräftigeren Konvergenzraten) vorzustellen.

Die Gut-Gestelltheit des Problems (2.7) wird in vielen neueren Veröffentlichungen über Inverse Probleme übergangen, da bereits relativ ausführliche Untersuchungen dieser Problematik vorliegen (vergleiche etwa [SV89] oder [AV94]). Neuere Veröffentlichungen wie [Res05] oder [BO04] verweisen dann lediglich auf die älteren Veröffentlichungen mit dem Hinweis, dass sich die (in [Res05] oder [BO04]) deutlich allgemeiner getroffenen Aussagen sofort wie in [AV94] o.Ä. beweisen lassen. Allerdings erfordern sowohl die Formulierungen der Aussagen als auch ihre Beweise einige Kenntnisse in elementarer Topologie. Wir werden daher hier nun zwei generelle Kriterien für die Lösbarkeit des Minimierungsproblems (2.7) vorstellen, die Eindeutigkeit dieser Lösung diskutieren und danach zwei verschiedene Formulierungen für die stetige Abhängigkeit der Lösung zu (2.7) von den Daten g^δ mit hinreichenden Voraussetzungen präsentieren. Zum Schluss zeigen wir ein Resultat über die Konvergenz des Verfahrens.

2.3.1 Lösbarkeit

In diesem Abschnitt werden hinreichende Voraussetzungen für die Lösbarkeit des Problems (2.7) vorgestellt.

2.9 Lemma:

Es gebe eine Topologie τ auf X , unter welcher die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

- (1) $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,
- (2) $\psi \mapsto \|\psi\|_X$, $\psi \in X$ ist unterhalbstetig,
- (3) die Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ sind kompakt für alle $M > 0$ und
- (4) $T : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ ist stetig.

Dann nimmt das Tikhonov-Funktional

$$J_\alpha(\psi) := \left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s, \quad \psi \in \mathcal{D}(T)$$

für beliebiges $g^\delta \in X$ und $\alpha > 0$ sein Infimum an. Insbesondere ist also das Problem (2.7) stets lösbar.

Beweis:

Unter den gemachten Voraussetzungen ist das Funktional J_α unterhalbstetig, da

$$\psi \mapsto \left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2$$

sogar stetig ist. Nach Lemma A.45 nimmt J_α also auf jeder kompakten Menge sein Infimum an.

Sei nun $I := \inf_{\psi \in \mathcal{D}(T)} J_\alpha(\psi) \geq 0$ und $\psi_0 \in \mathcal{D}(T)$ beliebig mit $J(\psi_0) = a$. Ist $a = I$, so ist nichts weiter zu zeigen. Ist dagegen $a > I$, so beobachtet man zunächst, dass

$$\|\psi\|_X^s > \frac{a}{\alpha}, \quad \psi \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow J_\alpha(\psi) > a$$

gilt. Entsprechend muss das Infimum von J nur in

$$B := \left\{ \psi \in \mathcal{D}(T) \mid \|\psi\|_X^s \leq \frac{a}{\alpha} \right\} = \left\{ \psi \in X \mid \|\psi\|_X^s \leq \frac{a}{\alpha} \right\} \cap \mathcal{D}(T)$$

gesucht werden, d.h. es ist

$$I = \inf_{\psi \in B} J_\alpha(\psi).$$

B ist als Schnitt einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge nach Voraussetzung kompakt, d.h. nach Lemma A.45 gibt es ein $\psi_1 \in B$ mit $J_\alpha(\psi_1) = I$. \square

Folgendes Lemma zeigt die gleiche Aussage unter der Voraussetzung einer anderen Art von Kompaktheit:

2.10 Lemma:

Es gebe eine Topologie τ auf X , unter welcher die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

- (1) $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,
- (2) $\psi \mapsto \|\psi\|_X$, $\psi \in X$ ist unterhalbstetig,
- (3) die Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ sind relativ folgenkompakt für alle $M > 0$ und
- (4) $T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ ist stetig.

Dann nimmt das Tikhonov-Funktional

$$J_\alpha(\psi) := \left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s, \quad \psi \in \mathcal{D}(T)$$

für beliebiges $g^\delta \in X$ und $\alpha > 0$ sein Infimum an. Insbesondere ist also das Problem (2.7) stets lösbar.

Beweis:

Sei $I := \inf_{\psi \in \mathcal{D}(T)} J_\alpha(\psi) \geq 0$ und $(\psi_n) \in \mathcal{D}(T)$ eine minimierende Folge mit

$$J_\alpha(\psi_n) \leq I + \frac{1}{n}.$$

Insbesondere folgt daraus

$$\|\psi_n\|_X^s \leq \frac{1}{\alpha} \left(I + \frac{1}{n} \right),$$

d.h. die Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach Voraussetzung (3) gibt es also eine Teilfolge $(\psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\psi_{n_k} \xrightarrow[\tau]{k \rightarrow \infty} \psi \in \mathcal{D}(T)$$

nach Voraussetzung (1). Voraussetzung (2) wiederum hat

$$\alpha \|\psi\|_X^s \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha \|\psi_{n_k}\|_X^s$$

zur Folge, woraus mit Voraussetzung (4) auch

$$\begin{aligned}
J_\alpha(\psi) &= \left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| T(\psi_{n_k}) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| T(\psi_{n_k}) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{n_k}\|_X^s \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} J_\alpha(\psi_{n_k}) \\
&= I
\end{aligned}$$

folgt. Also nimmt J_α sein Infimum in $\psi \in \mathcal{D}(T)$ an. \square

2.3.2 Eindeutigkeit

Beachte, dass die Lösung von (2.7) im Allgemeinen nicht eindeutig ist, insbesondere dann, wenn T nicht-linear ist. Die Tatsache, dass $\|\cdot\|_X$ zwar konvex, aber nicht zwingend strikt konvex ist (wie wir gleich sehen werden), hat einen nicht unwesentlichen Anteil an dieser Problematik.

2.11 Lemma:

Die Abbildung

$$\varphi \mapsto \|\varphi\|_Y^2, \quad \varphi \in Y$$

ist strikt konvex.

Beweis:

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in Y$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$ und $\lambda \in (0, 1)$. Dann ist

$$f(\lambda) := \|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\|_Y^2 = \lambda^2 \|\varphi_1\|_Y^2 + (1-\lambda)^2 \|\varphi_2\|_Y^2 + 2\lambda(1-\lambda) \Re(\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_Y)$$

ein Polynom zweiten Grades und man berechnet leicht

$$f''(\lambda) = 2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_Y^2.$$

Wegen $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ist also $f''(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in (0, 1)$. Bekanntlich folgt daraus die strikte Konvexität von f . Insbesondere gilt also für $\lambda \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\|_Y^2 &= f(\lambda) \\
&= f(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0) \\
&< \lambda f(1) + (1-\lambda) f(0) \\
&= \lambda \|\varphi_1\|_Y^2 + (1-\lambda) \|\varphi_2\|_Y^2.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. \square

2.12 Lemma:

Für jeden Banachraum X ist

$$\psi \mapsto \|\psi\|_X^s$$

konvex. Für $X = \mathbf{L}^1(\Omega)$ und $s = 1$ ist diese Abbildung aber nicht strikt konvex.

Beweis:

Die Konvexität der Abbildung folgt bereits aus der Dreiecksungleichung für die Norm und der Tatsache, dass $t \mapsto t^s$ für $s \geq 1$ konvex ist. Es genügt also zu zeigen, dass es $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ gibt mit $\psi_1 \neq \psi_2$, $\|\psi_1\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \|\psi_2\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = 1$ und $\left\| \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = 1$. Dazu wähle man

Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ mit den gewünschten Eigenschaften und $\psi_1 \geq 0, \psi_2 \geq 0$ fast überall. Dann gilt fast überall

$$|\psi_1| = \psi_1, |\psi_2| = \psi_2 \text{ und } |\psi_1 + \psi_2| = \psi_1 + \psi_2.$$

Das hat

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi_1 + \psi_2| \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi_1 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi_2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \|\psi_1\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\psi_2\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

zur Folge. □

2.13 Satz:

Sei T linear und injektiv. Dann besitzt (2.7) höchstens eine Lösung.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass das Funktional

$$J_{\alpha}(f) := \left\| T(f) - g^{\delta} \right\|_Y^2 + \alpha \|f\|_X^s$$

strikt konvex ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $f \mapsto \left\| T(f) - g^{\delta} \right\|_Y^2$ strikt konvex ist, denn die s -te Potenz der X -Norm ist nach obigem Lemma konvex. Das ist aber wegen

$$\left\| T(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) - g^{\delta} \right\|_Y^2 = \left\| \lambda(T\psi_1 - g^{\delta}) + (1-\lambda)(T\psi_2 - g^{\delta}) \right\|_Y^2,$$

der Injektivität von T (also $\psi_1 \neq \psi_2 \Rightarrow T\psi_1 \neq T\psi_2$) und der oben gezeigten strikten Konvexität des Quadrats der Y -Norm klar.

Wir nehmen nun an, das Funktional J_{α} habe zwei minimierende Elemente $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(T) \subset X$. Dann gilt wegen der strikten Konvexität

$$J_{\alpha} \left(\frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) \right) < \frac{1}{2} J_{\alpha}(\psi_1) + \frac{1}{2} J_{\alpha}(\psi_2) = J_{\alpha}(\psi_1) = J_{\alpha}(\psi_2).$$

Das stellt einen Widerspruch dazu dar, dass ψ_1, ψ_2 minimierende Elemente von J_{α} sind und zeigt somit die Behauptung. □

2.3.3 Stetige Abhängigkeit

Jetzt wollen wir wie versprochen die stetige Abhängigkeit der Lösung(en) zu (2.7) von den Daten g^{δ} diskutieren. Verwenden wir die Voraussetzungen von Lemma 2.9 über eine gröbere Topologie τ auf X , so ist anzunehmen, dass die stetige Abhängigkeit zunächst auch nur in dieser Topologie erreicht wird. In (Hilbertraum-)Fällen, in denen die schwache Topologie verwendet werden kann, lässt sich sogar stetige Abhängigkeit bezüglich der Norm-Topologie zeigen (vergleiche etwa [EHN96, Theorem 10.2]). Zunächst stellen wir eine Variante mit Folgen vor:

2.14 Lemma:

Es gebe eine Topologie τ auf X , welche gröber als die Normtopologie sei und bezüglich welcher die folgenden Eigenschaften erfüllt sein mögen:

- (1) $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,
 (2) $\psi \mapsto \|\psi\|_X$, $\psi \in X$ ist unterhalbstetig,
 (3) die Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ sind relativ folgenkompakt für alle $M > 0$ und
 (4) $T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ ist stetig.

Sei nun $\alpha > 0$ und $g^\delta \in Y$ gegeben und seien $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ Folgen s.d. $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^\delta$ und s.d. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ψ_n eine Lösung von

$$\|T(\psi) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s = \mathbf{min!} \text{ über } \psi \in \mathcal{D}(T)$$

ist. Dann gibt es eine τ -konvergente Teilfolge von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und jeder Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Lösung von (2.7).

Beweis:

Per Definition von ψ_n gilt

$$\|T(\psi_n) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi_n\|_X^s \leq \|T(\psi) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \quad (2.8)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\psi \in \mathcal{D}(T)$. Da die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung konvergiert, folgt daraus die Beschränktheit der reellen Folge

$$(\|\psi_n\|_X)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Wegen Voraussetzung (3) existiert eine Teilfolge $(\psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\psi_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\tau} \bar{\psi} \in \mathcal{D}(T)$$

gemäß Voraussetzung (1). Voraussetzung (2) impliziert

$$\|\bar{\psi}\|_X^s \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{n_k}\|_X^s$$

und wegen der Stetigkeit der Y -Norm sowie Voraussetzung (4) auch

$$\|T(\bar{\psi}) - g^\delta\|_Y = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T(\psi_{n_k}) - g_{n_k}\|_Y \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T(\psi_{n_k}) - g_{n_k}\|_Y.$$

Damit folgt¹ unter Verwendung von (2.8)

$$\begin{aligned} \|T(\bar{\psi}) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\bar{\psi}\|_X^s &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\|T(\psi_{n_k}) - g_{n_k}\|_Y^2 + \alpha \|\psi_{n_k}\|_X^s \right) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\|T(\psi_{n_k}) - g_{n_k}\|_Y^2 + \alpha \|\psi_{n_k}\|_X^s \right) \end{aligned}$$

¹Beachte, das offenbar $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ für alle Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt. Das sieht man aus den bekannten Ungleichungen

$$\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A + B)$$

für $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ und

$$A \subseteq B \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B).$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|T(\psi) - g_{n_k}\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \right) \\ &= \left\| T(\psi) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}(T)$. Daher ist $\bar{\psi}$ eine Lösung von (2.7). Dieses Argument funktioniert für jede konvergente Teilfolge von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da τ gröber als die Normtopologie ist. \square

2.15 Bemerkung:

Beachte, dass der Beweis die Gleichung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|T(\psi_{n_k}) - g_{n_k}\|_Y^2 + \alpha \|\psi_{n_k}\|_X^s \right) = \left\| T(\bar{\psi}) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\bar{\psi}\|_X^s$$

liefert und damit sogar

$$\|\psi_{n_k}\|_X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|\bar{\psi}\|_X$$

zeigt. Ohne weitere Voraussetzungen an X und die Topologie τ folgt daraus jedoch noch nicht die starke Konvergenz der Folge $(\psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

2.16 Lemma:

Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Lemma 2.14 die Lösung $\bar{\psi}$ von (2.7) eindeutig, so gilt

$$\psi_n \xrightarrow[\tau]{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}.$$

Beweis:

Angenommen, die Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht bezüglich τ gegen $\bar{\psi}$. Dann gibt es eine τ -offene Umgebung U von $\bar{\psi}$ derart, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ mit $\psi_m \notin U$ gibt. Das liefert eine monoton wachsende Folge ein $n_k \in \mathbb{N}$ s.d. ψ_{n_k} für kein k in U enthalten ist. Insbesondere ist $\bar{\psi}$ dann kein Häufungspunkt der Folge $(\psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Allerdings erfüllt diese Folge wieder die Voraussetzungen von Lemma 2.14, wonach sie eine gegen $\bar{\psi}$ τ -konvergente Teilfolge besitzt - ein Widerspruch. \square

Beachte, dass die letzten beiden Lemmata die relative Folgenkompaktheit der Mengen

$$\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$$

voraussetzen, welche in durchaus kanonischen Topologien nicht vorliegt! Vergleiche dazu etwa Beispiel A.30.

Die folgende Variante ist mit Hilfe des Netz-Begriffs aus der Topologie formuliert (vergleiche Abschnitt A.2). Die Aussage ist potentiell etwas schwächer, aber dafür wird auch nur die Kompaktheit der Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ und nicht mehr die Folgenkompaktheit als Voraussetzung benötigt.

2.17 Lemma:

Es gebe eine Topologie τ auf X , welche gröber als die Normtopologie sei und bezüglich welcher die folgenden Eigenschaften erfüllt sein mögen:

- (1) $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,
- (2) $\psi \mapsto \|\psi\|_X$, $\psi \in X$ ist unterhalbstetig,
- (3) die Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ sind kompakt für alle $M > 0$ und
- (4) $T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ ist stetig.

Sei nun $\alpha > 0$ und $g^\delta \in Y$ gegeben und seien $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ Folgen s.d. $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^\delta$ und s.d. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ψ_n eine Lösung von

$$\|T(\psi) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s = \mathbf{min!} \text{ über } \psi \in \mathcal{D}(T)$$

ist. Dann gibt es ein τ -konvergentes Teilnetz von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jeder Grenzwert eines konvergenten Teilnetzes von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Lösung von (2.7).

Beweis:

Wie gehen wie oben vor: Per Definition von ψ_n gilt

$$\|T(\psi_n) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi_n\|_X^s \leq \|T(\psi) - g_n\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \quad (2.9)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\psi \in \mathcal{D}(T)$. Da die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung konvergiert, folgt daraus die Beschränktheit der reellen Folge

$$(\|\psi_n\|_X)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Da Folgen spezielle Netze sind, existiert also wegen Voraussetzung (3) ein Teilnetz $(\psi_{\eta(i)})_{i \in I}$ mit einer gerichteten Menge (I, \leq) , $\eta : I \rightarrow \mathbb{N}$ und

$$\psi_{\eta(i)} \xrightarrow{\tau} \bar{\psi} \in \mathcal{D}(T)$$

gemäß Voraussetzung (1). Voraussetzung (2) impliziert

$$\|\bar{\psi}\|_X^s \leq \liminf_{i \in I} \|\psi_{\eta(i)}\|_X^s$$

und wegen der Stetigkeit der Y -Norm sowie Voraussetzung (4) auch

$$\|T(\bar{\psi}) - g^\delta\|_Y = \lim_{i \in I} \|T(\psi_{\eta(i)}) - g_{\eta(i)}\|_Y \leq \liminf_{i \in I} \|T(\psi_{\eta(i)}) - g_{\eta(i)}\|_Y.$$

Damit folgt unter Verwendung von (2.9)

$$\begin{aligned} \|T(\bar{\psi}) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\bar{\psi}\|_X^s &\leq \liminf_{i \in I} \left(\|T(\psi_{\eta(i)}) - g_{\eta(i)}\|_Y^2 + \alpha \|\psi_{\eta(i)}\|_X^s \right) \\ &\leq \limsup_{i \in I} \left(\|T(\psi_{\eta(i)}) - g_{\eta(i)}\|_Y^2 + \alpha \|\psi_{\eta(i)}\|_X^s \right) \\ &\leq \lim_{i \in I} \left(\|T(\psi) - g_{\eta(i)}\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \right) \\ &= \|T(\psi) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|\psi\|_X^s \end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}(T)$. Daher ist $\bar{\psi}$ eine Lösung von (2.7). Dieses Argument funktioniert für jedes konvergente Teilnetz von $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da τ gröber als die Normtopologie ist. \square

2.3.4 Konvergenz

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass es eine (0-)minimum-Norm-Lösung (vergleiche Definition 2.5) ψ^\dagger zu dem Problem $T(\psi) = g$ gibt. Wir wollen nun zeigen, dass das Verfahren unter bestimmten Voraussetzungen in einem geeigneten Sinne gegen diese Lösung konvergiert. Wir präsentieren hier nur eine Variante mit Folgen, dieses Lemma kann aber alternativ auch mit Netzen formuliert werden.

2.18 Lemma:

Es gebe eine Topologie τ auf X , welche gröber als die Normtopologie sei und bezüglich welcher

die folgenden Eigenschaften erfüllt sein mögen:

- (1) $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen,
- (2) $\psi \mapsto \|\psi\|_X$, $\psi \in X$ ist unterhalbstetig,
- (3) die Mengen $\{\psi \in X \mid \|\psi\|_X \leq M\}$ sind relativ folgenkompakt für alle $M > 0$ und
- (4) $T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ ist stetig.

Sei nun γ eine Parameterauswahlregel derart, dass

$$\gamma(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ und } \frac{\delta^2}{\gamma(\delta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

gilt. Sei δ_k eine Nullfolge, $g^{\delta_k} \in Y$ mit $\|g - g^{\delta_k}\|_Y \leq \delta_k$, $\alpha_k := \gamma(\delta_k)$ und sei $\psi_{\alpha_k}^{\delta_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Lösung zu

$$\left\| T\psi - g^{\delta_k} \right\|_Y^2 + \alpha_k \|\psi\|_X^s = \mathbf{min!} \text{ über } \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Dann gibt es eine τ -konvergente Teilfolge von $(\psi_{\alpha_k}^{\delta_k})_{k \in \mathbb{N}}$, und der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge von $(\psi_{\alpha_k}^{\delta_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Minimum-Norm-Lösung von $T(\psi) = g$.

Ist die Minimum-Norm-Lösung ψ^\dagger von $T(\psi) = g$ eindeutig bestimmt, so gilt

$$\psi_{\gamma(\delta)}^\delta \xrightarrow[\tau]{\delta \rightarrow 0} x^\dagger.$$

Beweis:

Sei $x_k := x_{\alpha_k}^{\delta_k}$ und $g_k := g^{\delta_k}$. Dann gilt per Definition von x_k , dass

$$\begin{aligned} \|T(x_k) - g_k\|_Y^2 + \alpha_k \|x_k\|_X^s &\leq \left\| T(x^\dagger) - g_k \right\|_Y^2 + \alpha_k \|x^\dagger\|_X^s \\ &= \|g - g_k\|_Y^2 + \alpha_k \|x^\dagger\|_X^s \\ &\leq \delta_k^2 + \alpha_k \|x^\dagger\|_X^s. \end{aligned}$$

Daraus folgt zum einen, dass

$$\|T(x_k) - g_k\|_Y^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.10)$$

und zum anderen auch

$$\|x_k\|_X^s \leq \frac{\delta_k^2}{\alpha_k} + \|x^\dagger\|_X^s. \quad (2.11)$$

Der erste Term in (2.11) geht nach Voraussetzung gegen 0 für $k \rightarrow \infty$, daher ist die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X^s \leq \|x^\dagger\|_X^s$$

beschränkt. Nach Voraussetzung (3) existiert also eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{k_j} \xrightarrow[\tau]{j \rightarrow \infty} x \in \mathcal{D}(T)$$

nach Voraussetzung (1). Damit folgt aus (2.10), dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T(x_{k_j}) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = y,$$

und somit aus Voraussetzung (4) auch $T(x) = y$.

Voraussetzung (2) hat nun

$$\|x\|_X^s \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\|_X^s \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j}\|_X^s \stackrel{(2.11)}{\leq} \|x^\dagger\|_X^s$$

zur Folge, und das ist per Definition $\leq \|x\|_X^s$. Es folgt $\|x\|_X = \|x^\dagger\|_X$ und somit ist x eine 0-minimum-Norm-Lösung zu $T(x) = g$. Dieses Argument funktioniert wieder für jede konvergente Teilfolge.

Ist x^\dagger eindeutig bestimmt, so folgt

$$x_{\gamma(\delta)}^\delta \xrightarrow[\tau]{\delta \rightarrow 0} x^\dagger$$

wie im Beweis von Lemma 2.16. □

2.19 Bemerkung:

Wir haben hier stets gefordert, dass T als Operator

$$T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$$

stetig ist. Offenbar genügt es für die Gut-Gestelltheit sogar anzunehmen, dass T als Operator

$$T : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_\omega)$$

stetig ist, wobei τ_ω eine beliebige schwächere Topologie auf Y derart ist, dass die Norm $\|\cdot\|_Y$ bezüglich τ_ω unterhalbstetig bleibt.

3 Transformation von $\mathbf{L}^2(\mu)$ in $\mathbf{L}^p(\mu)$ für $p \in [1, 2)$

Sei stets $p \in [1, 2)$ fest.

3.1 Definition der Transformation

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst (nicht-lineare) bijektive Abbildungen zwischen $\mathbf{L}^p(\mu)$ und $\mathbf{L}^2(\mu)$ definieren. Sei dazu wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Wir definieren nun die Abbildung

$$\mathfrak{G}_p : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)$$

durch

$$\mathfrak{G}_p(\varphi) := \varphi \cdot |\varphi|^{\frac{2}{p}-1}, \quad \varphi \in \mathbf{L}^2(\mu).$$

Genauso definieren wir

$$\mathfrak{H}_p : \mathbf{L}^p(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

durch

$$\mathfrak{H}_p(\psi) := \frac{\psi}{|\psi|^{1-\frac{p}{2}}} = \psi \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1} \text{ fast überall,} \quad \psi \in \mathbf{L}^p(\mu).$$

Dabei nutzen wir die Konvention $\frac{0}{0^s} = 0$ für jedes $0 < s < 1$. Damit ist \mathfrak{H}_p wohldefiniert.

3.1 Lemma:

\mathfrak{G}_p und \mathfrak{H}_p sind bijektive Abbildungen mit $\mathfrak{G}_p^{-1} = \mathfrak{H}_p$ und umgekehrt.

Beweis:

Für $\psi \in \mathbf{L}^p(\mu)$ und $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ gilt fast überall

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_p \circ \mathfrak{H}_p(\psi) &= \mathfrak{G}_p\left(\psi \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1}\right) \\ &= \psi \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1} \cdot \left|\psi \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1}\right|^{\frac{2}{p}-1} \\ &= \psi \cdot \left(|\psi|^{\frac{p}{2}-1} \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1} \cdot |\psi|^{(\frac{2}{p}-1) \cdot (\frac{p}{2}-1)}\right) \\ &= \psi \cdot \left(|\psi|^{\frac{2}{p}+\frac{p}{2}-2} \cdot |\psi|^{1-\frac{p}{2}-\frac{2}{p}+1}\right) \\ &= \psi \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_p \circ \mathfrak{G}_p(\varphi) &= \mathfrak{H}_p\left(\varphi \cdot |\varphi|^{\frac{2}{p}-1}\right) \\ &= \varphi \cdot |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot \left|\varphi \cdot |\varphi|^{\frac{2}{p}-1}\right|^{\frac{p}{2}-1} \\ &= \varphi \cdot \left(|\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot |\varphi|^{\frac{p}{2}-1} \cdot |\varphi|^{(\frac{2}{p}-1) \cdot (\frac{p}{2}-1)}\right) \\ &= \varphi \cdot \left(|\varphi|^{\frac{2}{p}+\frac{p}{2}-2} \cdot |\varphi|^{1-\frac{p}{2}-\frac{2}{p}+1}\right) \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

3.2 Einige Eigenschaften

3.2 Lemma:

Seien $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ und $\psi \in \mathbf{L}^p(\mu)$. Dann gelten die Relationen

$$\|\mathfrak{G}_p(\varphi)\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2, \quad (3.1)$$

$$\|\mathfrak{H}_p(\psi)\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2 = \|\psi\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p. \quad (3.2)$$

Beweis:

Einfaches Nachrechnen zeigt

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_p(\varphi)\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p &= \left\| \varphi \cdot |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p \\ &= \int_{\Omega} |\varphi|^p \cdot |\varphi|^{2-p} \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} |\varphi|^2 \, d\mu \\ &= \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{H}_p(\psi)\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2 &= \left\| \psi \cdot |\psi|^{\frac{p}{2}-1} \right\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^2 \\ &= \int_{\Omega} |\psi|^2 \cdot |\psi|^{p-2} \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} |\psi|^p \, d\mu \\ &= \|\psi\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p. \quad \square \end{aligned}$$

Nun benötigen wir zunächst folgendes technisches Lemma:

3.3 Lemma:

Sei $0 \leq s \leq 1$ gegeben und $f(t) := t^s$ für $t \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$f(a) - f(b) \leq f(a - b)$$

für alle $a > b > 0$.

Beweis:

Für $s = 0$ oder $s = 1$ ist die Behauptung offensichtlich.

Sei also $s \in (0, 1)$. Offenbar genügt es dann zu zeigen, dass

$$f(c + d) \leq f(c) + f(d)$$

für alle $c, d > 0$ gilt, da die Behauptung dann mit $c = a - b$ und $d = b$ folgt. Nun gilt aber wegen

$s > 0$, dass

$$\begin{aligned} f(c+d) &= (c+d)^s \\ &= \int_0^{c+d} \frac{s}{t^{1-s}} dt \\ &= \int_0^c \frac{s}{t^{1-s}} dt + \int_c^{c+d} \frac{s}{t^{1-s}} dt \\ &= c^s + \int_0^d \frac{s}{(t+c)^{1-s}} dt, \end{aligned}$$

und da $s < 1$ gilt, ist $t \mapsto \frac{s}{(t+c)^{1-s}}$ monoton fallend, d.h.

$$\begin{aligned} f(c+d) &= c^s + \int_0^d \frac{s}{(t+c)^{1-s}} dt \\ &\leq c^s + \int_0^d \frac{s}{t^{1-s}} dt \\ &= c^s + d^s \\ &= f(c) + f(d). \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Wir wollen nun zeigen, dass \mathfrak{G}_p stetig ist und eine explizite Abschätzung für die Stetigkeit angeben, da wir diese später noch brauchen werden.

3.4 Lemma:

Die Abbildung $\mathfrak{G}_p : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)$ ist stetig. Insbesondere gilt für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{L}^2(\mu)$ die Ungleichung

$$\|\mathfrak{G}_p(\varphi_1) - \mathfrak{G}_p(\varphi_2)\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} \leq \|\varphi_1\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2-p}{p}} + \|\varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2-p}{p}} \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}. \quad (3.3)$$

Beweis:

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Anwenden der Dreiecksungleichung von $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}$ liefert zunächst

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_p(\varphi_1) - \mathfrak{G}_p(\varphi_2)\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} &= \left\| |\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} \\ &\leq \left\| |\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)} + \left\| (\varphi_1 - \varphi_2) |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}. \end{aligned}$$

Es genügt also, die beiden Terme einzeln abzuschätzen.

Für den ersten Term beachtet man zunächst, dass nach der zweiten Dreiecksungleichung und obigem Lemma 3.3 wegen $0 < \frac{2}{p} - 1 \leq 1$ offenbar

$$|\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \leq (|\varphi_1| - |\varphi_2|)^{\frac{2}{p}-1} \leq |\varphi_1 - \varphi_2|^{\frac{2}{p}-1}$$

punktweise gilt, da $t \mapsto t^{\frac{2}{p}-1}$ monoton wachsend ist. Das liefert dann

$$\begin{aligned} \left\| |\varphi_1| \left(|\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right) \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p &= \int_{\Omega} |\varphi_1|^p \left| |\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right|^p d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |\varphi_1|^p |\varphi_1 - \varphi_2|^{2-p} d\mu, \end{aligned}$$

woraus mit der Hölderschen Ungleichung für $s = \frac{2}{p}$ und $r = \frac{2}{2-p}$ sofort

$$\left\| |\varphi_1| \left(|\varphi_1|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right) \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p \leq \|\varphi_1\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^p \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{2-p}$$

folgt. Das zeigt, dass der erste Term durch

$$\|\varphi_1\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2-p}{p}}$$

nach oben abgeschätzt werden kann.

Analoges Anwenden der Hölderschen Ungleichung auf den zweiten Term liefert

$$\begin{aligned} \left\| (\varphi_1 - \varphi_2) |\varphi_2|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^p(\mu)}^p &= \int_{\Omega} |\varphi_1 - \varphi_2|^p |\varphi_2|^{2-p} d\mu \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^p \cdot \|\varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{2-p}. \end{aligned}$$

Daher kann der zweite Term durch

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot \|\varphi_2\|_{\mathbf{L}^2(\mu)}^{\frac{2-p}{p}}$$

nach oben abgeschätzt werden und es folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung \mathfrak{G}_p auch Fréchet-differenzierbar ist.

3.5 Bemerkung:

Betrachte dazu zunächst

$$f_p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_p(z) := z \cdot |z|^{\frac{2}{p}-1}.$$

Als Funktion $f_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist f_p gegeben durch

$$f_p(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist f_p total differenzierbar mit

$$D_{(x,y)} f_p = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{2-3p}{2p}}}{p} \cdot \begin{pmatrix} 2x^2 + py^2 & (2-p)xy \\ (2-p)xy & px^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$ und

$$D_{(0,0)} f_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist

$$\left(f_p|_{\mathbb{R}} \right)'(x) = \frac{2}{p} \cdot |x|^{\frac{2}{p}-1}.$$

Der Graph der Funktion $(\mathfrak{f}_p|_{\mathbb{R}})$ stellt sich für $p = 1$ offenbar wie folgt dar:

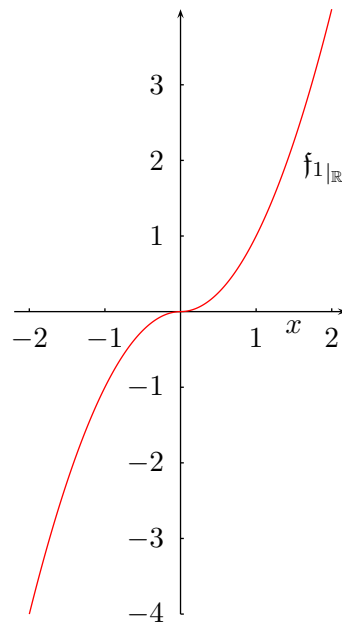


Abbildung 3.1 – Der Graph der Funktion $(\mathfrak{f}_1|_{\mathbb{R}})(x) = x \cdot |x|$.

Nun bemerken wir, dass $\mathfrak{G}_p = T_{\mathfrak{f}_p}$ in der Notation von Satz 1.50 gilt. Um die Fréchet-Differenzierbarkeit von \mathfrak{G}_p zu zeigen, sind also nur noch die Voraussetzungen von Satz 1.50 zu prüfen.

3.6 Satz:

Die Abbildung \mathfrak{G}_p ist an jedem Punkt $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung

$$\mathfrak{G}'[\varphi]h = \frac{|\varphi|^{\frac{2-3p}{p}}}{p} \cdot \begin{pmatrix} 2\Re(\varphi)^2 + p\Im(\varphi)^2 & (2-p)\Re(\varphi)\Im(\varphi) \\ (2-p)\Re(\varphi)\Im(\varphi) & p\Re(\varphi)^2 + 2\Im(\varphi)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Re(h) \\ \Im(h) \end{pmatrix},$$

oder genauer

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}'[\varphi]h &= \frac{|\varphi|^{\frac{2-3p}{p}}}{p} \cdot \left((2\Re(\varphi)^2 + p\Im(\varphi)^2) \cdot \Re(h) + (2-p)\Re(\varphi)\Im(\varphi) \cdot \Im(h) \right. \\ &\quad \left. + i \cdot \left((2-p)\Re(\varphi)\Im(\varphi) \cdot \Re(h) + (p\Re(\varphi)^2 + 2\Im(\varphi)^2) \cdot \Im(h) \right) \right). \end{aligned}$$

Beweis:

Die Voraussetzung (3) von Satz 1.50 ist trivialerweise erfüllt, diese Eigenschaft haben wir oben schon überprüft. Das totale Differential der Abbildung \mathfrak{f}_p haben wir oben schon angegeben, daher ist Voraussetzung (1) offenbar ebenfalls erfüllt.

Für (2) genügt es nun zu zeigen, dass es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|D_{(x_1, y_1)}\mathfrak{f}_p - D_{(x_2, y_2)}\mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \leq c \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_{\mathbb{R}^2}^{\frac{2}{p}-1}$$

für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt. Zunächst wechseln wir dazu auf Polarkoordinaten $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Mit der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist also das Tupel (x, y) mit der komplexen Zahl $r \cdot \exp(i\varphi)$ gleichzusetzen. Insbesondere gilt dann

$$D_{(r, \varphi)}\mathfrak{f}_p = \frac{1}{p} r^{\frac{2}{p}-1} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos^2(\varphi) + p\sin^2(\varphi) & (2-p)\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ (2-p)\cos(\varphi)\sin(\varphi) & p\cos^2(\varphi) + 2\sin^2(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Offenbar ist der rechte Ausdruck bezüglich φ komponentenweise partiell differenzierbar und die Ableitung ist komponentenweise beschränkt. Für zwei Punkte $r \exp(i\varphi_1)$ und $r \exp(i\varphi_2)$ können wir $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \pi$ gilt, ohne die Punkte zu verändern. Damit gibt es dann von φ_1, φ_2 unabhängige Konstanten $C'_1, \tilde{C}_1, C_1 > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} \|D_{(r, \varphi_1)} \mathfrak{f}_p - D_{(r, \varphi_2)} \mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} &\leq C'_1 r^{\frac{2}{p}-1} |\varphi_1 - \varphi_2| \\ &\leq \tilde{C}_1 r^{\frac{2}{p}-1} |\exp(i\varphi_1) - \exp(i\varphi_2)| \\ &\leq C_1 |r \exp(i\varphi_1) - r \exp(i\varphi_2)|^{\frac{2}{p}-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bezüglich r gilt

$$\begin{aligned} &\|D_{(r_1, \varphi)} \mathfrak{f}_p - D_{(r_2, \varphi)} \mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \\ &= |r_1 - r_2|^{\frac{2}{p}-1} \frac{1}{p} \left\| \begin{pmatrix} 2 \cos^2(\varphi) + p \sin^2(\varphi) & (2-p) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ (2-p) \cos(\varphi) \sin(\varphi) & p \cos^2(\varphi) + 2 \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \\ &\leq C_2 |r_1 - r_2|^{\frac{2}{p}-1} \\ &= C_2 |r_1 \exp(i\varphi) - r_2 \exp(i\varphi)|^{\frac{2}{p}-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei C_2 von φ unabhängig gewählt werden kann. Seien nun $r_1 \exp(i\varphi_1)$ und $r_2 \exp(i\varphi_2)$ beliebige Zahlen aus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Ohne Einschränkung können wir $r_2 \leq r_1$ annehmen. Dann gilt mit obigen Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\|D_{(r_1, \varphi_1)} \mathfrak{f}_p - D_{(r_2, \varphi_2)} \mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \\ &\leq \|D_{(r_1, \varphi_1)} \mathfrak{f}_p - D_{(r_2, \varphi_1)} \mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} + \|D_{(r_2, \varphi_1)} \mathfrak{f}_p - D_{(r_2, \varphi_2)} \mathfrak{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \\ &\stackrel{(3.5) \& (3.6)}{\leq} C_2 |r_1 \exp(i\varphi_1) - r_2 \exp(i\varphi_1)|^{\frac{2}{p}-1} + C_1 |r_2 \exp(i\varphi_1) - r_2 \exp(i\varphi_2)|^{\frac{2}{p}-1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die folgende Skizze:

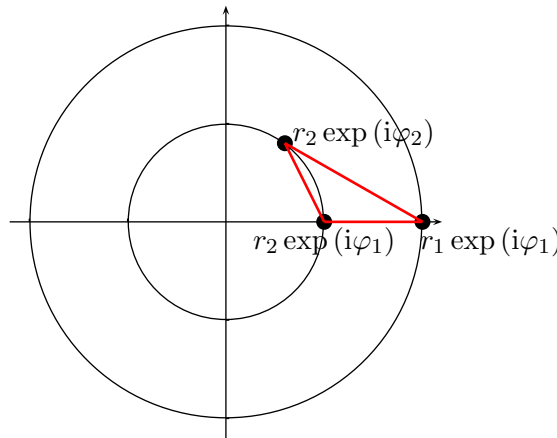


Abbildung 3.2 – Das Dreieck in \mathbb{C} bestehend aus $r_1 \exp(i\varphi_1)$, $r_2 \exp(i\varphi_2)$ und dem Zwischenpunkt $r_2 \exp(i\varphi_1)$ für den Fall $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$. Anderenfalls liegt das Dreieck unterhalb der reellen Achse.

Offenbar ist die Seite $|r_2 \exp(i\varphi_2) - r_1 \exp(i\varphi_1)|$, welche dem Punkt $r_2 \exp(i\varphi_1)$ gegenüber liegt, die größte Seite in diesem Dreieck, da der an $r_2 \exp(i\varphi_1)$ anliegende Winkel größer als 90° sein

muss. Da $x \mapsto x^{\frac{2}{p}-1}$ monoton wachsend ist, folgt daraus

$$\begin{aligned} & \|D_{(r_1, \varphi_1)} \mathbf{f}_p - D_{(r_2, \varphi_2)} \mathbf{f}_p\|_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2} \\ & \leq C_1 |r_1 \exp(i\varphi_1) - r_2 \exp(i\varphi_2)|^{\frac{2}{p}-1} + C_2 |r_1 \exp(i\varphi_1) - r_2 \exp(i\varphi_2)|^{\frac{2}{p}-1} \\ & = c |r_1 \exp(i\varphi_1) - r_2 \exp(i\varphi_2)|^{\frac{2}{p}-1} \end{aligned}$$

mit $c = C_1 + C_2$. Das zeigt genau die Abschätzung (2) von Satz 1.50 und somit folgt die Behauptung. \square

4 \mathbf{L}^p -Regularisierung für $p \in [1, 2]$

Sei stets $p \in [1, 2]$ fest und Y ein Hilbertraum.

4.1 Bemerkung:

Im letzten Abschnitt haben wir eine Fréchet-differenzierbare Transformation \mathfrak{G}_p von $\mathbf{L}^2(\mu)$ nach $\mathbf{L}^p(\mu)$ für $p \in [1, 2)$ konstruiert. Im folgenden Abschnitt wollen wir diese Transformation nutzen, um einen neuen Ansatz für die entsprechende \mathbf{L}^p -Regularisierung vorzustellen. Wir arbeiten dabei kanonisch mit dem Lebesgue-Maß \mathbf{m} . Für die Konvergenzanalyse werden wir annehmen, dass alle Funktionen reellwertig sind, d.h. wir werden nur die Räume $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ für $p \in [1, 2]$ verwenden. Das hat den Grund, dass die Rechnungen sich dadurch deutlich vereinfachen, wie man beispielsweise an der Fréchet-Ableitung von \mathfrak{G}_p sehen kann: Im reellwertigen Fall ist sie als

$$\mathfrak{G}'_p[\varphi] = \frac{2}{p} \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}}, \quad \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$$

gegeben.

Beachte, dass das Verfahren selbst im komplexwertigen Fall ebenso funktioniert und gut-gestellt bleibt, wie wir sehen werden. Die Annahme der Reellwertigkeit bezieht sich also tatsächlich nur auf die Konvergenzanalyse.

Wir wollen hier darauf hinweisen, dass sowohl die Theorie als auch der Algorithmus für $p = 2$ funktionieren und genau die gewöhnliche Tikhonov-Regularisierung liefern, sofern man $0^0 = 1$ vereinbart, da dann die im letzten Abschnitt definierten Transformationen für $p \nearrow 2$ gegen die Identität konvergieren. Der Fall $p = 2$ ist also nichts Neues, stellt aber auch kein Problem dar.

Wir vereinbaren entsprechend $\mathfrak{G}_2 := \text{id}_{\mathbf{L}^2(\mu)}$ und $\mathfrak{H}_2 := \text{id}_{\mathbf{L}^2(\mu)}$.

Sei $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathbf{L}^p(\Omega) \longrightarrow Y$ ein (nicht notwendig linearer) stetiger Operator. Sei außerdem $g \in \mathcal{R}(T) \subset Y$ gegeben. Wir interessieren uns für das Problem

$$\text{Finde } f \in \mathcal{D}(T) \text{ mit } T(f) = g. \quad (4.1)$$

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass dieses Problem schlecht gestellt ist. Unsere gesamte Theorie funktioniert auch für gut gestellte Probleme, daher ist diese Annahme nicht zwingend notwendig. Die Diskussion einiger Bedingungen für die Schlecht-Gestelltheit eines Problems findet sich am Ende von Abschnitt 1.3.1. Insbesondere müssen wir im schlecht gestellten Fall regularisieren, um das Problem sinnvoll zu behandeln. Dazu ersetzen wir wie im Fall eines Hilbertraums (vergleiche Abschnitt 2.2) das Problem (4.1) durch das Tikhonov-Minimierungsproblem

$$\left\| T(f) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p = \mathbf{min!} \text{ über } f \in \mathcal{D}(T) \quad (4.2)$$

mit $\alpha > 0$ und Näherungsdaten $g^\delta \in Y$ von g mit $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$. Die Vorgehensweise ist als so genannte \mathbf{L}^p -Regularisierung bekannt.

Ohne geeignete Voraussetzungen an T kann auch das Problem (4.2) schlecht gestellt sein - dann würde es sich aber nicht um eine Regularisierung handeln! Daher wollen wir hier nun zunächst Kriterien dafür diskutieren, dass (4.2) gut gestellt ist.

4.1 Gut-Gestelltheit des Tikhonov-Minimierungs-Problems

Offenbar ist hier eine Unterscheidung zwischen $p = 1$ und $p \in (1, 2]$ notwendig:

Für $1 < p \leq 2$ ist der Raum $\mathbf{L}^p(\Omega)$ laut Satz 1.27 reflexiv. Da man zeigen kann, dass ein Raum genau dann reflexiv ist, wenn seine Einheitskugel schwach-folgenkompakt ist (vergleiche etwa [Wer05, Seite 446]), sind also normbeschränkte Mengen schwach-folgenkompakt. Bekanntlich ist die Norm bezüglich der schwachen Topologie unterhalbstetig, daher sind die Lemmata 2.10, 2.14 und 2.18 anwendbar und das Problem (4.2) ist gut gestellt.

Für $p = 1$ bemerken wir zunächst:

4.2 Bemerkung:

Da wir auf dem nicht-reflexiven Banachraum $\mathbf{L}^1(\Omega)$ rechnen, reicht die schwache Topologie nicht aus, um die Voraussetzungen der Lemmata 2.9 und 2.14 zu erfüllen - sie ist noch zu fein!

Es muss also eine gröbere Topologie gewählt werden.

4.1.1 Einbettung in den doppelten Dualraum

Da $\mathbf{L}^1(\Omega)$ als Konsequenz aus dem Satz von Krein-Milman nicht als Dualraum eines normierten Raumes darstellbar ist (vergleiche etwa [Wer05, Lemma VIII.4.6]), kann dort die schwach*-Topologie nicht direkt definiert werden. Eine alternative Idee ist, auf den Bidualraum auszuweichen. Wir zeigen im Folgenden, dass dies im Allgemeinen ebenfalls auf nicht erfüllbare Voraussetzungen führt.

4.3 Definition:

Bezeichne

$$\iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)} : \mathbf{L}^1(\Omega) \hookrightarrow (\mathbf{L}^1(\Omega))'' \cong (\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$$

die isometrische Einbettung aus Definition 1.25, wobei auf $(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ die Operatornorm

$$\|\lambda\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'} := \sup_{\substack{f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \\ \|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq 1}} |\lambda(f)|, \quad \lambda \in (\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$$

benutzt wird. Dabei haben wir Bemerkung 1.30 benutzt. Definiere nun einen Operator

$$T_\infty : \mathcal{D}(T_\infty) \subset (\mathbf{L}^\infty(\Omega))' \longrightarrow Y$$

durch $\mathcal{D}(T_\infty) := \iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)}(\mathcal{D}(T))$ und

$$T_\infty(\iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)}(\psi)) := T(\psi), \quad \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Da $\iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$ eine Isometrie ist, folgt sofort, dass

$$\left\| T(f) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|f\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \left\| T_\infty(\iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)}(f)) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\iota_{\mathbf{L}^1(\Omega)}(f)\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'}$$

für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ gilt. Insbesondere ist also das Problem (4.2) äquivalent zu dem Minimierungsproblem

$$\left\| T_\infty(\lambda) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|\lambda\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'} = \mathbf{min!} \text{ über } \lambda \in \mathcal{D}(T_\infty). \quad (4.3)$$

4.4 Definition:

Definiere nun auf $(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ die schwach*-Topologie τ_* , d.h. die Topologie der punktweisen Konvergenz. Genauer gesagt konvergiert eine Folge $(\lambda_n) \subset (\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ bezüglich τ_* gegen $\lambda \in (\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ genau dann, wenn

$$\lambda_n(f) \xrightarrow[\tau_R]{n \rightarrow \infty} \lambda(f) \text{ für alle } f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$$

gilt.

Nach dem Satz von Alaoglu (siehe etwa [Wer05, Korollar VIII.3.12]) ist

$$B := \left\{ \lambda \in (\mathbf{L}^\infty(\Omega))' \mid \|\lambda\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'} \leq 1 \right\}$$

bezüglich τ_* kompakt, und entsprechend auch jede der Mengen

$$\left\{ \lambda \in (\mathbf{L}^\infty(\Omega))' \mid \|\lambda\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'} \leq M \right\} \quad (4.4)$$

mit $M > 0$. Da $((\mathbf{L}^\infty(\Omega))', \tau_*)$ ein Hausdorffraum ist² folgt mit Satz A.23, dass die Mengen (4.4) auch abgeschlossen sind. Das zeigt aber mit Lemma A.44 die Unterhalbstetigkeit der $\|\cdot\|_{(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'}$ -Norm bzgl. τ_* . Es liegt also nahe, nun die Lemmata 2.9 und 2.17 anwenden zu wollen. Unter der Voraussetzung, dass

- (1) $\mathcal{D}(T_\infty)$ bezüglich τ_* abgeschlossen ist und
- (2) $T_\infty : ((\mathbf{L}^\infty(\Omega))', \tau_*) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ stetig ist,

ist das Problem (4.3) also gut-gestellt, und ebenso unser Problem (4.2). Ein entsprechendes Konvergenzresultat wie in Lemma 2.18 wäre allerdings wieder nur in Netz-Form gültig.

4.5 Bemerkung:

Wir wollen hier noch einmal darauf hinweisen, dass die hinreichenden Voraussetzungen, die wir damit für die Gut-Gestelltheit unseres Problems gezeigt haben, sehr restriktiv sind! Wir weisen dazu auf den Satz von Goldstine hin:

4.6 Satz (Goldstine):

Die $\mathbf{L}^1(\Omega)$ -Einheitskugel liegt bezüglich der schwach- $$ -Topologie dicht in der $(\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ -Einheitskugel.*

Für den Beweis verweisen wir auf [Wer05, VIII.3.17]).

Dieser Satz zeigt, dass die schwach- $*$ -abgeschlossenen Mengen in $\mathbf{L}^1(\Omega) \subseteq (\mathbf{L}^\infty(\Omega))'$ sehr spärlich gesät sind. Insbesondere ist jede Menge, die eine $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$ -offene Menge enthält, nicht in diesem Sinne schwach- $*$ -abgeschlossen.

4.1.2 Einbettung in einen Sobolev-Raum

Wir wollen nun noch ein praktikableres Kriterium für die Gut-Gestelltheit des Problems (4.2) vorstellen, welches im Wesentlichen auf dem Sobolevschen Einbettungssatz beruht. Für die Definition von Sobolev-Räumen und elementare Eigenschaften derselben verweisen wir auf [Ada75]. Insbesondere ist dort der Sobolevsche Einbettungssatz als Rellich-Kondrachov-Theorem aufgeführt (siehe [Ada75, Theorem 6.2]). Zur Anwendbarkeit desselben nehmen wir ab jetzt an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$ ist. Insbesondere ist Ω also offen in \mathbb{R}^n .

Nun wählen wir Indizes $k \in \mathbb{N}$ und $r \in [1, \infty)$ derart, dass $k > \frac{n}{r}$ ist. n bezeichnet dabei weiterhin die Raumdimension. Laut Sobolevschem Einbettungssatz ist dann die Einbettung

$$\iota : S := W^{k,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{0,\infty}(\Omega) = \mathbf{L}^\infty(\Omega)$$

kompakt. Nach dem Satz von Schauder (vergleiche etwa [Wer05, Satz III.4.4]) ist ein Operator T genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator T^* kompakt ist. Daher muss also auch der adjungierte Operator

$$\iota^* : \mathbf{L}^1(\Omega) \hookrightarrow S'$$

kompakt sein. Dabei wird der Dualraum S' im folgenden Sinne aufgefasst: Unabhängig von r können die Elemente aus $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset S'$ als Distributionen aufgefasst, d.h. mit einer Linearform

$$\psi \mapsto T_\psi, \quad T_\psi(f) = \int_{\Omega} f\psi \, dx, \quad f \in W^{k,r}(\Omega), \psi \in \mathbf{L}^1(\Omega)$$

²Offenbar sind Grenzwerte von Folgen bzw. Netzen eindeutig, da punktweise bestimmt! Daher folgt das aus Satz A.41.

identifiziert werden. Der Raum S' selbst kann entsprechend als Vervollständigung des Raumes $L^s(\Omega)$ für $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ bezüglich der Norm

$$\|v\| = \sup_{\substack{u \in S \\ \|u\|_S \leq 1}} \left| \int_{\Omega} uv \, dx \right|$$

verstanden werden (vergleiche dazu [Ada75, Abschnitt 3.13]). Insbesondere ist das duale Produkt zwischen S und S' also auf einer dichten Teilmenge als Integration gegeben.

4.7 Definition:

Wir bezeichnen die Topologie auf dem Banachraum S' mit τ_S .

Wegen der Kompaktheit der Einbettung sind dann also die Mengen

$$\left\{ \psi \in \mathbf{L}^1(\Omega) \mid \|\psi\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq M \right\}$$

relativ kompakt bezüglich τ_S . Da τ_S eine Topologie ist, die von einer Norm herkommt, erfüllt τ_S natürlich das erste Abzählbarkeitsaxiom, und daher sind die Mengen

$$\left\{ \psi \in \mathbf{L}^1(\Omega) \mid \|\psi\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq M \right\}$$

sogar relativ folgenkompakt (vergleiche Anhang A). Um zu zeigen, dass auch die erforderliche Unterhalbstetigkeit der $\mathbf{L}^1(\Omega)$ -Norm gegeben ist, benötigen wir das Konzept der so genannten Mollifier. Die folgende Einführung ist aus [Eva98, Appendix C] entnommen:

4.8 Definition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varepsilon > 0$. Wir bezeichnen mit

$$U_\varepsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\},$$

wobei $\text{dist}(x, \partial U) := \inf_{y \in \partial U} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$ ist und $\partial U = \bar{U} \setminus U$ gesetzt wird. Definiere nun die in \mathbb{R}^n beliebig oft differenzierbare Funktion η durch

$$\eta(x) := \begin{cases} C \cdot \exp\left(\frac{1}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}^2 - 1}\right) & \text{falls } \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1, \\ 0 & \text{falls } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei wählen wir $C > 0$ so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, dx = 1$$

gilt.

Außerdem setzen wir

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Die Funktion η heißt **Standard-Mollifier**. Die Funktion η_ε ist beliebig oft differenzierbar auf dem ganzen \mathbb{R}^n , hat kompakten Träger in $\mathfrak{B}_\varepsilon(0)$ und erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) \, dx = 1.$$

Beachte, dass auch $\eta_\varepsilon \geq 0$ gilt.

4.9 Definition:

Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Wir setzen

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f \quad \text{in } U_\varepsilon,$$

d.h. es ist

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy = \int_{\mathfrak{B}_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y) \, dy$$

für $x \in U_\varepsilon$.

Dann gilt:

4.10 Satz:

Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) Die Funktion f^ε ist beliebig oft stetig differenzierbar in U_ε .

(2) Es gilt

$$f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} f \text{ fast überall.}$$

(3) Ist f stetig, so konvergiert f^ε gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U gegen f für $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(4) Ist $1 \leq r < \infty$ und ist $f \in \mathbf{L}^r(U)$, so gilt

$$\|f^\varepsilon - f\|_{\mathbf{L}^r(U)} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0.$$

Für den Beweis verweisen wir auf [Eva98, Appendix C, Theorem 6].

Nun können wir die Unterhalbstetigkeit der $\mathbf{L}^1(\Omega)$ -Norm zeigen:

4.11 Lemma:

Die $\mathbf{L}^1(\Omega)$ -Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$ ist bezüglich $\tau_{\mathfrak{s}}$ unterhalbstetig.

Beweis:

Sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbf{L}^1(\Omega)$ mit

$$\psi_n \xrightarrow[\tau_{\mathfrak{s}}]{n \longrightarrow \infty} \psi \in \mathbf{L}^1(\Omega).$$

Insbesondere liegt dann „punktweise“ Konvergenz vor, d.h.

$$\langle \psi_n, s \rangle_{\text{dual}} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \langle \psi, s \rangle_{\text{dual}} \quad \text{für alle } s \in S. \quad (4.5)$$

Dann ist zu zeigen, dass

$$\|\psi\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$$

gilt.

Da das duale Produkt aus (4.5) auf einer dichten Teilmenge durch Integration gegeben ist, wie wir oben gesehen haben, können wir dies auch hier annehmen.

Setze nun $\tilde{f} := \frac{|\psi|}{\psi}$ fast überall. Dann ist $\tilde{f} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ mit $|\tilde{f}| = 1$ fast überall, und da Ω beschränkt ist, gilt sogar $\tilde{f} \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ für beliebiges r , insbesondere für das r aus der Definition von $\tau_{\mathfrak{s}}$. Sei nun $f \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n)$ die Fortsetzung von \tilde{f} durch 0 außerhalb von Ω .

Definiere dann

$$f^\varepsilon := f \star \eta_\varepsilon$$

wie in Satz 4.10 eingeführt. Wie dort gesehen ist f^ε ebenfalls beliebig oft differenzierbar, daher gilt insbesondere $f^\varepsilon \in S$ und es ist $|f_\varepsilon| \leq 1$ fast überall.³

Nun gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \psi \cdot f^\varepsilon \, dx &= \langle \psi, f^\varepsilon \rangle_{\text{dual}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, f^\varepsilon \rangle_{\text{dual}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n \cdot f^\varepsilon \, dx \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \cdot \|f^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Laut Satz 4.10 gilt insbesondere

$$f^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} f(x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

und daher folgt mit dem Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz (vergleiche etwa [Rud99, Satz 1.34]) für die Majorante $|\psi| \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ dass

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Omega} \psi \cdot f^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \psi \cdot f \, dx = \int_{\Omega} |\psi| \, dx = \|\psi\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}.$$

Daher folgt aus (4.6) mit $\varepsilon \searrow 0$ die Behauptung. \square

Damit können wir nun die Lemmata 2.10, 2.14 und 2.18 unter der Annahme anwenden, dass

(A1) $\mathcal{D}(T)$ bezüglich $\tau_{\mathfrak{s}}$ abgeschlossen ist und

(A2) $T : (\mathbf{L}^1(\Omega), \tau_{\mathfrak{s}}) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$ stetig ist,

was die Gut-Gestelltheit des Problems (4.2) zeigt.

4.12 Bemerkung:

Offenbar ist die Topologie $\tau_{\mathfrak{s}}$ weitaus besser zu handhaben als τ_* , da $\tau_{\mathfrak{s}}$ einer Normtopologie entspricht und somit vollständig durch Folgen charakterisiert werden kann.

Darüber hinaus besitzt $\tau_{\mathfrak{s}}$ eine weitere nützliche Eigenschaft:

4.13 Lemma:

Sei

$$M = \{\psi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \mid a \leq \psi \leq b \text{ fast überall}\}$$

für bestimmte $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dann ist M bezüglich $\tau_{\mathfrak{s}}$ abgeschlossen.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass jede $\tau_{\mathfrak{s}}$ -konvergente Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit Grenzwert $\psi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$ auch $\psi \in M$ erfüllt. Ohne Einschränkung kann $a = 0$ angenommen werden, da $\psi \geq a \Leftrightarrow \psi - a \geq 0$. Es gilt aber offenbar

$$\psi \geq 0 \Leftrightarrow \langle \psi, s \rangle_{\text{dual}} \geq 0 \text{ für alle } s \in S \text{ mit } s \geq 0,$$

³Beachte, dass f^ε sogar eine stetige Funktion ist. Wir identifizieren sie hier aber mit ihrer Klasse in $\mathbf{L}^q(\Omega)$.

da das duale Produkt durch Integration gegeben ist. Wie oben gesehen gilt aber

$$\langle \psi, s \rangle_{\text{dual}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, s \rangle \geq 0 \text{ für alle } s \in S \text{ mit } s \geq 0,$$

und damit folgt, dass auch $\psi \geq 0$ gilt. Analog für $\psi \leq b$. \square

4.2 Ein neuer Lösungsansatz

Kommen wir nun zur detaillierteren Untersuchung des Problems (4.2), also

$$\left\| T(f) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p = \mathbf{min!} \text{ über } f \in \mathcal{D}(T). \quad (4.2)$$

Wir wollen das Problem (4.2) lösen, indem wir es auf den in Abschnitt 2.2 diskutierten Fall der Tikhonov-Regularisierung nicht-linearer Probleme auf Hilberträumen mittels der im vorigen Abschnitt definierten Abbildung \mathfrak{G}_p und \mathfrak{H}_p zurückführen.

4.14 Definition:

Definiere dazu $\tilde{T} : \mathcal{D}(\tilde{T}) \subseteq \mathbf{L}^2(\Omega) \longrightarrow Y$ durch

$$\tilde{T} = T \circ \mathfrak{G}_p.$$

Zunächst diskutieren wir einige Eigenschaften von \tilde{T} :

- Um den Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathfrak{G}_p^{-1}(\mathcal{D}(T)) = \mathfrak{H}_p(\mathcal{D}(T))$$

werden wir uns später in Abschnitt 4.4.1 noch genauer kümmern.

- Beachte, dass \tilde{T} im Allgemeinen nicht-linear ist, selbst wenn wir T als linear voraussetzen. Allerdings ist \tilde{T} wegen der Stetigkeit von \mathfrak{G}_p und der vorausgesetzten Stetigkeit von T selbst wieder stetig.
- Falls wir T als Fréchet-differenzierbar in $\mathcal{D}(T)$ voraussetzen, so ist \tilde{T} nach der Kettenregel für die Fréchet-Ableitung (Satz 1.44) und Satz 3.6 über die Ableitung von \mathfrak{G}_p wieder Fréchet-differenzierbar in ganz $\mathcal{D}(\tilde{T})$, und im reellen Fall lautet die Fréchet-Ableitung

$$\tilde{T}'[\varphi] = T'[\mathfrak{G}(\varphi)] \circ \mathfrak{G}'_p[\varphi] = T' \left[\varphi |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \right] \circ \mathcal{M}_{\frac{2}{p}|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \quad (4.7)$$

an $\varphi \mathcal{D}(\tilde{T}) \subset \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Genauer ist also für $\varphi, h \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ die Fréchet-Ableitung von \tilde{T} an φ in Richtung h im reellen Fall gegeben durch

$$\tilde{T}'[\varphi](h) = \frac{2}{p} \cdot T' \left[\varphi |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \right] \left(|\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \cdot h \right).$$

Die Bedeutung des Operators \tilde{T} sehen wir nun wie folgt: für $\varphi := \mathfrak{H}_p(f)$, $f \in \mathcal{D}(T)$ beliebig ist

$$\left\| \tilde{T}(\varphi) - g \right\|_Y^2 + \alpha \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \|T(f) - g\|_Y^2 + \alpha \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \quad (4.8)$$

gemäß (3.2). Also ist das Minimierungsproblem (4.2) äquivalent zu dem Minimierungsproblem

$$\left\| \tilde{T}(\varphi) - g \right\|_Y^2 + \alpha \|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \mathbf{min!} \text{ über } \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{T}). \quad (4.9)$$

Insbesondere ist also (4.9) genau dann stetig lösbar, wenn (4.2) stetig lösbar ist. Daher reicht unsere Annahme von oben aus. Die Problemstellung (4.9) gehört entsprechend zu dem Problem $\tilde{T}(\varphi) = g$, welches wir in Abschnitt 2.2 diskutiert haben. Wie dort nehmen wir an, dass es eine (0)-Minimum-Norm-Lösung φ^\dagger von $\tilde{T}(\varphi) = g$ gibt. Beachte, dass wir damit nur die Startnäherung $\varphi_0 = 0$ in der Notation des Abschnitts 2.2 betrachten. Die Lösungen von (4.9) bezeichnen wir wie dort mit φ_α^δ .

Außerdem verwenden wir folgende Notation:

4.15 Definition:

Es seien

$$f^\dagger := \mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) \quad \text{und} \quad f_\alpha^\delta := \mathfrak{G}_p(\varphi_\alpha^\delta).$$

Offenbar ist $f^\dagger \in \mathcal{D}(T)$ und $f_\alpha^\delta \in \mathcal{D}(T)$.

Beachte, dass wegen (4.8) die Funktionen f_α^δ genau die Lösungen von (4.2) sind und das f^\dagger eine Minimum-Norm-Lösung von (4.1) ist. Daher ist diese Notation konsistent mit den allgemein üblichen Bezeichnungen für Minimierungsprobleme der Art (4.2).

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass wir zwar durch (4.9) vollständig auf Hilberträumen arbeiten und das Problem der Minimierung auf Banachräumen umgangen haben, der Operator \tilde{T} dafür im Allgemeinen aber nicht-linear ist! Ein Banachraum dagegen wirft stets als erstes die Frage nach der numerischen Realisierung dieses Raumes und insbesondere seiner Norm auf. Wir haben also das Problem der Banachräume gegen eine Nichtlinearität eingetauscht. Es ist durchaus möglich, dass die Nichtlinearität besser zu behandeln ist, allerdings bringt sie auch Schwierigkeiten mit sich. Wir werden in Abschnitt 4.3 nun eine Möglichkeit geben, die Nichtlinearität zu behandeln.

4.3 Ein resultierender Algorithmus

Im Prinzip kann man beliebige Algorithmen der kontinuierlichen Optimierung verwenden, um die minimierenden Elemente von (4.9) zu berechnen. Wir geben eine einfache Variante an:

L^p -Regularisierung (kontinuierlich)

Initialisierung:

- Ein $p \in [1, 2]$;
- Der Regularisierungsparameter $\alpha > 0$;
- Ein Fréchet-differenzierbarer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbf{L}^p(\Omega) \longrightarrow Y$;
- Messdaten $g^\delta \in Y$;
- Eine Startnäherung $x_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$;
- Die Anzahl der Iterationen $m \in \mathbb{N}$;

$$g(x) := x \cdot |x|^{\frac{2}{p}-1};$$

$$\tilde{T} := T \circ g;$$

for $i = 1$ **to** m **do**

$$h_i := \operatorname{argmin}_{h \in \mathbf{L}^p(\Omega)} \left(\left\| \tilde{T}'[x_{i-1}]h + \tilde{T}(x_{i-1}) - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \|h + x_{i-1}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right); \quad (4.10)$$

$$x_i := x_{i-1} + h_i;$$

end;

$$f_\alpha^\delta := g \circ x_m;$$

Die Zuweisung (4.10) ist notwendig, um die Nichtlinearität von \tilde{T} auszugleichen. Aus dem selben Grund wird dann m -mal in der Hoffnung iteriert, dass die Näherung

$$\tilde{T}'[x_{i-1}]h + \tilde{T}(x_{i-1}) \approx \tilde{T}(x_{i-1} + h)$$

für größeres i besser wird.

Numerisch kann man (4.10) durch Diskretisierung lösen, beispielsweise indem die Funktionen x_i für $i = 0, \dots, m$, h_i für $i = 1, \dots, m$, g^δ und f_α^δ als Vektoren aus dem \mathbb{R}^n aufgefasst und somit durch n Stützstellen approximiert werden. In diesem Fall ist dann eine diskrete Implementation von \tilde{T} (möglicherweise als Matrix) ebenso notwendig, wie eine Implementation der Fréchet-Ableitung $\tilde{T}'[x_i]$ an einer beliebigen Stelle x_i . Es ist allerdings wünschenswert, dass die entsprechenden Matrizen nicht aufgestellt werden müssen, sondern deren Anwendung effizient implementiert werden kann, denn dann kann (4.10) effizient mittels des CG-Verfahrens gelöst werden.

Obwohl es sich bei dem hier angegebenen Algorithmus nur um eine einfache Variante handelt, hat sich diese in numerischen Experimenten als ausreichend erwiesen. Im Allgemeinen ist aber keine globale Konvergenz zu erwarten. Man könnte die Lösung des Minimierungsproblems (4.10) durch eine Schrittweitensteuerung (z.B. Armijo) verbessern, was eine bessere Konvergenz des Verfahrens ermöglicht. Insbesondere kann bei dem hier angegebenen Algorithmus nicht garantiert werden, dass als Ergebnis ein globales und kein lokales Minimum ausgegeben wird.

4.4 Konvergenzanalyse des neuen Lösungsansatzes

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, Konvergenzraten für den neuen Ansatz (4.9) herzuleiten. Beachte, dass es sich dabei nicht um Konvergenzraten für den (mehr oder weniger konkreten) Algorithmus aus Abschnitt 4.3 handelt, sondern lediglich um Konvergenzraten für die minimierenden Elemente von (4.9).

Für $p = 1$ werden wir ein Resultat vorstellen, welches sich aber für das Beispiel in Abschnitt 5 als nicht anwendbar erweist. Für $p > 1$ sind die folgenden Rechnungen als unvollständig anzusehen, da kein Konvergenzsatz präsentiert wird. Allerdings zeigen wir in Abschnitt 4.4.5 auf, dass aus bereits bekannten Abschätzungen zumindest Konvergenzraten in der \mathbf{L}^2 -Norm folgen.

Wie bereits weiter oben erwähnt werden wir von dieser Stelle an alle Funktionen als reellwertig voraussetzen.

Wir wollen versuchen, Satz 2.7 anzuwenden. Dazu benötigen wir zunächst weitere Eigenschaften von \tilde{T} . Wir wollen entsprechende Annahmen über T machen und untersuchen, in wie fern sich diese auf \tilde{T} übertragen.

4.4.1 Konvexität des Definitonsbereiches

Wie weiter oben schon bemerkt, ist

$$\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathfrak{H}_p(\mathcal{D}(T)) = \left\{ \psi \mid |\psi|^{\frac{p}{2}-1} \mid \psi \in \mathcal{D}(T) \right\} \subset \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Würde die Abbildung \mathfrak{H}_p konvexe Teilmengen von $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ in konvexe Teilmengen von $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ abbilden, so wäre die Forderung „ $\mathcal{D}(\tilde{T})$ konvex“ äquivalent zur Forderung „ $\mathcal{D}(T)$ konvex“. Allerdings⁴ ist das für $p \neq 2$ jedoch nicht der Fall.

Wir beschränken uns daher auf den Fall, dass

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \psi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \mid a \leq \psi \leq b \text{ fast überall} \right\}$$

mit $a, b \in [-\infty, \infty]$. Wegen der Bijektivität von \mathfrak{G}_p ist dann offenbar

$$\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathfrak{H}_p(\mathcal{D}(T)) = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \mid a \cdot |a|^{\frac{p}{2}-1} \leq \varphi \leq b \cdot |b|^{\frac{p}{2}-1} \text{ fast überall} \right\},$$

und diese Menge ist konvex!

4.4.2 Hölder-Stetigkeit der Fréchet-Ableitung

4.16 Lemma:

Es gebe ein $C \geq 0$ und ein $R \geq 2 \|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 1$, s.d. die Lipschitz-Bedingung

$$\left\| T' [f^\dagger] - T' [f] \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \leq C \left\| f^\dagger - f \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$$

für alle $f \in \mathcal{D}(T) \cap \mathfrak{B}_R(f^\dagger)$ gelte. Dann gilt

$$\left\| \tilde{T}' [\varphi^\dagger] - \tilde{T}' [\varphi] \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \leq \gamma \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{T}) \cap \mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger)$ mit den Konstanten

$$\tilde{R} := - \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sqrt{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R}$$

⁴Ist $\Omega = \{a, b\}$ eine Zweipunktmenge, so können wir $\mathcal{D}(T)$ als Teilmenge des \mathbb{R}^2 auffassen (in diesem Fall ist $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^\Omega \cong \mathbb{R}^2$). Dann ist die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

konvex, das Bild unter \mathfrak{H}_p als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{p}} + y^{\frac{2}{p}} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

für $p \neq 2$ allerdings nicht!

und

$$\begin{aligned} \gamma &:= \frac{2C}{p} \tilde{R}^{2-\frac{2}{p}} \cdot \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \tilde{R} \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) + \frac{2C}{p} \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} \\ &\quad + \frac{2C}{p} \cdot \left(2\tilde{R} \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R}^2 \right) + \frac{2}{p} \left\| T' \left[\mathfrak{G} \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y}. \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst stellen wir fest, dass offenbar $\tilde{R} \geq 1$ gilt. Ist $\varphi \in \mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger) \cap \mathcal{D}(\tilde{T})$, so gilt gemäß der Stetigkeitsabschätzung (3.3) für \mathfrak{G}_p die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left\| \mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) - \mathfrak{G}_p(\varphi) \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \\ &\leq \left\| \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2-p}{p}} \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2-p}{p}} \\ &\leq \left(\underbrace{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R}}_{\geq 1} \right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot \tilde{R} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \underbrace{\tilde{R}}_{\geq 1}^{\frac{2-p}{p}} \\ &\leq \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R} \right) \cdot \tilde{R} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \tilde{R} \\ &= \tilde{R}^2 + 2\tilde{R} \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - 2 \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \sqrt{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R \\ &\quad - 2 \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + 2 \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \sqrt{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R} \\ &= R. \end{aligned}$$

Das bedeutet wegen $\mathcal{D}(T) = \mathfrak{G}_p(\mathcal{D}(\tilde{T}))$ genau

$$\varphi \in \mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger) \cap \mathcal{D}(\tilde{T}) \Rightarrow \mathfrak{G}_p(\varphi) \in \mathfrak{B}_R(f^\dagger) \cap \mathcal{D}(T).$$

Also ist die vorausgesetzte Lipschitz-Bedingung an $T'[f]$, $f \in \mathfrak{B}_R(f^\dagger) \cap \mathcal{D}(T)$ in

$$\mathfrak{G}_p(\mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger) \cap \mathcal{D}(T)) = {}^5 \mathfrak{G}_p(\mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger)) \cap \mathcal{D}(\tilde{T})$$

erfüllt.

⁵Da \mathfrak{G}_p injektiv ist, gilt hier Gleichheit! Ohne Injektivität wäre nur die Inklusion \subseteq richtig.

Nun berechnet man für $\varphi \in \mathfrak{B}_{\tilde{R}}(\varphi^\dagger) \cap \mathcal{D}(\tilde{T})$ unter Verwendung von (4.7) und (1.2), dass

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{T}'[\varphi^\dagger] - \tilde{T}'[\varphi] \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq \frac{2}{p} \left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq \frac{2}{p} \left(\left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \right. \\
& \quad \left. + \left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \circ \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \right) \\
& \leq \frac{2}{p} \left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)] - T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)} \\
& \quad + \frac{2}{p} \left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der nach obiger Rechnung anwendbaren Voraussetzung liefert wegen $\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) = f^\dagger$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{T}'[\varphi^\dagger] - \tilde{T}'[\varphi] \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left\| \mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) - \mathfrak{G}_p(\varphi) \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \cdot \left\| \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)} \\
& \quad + \frac{2}{p} \left\| T'[\mathfrak{G}_p(\varphi)] \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ ist offenbar $|\varphi|^{\frac{2}{p}-1} = |\varphi|^{\frac{2-p}{p}} \in \mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\Omega)$, daher gilt mit (1.4) und punktwiser Anwendung von Lemma 3.3

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} - \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)} &= \left\| |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} - |\varphi|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\Omega)} \\
&\leq \left\| |\varphi^\dagger - \varphi|^{\frac{2}{p}-1} \right\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{2-p}}(\Omega)} \\
&= \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2-p}{p}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir außerdem $\left\| \mathcal{M}_{|u|^{\frac{2}{p}-1}} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)} = \|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2-p}{p}}$ für $u \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ wie in (1.3) gezeigt ein,

so folgt mit (3.3) auch

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{T}' [\varphi^\dagger] - \tilde{T}' [\varphi] \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left\| \mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) - \mathfrak{G}_p(\varphi) \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left(\left\| \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \cdot \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \quad + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left(\underbrace{\left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R} \right)^{\frac{2}{p}-1}}_{\geq 1} \cdot \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \quad + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \cdot \left(\left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{2-\frac{2}{p}} \cdot \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \tilde{R} \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} \right) \\
& \quad + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& \leq \frac{2C}{p} \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \cdot \left(\tilde{R}^{2-\frac{2}{p}} \cdot \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \tilde{R} \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} \right) \\
& \quad + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \left\| \varphi^\dagger - \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \\
& =: \left\| \varphi - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \cdot L
\end{aligned}$$

mit

$$L = \frac{2C}{p} \tilde{R}^{2-\frac{2}{p}} \cdot \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \tilde{R} \cdot \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \right) + \frac{2C}{p} \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} + \frac{2}{p} \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y}.$$

Laut Voraussetzung ist mit (3.3) außerdem auch

$$\begin{aligned}
& \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi)] - T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} + \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq C \left\| \mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) - \mathfrak{G}_p(\varphi) \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq C \cdot \left(\left\| \varphi \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}-1} \cdot \tilde{R} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \tilde{R}^{\frac{2}{p}-1} \right) + \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq C \cdot \left(\underbrace{\left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R} \right)^{\frac{2}{p}-1}}_{\geq 1} \cdot \tilde{R} + \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \underbrace{\tilde{R}^{\frac{2}{p}-1}}_{\geq 1} \right) + \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y} \\
& \leq C \cdot \left(2\tilde{R} \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R}^2 \right) + \|T' [\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow Y},
\end{aligned}$$

womit $L \leq \gamma$ und somit die Behauptung folgt. \square

4.17 Bemerkung:

Die Annahme

$$R \geq 2 \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 1$$

war nur notwendig, damit $\tilde{R} \geq 1$ gilt und sich entsprechend die Rechnungen vereinfachen. Da wir später R stets als hinreichend groß voraussetzen werden, war dies hier zweckdienlich. Obige Abschätzung an die Fréchet-Ableitung des Operators \tilde{T} bleibt auch für kleineres R mit anderer Konstanten erhalten.

Offenbar erfüllt die Fréchet-Ableitung von \tilde{T} nur für $p = 1$ unter den gemachten Voraussetzungen eine Lipschitz-Bedingung. Für $p > 1$ kann man schon an der Fréchet-Ableitung von $\mathfrak{G}_p : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$, die als

$$\mathfrak{G}'_p[\varphi] = \frac{2}{p} \mathcal{M}_{|\varphi|^{\frac{2}{p}-1}}$$

gegeben ist sehen, dass \mathfrak{G}' nur eine schwächere Hölderbedingung und keine Lipschitz-Bedingung erfüllt - entsprechend ist auch nicht anzunehmen, dass \tilde{T}' die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Insbesondere kann man zeigen, dass die Hölderabschätzung für $2 > p > 1$ optimal ist und nicht durch eine Lipschitzabschätzung verbessert werden kann. Betrachte dazu etwa T als Identität auf einer geeigneten Teilmenge von $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$ und φ^\dagger sowie φ als konstante Funktionen. Dann wäre eine Lipschitzabschätzung an die Fréchet-Ableitung von \tilde{T} äquivalent dazu, dass die Ableitung der Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^{\frac{2}{p}}$$

eine Lipschitzbedingung erfüllt. Man kann sich nun mit elementaren Methoden überlegen, dass dies nicht der Fall sein kann, etwa deshalb, weil f'' um 0 nicht beschränkt ist.

Daher ist etwa Satz 2.7 nur für $p = 1$ direkt anwendbar.

4.4.3 Die Quellbedingung**4.18 Lemma:**

Es gilt

$$\tilde{T}'[\varphi^\dagger]^* \omega = \frac{2}{p} |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \cdot T' \left[\varphi^\dagger |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \right]^* \omega.$$

Beweis:

Laut der Kettenregel (Satz 1.44) und Satz 3.6 ist

$$\tilde{T}'[\varphi^\dagger] = \frac{2}{p} T' \left[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) \right] \circ \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}}.$$

Lemma 1.40 liefert

$$\tilde{T}'[\varphi^\dagger]^* \varphi = \frac{2}{p} \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}}^* \circ T' \left[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger) \right]^* \varphi$$

für $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$. Wegen $\mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$, $T'[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)] : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \longrightarrow Y$ ist $\mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}}^* : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ und $T'[\mathfrak{G}_p(\varphi^\dagger)]^* : Y \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Nun berechnet man für $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ und $g \in \mathbf{L}^q_{\mathbb{R}}(\Omega)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot \mathcal{M}^*_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} g \, dx &= \left\langle f, \mathcal{M}^*_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} g \right\rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= \left\langle \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} f, g \right\rangle_{\text{dual}} \\ &= \left\langle |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \cdot f, g \right\rangle_{\text{dual}} \\ &= \int_{\Omega} |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \cdot f \cdot g \, dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathcal{M}^*_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} g = |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \cdot g = \mathcal{M}_{|\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1}} g, \quad g \in \mathbf{L}^q_{\mathbb{R}}(\Omega),$$

da $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$ beliebig war. Das zeigt die Behauptung. \square

Das liefert direkt Folgendes

Korollar 4.19:

Es gebe ein $\omega \in Y$ s.d.

$$\varphi^\dagger = \frac{2}{p} |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \cdot T' \left[\varphi^\dagger |\varphi^\dagger|^{\frac{2}{p}-1} \right]^* \omega$$

erfüllt ist. Dann gilt $\varphi^\dagger = \tilde{T}' [\varphi^\dagger]^* \omega$.

4.4.4 Konvergenzraten für $p = 1$

In diesem Fall werden wir nun Satz 2.7 anwenden. Mit Definition 4.15 haben wir:

4.20 Satz:

Sei $g^\delta \in Y$ mit $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ und φ^\dagger eine Minimum-Norm-Lösung von $\tilde{T}(\varphi) = g$. Mögen außerdem die folgenden Bedingungen gelten:

(1) Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ ist gegeben als

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \psi \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega) \mid a \leq \psi \leq b \text{ fast überall} \right\}$$

für bestimmte $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

(2) T ist Fréchet-differenzierbar,

(3) es gibt ein $C \geq 0$ und ein hinreichend großes $R > 0$ mit

$$\left\| T' [f^\dagger] - T' [f] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \leq C \left\| f^\dagger - f \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$$

für alle $f \in \mathcal{D}(T) \cap \mathfrak{B}_R(f^\dagger)$,

(4) es gibt ein $\omega \in Y$ mit

$$\varphi^\dagger = 2 \cdot |\varphi^\dagger| \cdot T' \left[\varphi^\dagger \cdot |\varphi^\dagger| \right]^* \omega$$

und

(5) es ist

$$\begin{aligned} & \left(2C \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \sqrt{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R} + 2C \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + 2CR + 2 \left\| T' \left[\mathfrak{G}_1 \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \right) \cdot \|\omega\|_Y < 1. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir für die Parameterwahl $\alpha = c \cdot \delta$ mit einem $c > 0$ die Konvergenzraten

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \mathcal{O} \left(\sqrt{\delta} \right), \\ \left\| \tilde{T} \left(\varphi_\alpha^\delta \right) - g \right\|_Y &= \mathcal{O} \left(\delta \right) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$.

Beweis:

Wir haben bei Satz 2.7 schon bemerkt, dass die in Abschnitt 2.2 allgemein angenommene schwache Abgeschlossenheit von \tilde{T} nicht notwendig für diese Konvergenzraten ist, wie man im Beweis dort leicht sieht. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die Existenz von φ_α^δ durch die Annahmen (A1) und (A2) wegen Lemma 2.10 gesichert ist.

Wie wir oben schon gesehen haben, ist die Annahme, dass \tilde{T} Fréchet-differenzierbar ist, äquivalent dazu, dass T Fréchet-differenzierbar ist.

Wir haben oben in Abschnitt 4.4.1 schon gesehen, dass unter den gemachten Voraussetzungen der Definitionsbereich von $\mathcal{D} \left(\tilde{T} \right)$ ebenfalls konvex ist.

Nun wenden wir Lemma 4.16 für $p = 1$ an (dies ist möglich, da R hinreichend groß ist!) und sehen nach kurzer Rechnung so, dass Voraussetzung (2) von Satz 2.7 mit

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \cdot C \cdot \left(2 \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R} \right) \cdot \left(\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \tilde{R} \right) + 2 \left\| T' \left[\mathfrak{G}_1 \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \\ &= 2C \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \sqrt{\left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R} + 2C \left\| \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + 2CR + 2 \left\| T' \left[\mathfrak{G}_1 \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \end{aligned}$$

erfüllt ist. In der letzten Umformung haben wir dabei \tilde{R} durch den laut Lemma 4.16 gegebenen Term ersetzt.

Korollar 4.19 zeigt nun, dass die gemachten Voraussetzungen hinreichend für die Anwendung von Satz 2.7 auf (4.9) sind. \square

Das folgende Lemma rechnet diese Konvergenzraten auf das Ausgangsproblem (4.1) mit der Regularisierung (4.2) zurück.

4.21 Lemma:

Unter den Voraussetzungen (1) bis (5) von Satz 4.20 gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left\| f_\alpha^\delta - f^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} &= \mathcal{O} \left(\sqrt{\delta} \right), \\ \left\| T \left(f_\alpha^\delta \right) - g \right\|_Y &= \mathcal{O} \left(\delta \right) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$.

Beweis:

Laut Satz 4.20 gilt unter den gemachten Voraussetzungen $\left\| \varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\delta}$ mit einem

$C \geq 0$ für hinreichend kleines $\delta > 0$. Damit folgt unter Verwendung von (3.3), dass

$$\begin{aligned} \|f_\alpha^\delta - f^\dagger\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} &= \left\| \mathfrak{G}_1(\varphi_\alpha^\delta) - \mathfrak{G}_1(\varphi^\dagger) \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\|\varphi_\alpha^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \|\varphi_\alpha^\delta - \varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq C\sqrt{\delta} \left(\|\varphi_\alpha^\delta\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C\sqrt{\delta} \left(2\|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C\sqrt{\delta} \right) \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$. Genauso ist nach Definition von \tilde{T} und Satz 4.20

$$\|T(f_\alpha^\delta) - g\|_Y = \|\tilde{T}(\varphi_\alpha^\delta) - g\|_Y = \mathcal{O}(\delta)$$

für $\delta \rightarrow 0$. □

4.22 Bemerkung:

Beachte zunächst, dass die Bedingung $\gamma\|\omega\|_Y < 1$, welche zur Anwendbarkeit des Satzes 2.7 auf das Problem $\tilde{T}(\varphi) = g$ notwendig ist, nicht durch Umskalieren des Operators \tilde{T} bzw. T erreicht werden kann:

- Ersetzt man \tilde{T} durch $\frac{1}{c}\tilde{T}$ mit einem $c > 1$ und entsprechend g durch $\frac{1}{c}g$ (damit die Gleichung erhalten bleibt), so ändert sich zwar auch γ zu $\frac{\gamma}{c}$, gleichzeitig wird aber ω zu $c \cdot \omega$. Das bringt also keinen Vorteil für den Faktor $\gamma \cdot \|\omega\|_Y$.

Da \tilde{T} im Allgemeinen nicht linear ist, kann der Faktor, der notwendig ist, um die Gleichung $\tilde{T}(\varphi^\dagger) = g$ zu erhalten, nicht auf φ^\dagger abgewälzt werden (wäre das möglich, so würden wir eine quadratische Umskalierung bei ω erreichen und somit auch eine Änderung an dem Faktor $\gamma \cdot \|\omega\|_Y$!).

- Berücksichtigt man die Umrechnung der Quellbedingung (Korollar 4.19), so stellt man fest, dass selbst im Fall eines linearen Operators T eine Umskalierung nichts bringt. Dort könnte man T durch $\frac{1}{c^2}T$ mit einem $c > 1$ ersetzen und diesen Faktor durch Ersetzen von f^\dagger durch $\frac{1}{c^2}f^\dagger$ abwälzen, ohne die Daten umzuskalieren. Dann würde aus $\varphi^\dagger = \mathfrak{H}_1(f^\dagger)$ genau $\frac{1}{c}\varphi^\dagger$. Außerdem würde diese Skalierung aus γ der Faktor $\frac{\gamma}{c^2}$ machen, aber wegen der umgerechneten Quellbedingung gleichzeitig aus ω ein $c^2\omega$ - womit der Faktor $\gamma \cdot \|\omega\|_Y$ unverändert bliebe.

Nun wollen wir noch eine hinreichende Bedingung für die Annahme (5) aus Satz 4.20 geben.

4.23 Lemma:

Sei

$$S := \|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sqrt{\|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R}.$$

Gelten

$$C\|\omega\|_Y < \frac{1}{4 \cdot S^2} \text{ und } \|T'[\mathfrak{G}(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \|\omega\|_Y < \frac{1}{4},$$

so ist $\gamma \cdot \|\omega\|_Y < 1$, d.h. die Bedingung (5) aus Satz 4.20 ist erfüllt.

Beweis:

Sei γ wie in Lemma 4.16 für $p = 1$ gegeben.

Zunächst stellt man leicht fest, dass

$$\gamma \leq 2CS^2 + 2 \left\| T' \left[\mathfrak{G}_1 \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y}$$

gilt. Nach Voraussetzung haben wir also

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \|\omega\|_Y &\leq 2CS^2 \|\omega\|_Y + 2 \left\| T' \left[\mathfrak{G} \left(\varphi^\dagger \right) \right] \right\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \|\omega\|_Y \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

4.4.5 Bereits bekannte Konvergenzraten für $p > 1$

In diesem Zusammenhang wollen wir darauf hinweisen, dass bereits Konvergenzraten (im reellen Fall) in der \mathbf{L}^2 -Norm für den Fall $1 < p < 2$ und lineares T vorliegen. Dazu leiten wir im folgenden eine Abschätzung der so genannten Bregman-Distanz nach unten durch die \mathbf{L}^2 -Norm her. Zunächst wollen wir dafür das Subdifferential eines konvexen Funktionals und Bregman-Distanzen einführen. Für weitere Informationen über das Subdifferential verweisen wir auf [Phe93, Chapter 3], für Details über Bregman-Distanzen auf [BO04] oder [Res05].

Sei X stets ein Banachraum.

4.24 Definition:

Sei $J : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ ein konvexes Funktional. Wir bezeichnen mit

$$\text{dom}(J) := \{x \in X \mid J(x) < \infty\} \subset X$$

das Gebiet von J .

4.25 Definition:

Wir nennen $J : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ genau dann eigentlich, wenn

$$\text{dom}(J) \neq \emptyset,$$

d.h. wenn J nicht nur den Wert ∞ annimmt.

4.26 Definition:

Sei $J : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ ein eigentliches konvexes Funktional.

Wir definieren die Menge aller Subgradienten $\lambda \in \partial J(u)$ von J an der Stelle $u \in \text{dom}(J) \subset X$ für das Subdifferential $\partial J(u)$ durch

$$\partial J(u) = \{ \lambda \in X' \mid \langle \lambda, v - u \rangle_{\text{dual}} \leq J(v) - J(u) \text{ für alle } v \in X \}.$$

Für $u \in X \setminus \text{dom}(J)$ setze $\partial J(u) := \emptyset$.

4.27 Bemerkung:

(1) Auch für $u \in \text{dom}(J)$ kann es passieren, dass $\partial J(u) = \emptyset$ ist.

(2) Eine weitere Charakterisierung des Subdifferentials lautet

$$\partial J(u) = \{ \lambda \in X' \mid \langle \lambda, v \rangle_{\text{dual}} \leq J(u+v) - J(u) \text{ für alle } v \in X \}$$

für $u \in \text{dom}(J)$.

(3) Ist J an $u \in \text{dom}(J)$ Fréchet-differenzierbar, so gilt

$$\partial J(u) = \{J'[u]\}.$$

4.28 Definition:

Sei $J : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ konvex und $\xi \in \partial J(u)$. Wir definieren die Bregman-Distanz

$$D_J^\xi : \text{dom}(J) \times \text{dom}(J) \longrightarrow [0, \infty]$$

zu u bezüglich J durch

$$D_J^\xi(v, u) := J(v) - J(u) - \langle \xi, v - u \rangle_{\text{dual}}, \quad u, v \in \text{dom}(J).$$

Wir können nun Bregman-Distanzen auch in einer mengenwertigen Variante durch

$$\mathcal{D}_J(v, u) := \left\{ D_J^\xi(v, u) \mid \xi \in \partial J(u) \right\}$$

definieren und erhalten so eine Familie von Distanzen.

4.29 Bemerkung:

Sei $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional, sei $x \in X$ fest und $\lambda \in \partial J(x)$. Die Bregman-Distanz

$$D_J^\lambda(y, x) = J(y) - J(x) - \langle \lambda, y - x \rangle_{\text{dual}}$$

kann man sich dann graphisch verdeutlichen als den Abstand zwischen den Funktionalwerten $J(y)$ und $J(x)$ abzüglich der linearen Approximation von J an x durch $\lambda \in \partial J(x)$ angewendet auf den Abstand der Argumente x und y .

4.30 Beispiel:

Sei $X = \mathbb{R}$, $J(x) := |x|$ und $x = 0 \in X$ fest. Offenbar ist dann $\partial J(x) = \partial J(0) = [-1, 1]$. Wir wählen $\frac{1}{2} =: \lambda \in \partial J(0)$. Zu $y = 2$ sieht der Bregman-Abstand

$$D_J^\lambda(2, 0) = J(2) - J(0) - \langle \lambda, 2 - 0 \rangle_{\text{dual}} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

dann wie folgt aus:

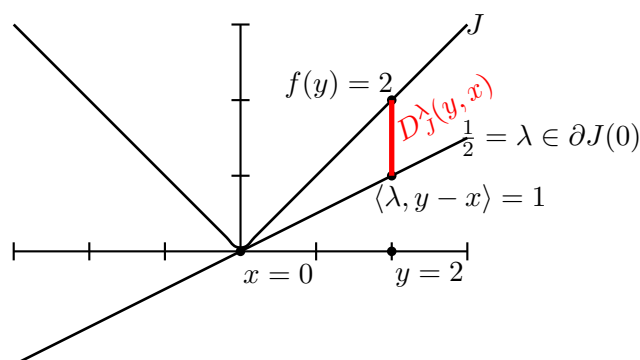


Abbildung 4.3 – Die Bregman-Distanz zu $x = 0$ bezüglich $f(x) = |x|$ bei Wahl von $\xi = \frac{1}{2} \in \partial f(0)$.

Man kann hier bereits sehen, dass $D_J^\lambda(2, 0)$ drastisch von der Wahl von $\lambda \in [-1, 1] = \partial f(0)$ abhängt: Wählt man $\lambda = 1$, so ist $D_J^\lambda(2, 0) = 0$, bei $\lambda = -1$ aber $D_J^\lambda(2, 0) = 4$. In unserer

Notation wäre dann also

$$\mathcal{D}_J(2, 0) = [0, 4].$$

Uns interessiert insbesondere das Funktional

$$J(\psi) = \|\psi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p$$

auf $X = \mathbf{L}^p(\Omega)$. Gemäß der Dreiecksungleichung ist dieses Funktional konvex, es ist sogar Fréchet-differenzierbar mit

$$J'[\psi]h = p \int_{\Omega} \text{sign}(\psi) |\psi|^{p-1} h \, dx.$$

Daher ist die Bregman-Distanz zu v bezüglich J gegeben als

$$\begin{aligned} D(u, v) &:= D_J(u, v) \\ &= \|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p - \|v\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p - p \int_{\Omega} |v|^{p-1} \text{sign}(v) (u - v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left(|u|^p - |v|^p - p |v|^{p-1} \text{sign}(v) (u - v) \right) \, dx. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun folgende Ungleichung (für den Beweis siehe [Lor08, Lemma 2.2]):

4.31 Lemma:

Sei $1 < p \leq 2$. Für $C > 0$ und $L > 0$ gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $|s| \leq C$ und $|t - s| \leq L$, dass

$$|t|^p - |s|^p - p \text{sign}(s) |s|^{p-1} (t - s) \geq \kappa |t - s|^2$$

mit $\kappa = \frac{p(p-1)}{2(C+L)^{2-p}}$.

Gilt nun $u, u - v \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega)$, so liefert punktweises Anwenden dieser Ungleichung sofort

$$\kappa \|u - v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq D(u, v).$$

In [BO04] wird gezeigt, dass für das Problem (4.2) unter der Quellbedingung

$$\exists \omega \in Y \text{ mit } T^* \omega \in \partial J(f^\dagger) = \left\{ p \text{sign}(f^\dagger) |f^\dagger|^{p-1} \right\}$$

(wobei wir $\text{sign}(f^\dagger) |f^\dagger|^{p-1}$ als das lineare Funktional $h \mapsto \int_{\Omega} \text{sign}(f^\dagger) |f^\dagger|^{p-1} \cdot h \, dx$ auffassen) zusammen mit der Parameterwahl $\alpha = \delta$ die Konvergenzraten

$$D(f_{\alpha}^{\delta}, f^\dagger) = \mathcal{O}(\delta)$$

erreicht werden. Damit erhalten wir also unter Annahme dieser Quellbedingung und der zusätzlichen Annahme, dass

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \psi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega) \mid a \leq \psi \leq b \text{ fast überall} \right\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (damit $u, u - v \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Omega)$ gilt) die Konvergenzraten

$$\left\| f_{\alpha}^{\delta} - f^\dagger \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}).$$

Beachte, dass dieses Vorgehen für $p = 1$ scheitert, da Lemma 4.31 dort seine Gültigkeit verliert.

4.5 Diskussion der Ergebnisse

4.5.1 Zusammenfassung für $p = 1$

Für $p = 1$ haben wir Folgendes gezeigt:

Sei Y ein Hilbertraum, $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\Omega) \longrightarrow Y$ ein (nicht notwendig linearer) Fréchet-differenzierbarer Operator für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit Lipschitz-Rand und $g \in \mathcal{R}(T) \subset Y$ gegeben. Weiter seien die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (1) Es gebe eine Minimum-Norm-Lösung f^\dagger zu $T(f) = g$, d.h. ein $f^\dagger \in \mathcal{D}(T)$ mit $T(f^\dagger) = g$ und

$$\|f^\dagger\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = \inf \left\{ \|f\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \mid f \in \mathcal{D}(T) \text{ mit } T(f) = g \right\}$$

und sei $\varphi^\dagger := \mathfrak{H}_1(f^\dagger)$ (dann ist φ^\dagger eine Minimum-Norm-Lösung zu $\tilde{T}(\varphi^\dagger) = g$),

- (2) die Näherungsdaten g^δ erfüllen $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$,

- (3) T ist als Operator

$$T : (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(\Omega), \tau_{\mathfrak{s}}) \longrightarrow (Y, \tau_{\|\cdot\|_Y})$$

stetig, wobei $\tau_{\mathfrak{s}}$ die Sobolev-Topologie aus Definition 4.7 bezeichnet,

- (4) $\mathcal{D}(T) = \{\psi \in \mathbf{L}^1(\Omega) \mid a \leq \psi \leq b \text{ fast überall}\}$ für bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$ (gemäß Lemma 4.13 sind diese Mengen $\tau_{\mathfrak{s}}$ -abgeschlossen!),

- (5) es gibt $C \geq 0$ und ein hinreichend großes $R > 0$ derart, dass

$$\|T'[f^\dagger] - T'[f]\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \leq C \|f^\dagger - f\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)}$$

für alle $f \in \mathcal{D}(T) \cap \mathfrak{B}_R(f^\dagger)$ gilt,

- (6) es gibt ein $\omega \in Y$, s.d.

$$\varphi^\dagger = 2 \left| \varphi^\dagger \right| \cdot T'[f^\dagger]^* \omega$$

und

- (7) mit $S := \|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sqrt{\|\varphi^\dagger\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + R}$ gelten die Gleichungen

$$C \|\omega\|_Y < \frac{1}{4 \cdot S^2} \text{ und } \|T'[\mathfrak{G}_1(\varphi^\dagger)]\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \|\omega\|_Y < \frac{1}{4}.$$

Dann ist (4.2) ein (bezüglich der Topologie $\tau_{\mathfrak{s}}$) gut-gestelltes Problem, und lösen wir (4.2) mittels (4.9), so erhalten wir für die Parameterwahl $\alpha = c \cdot \delta$, $c > 0$ die Konvergenzraten

$$\begin{aligned} \|f_\alpha^\delta - f^\dagger\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} &= \mathcal{O}(\sqrt{\delta}), \\ \|T(f_\alpha^\delta) - g\|_Y &= \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$.

4.32 Bemerkung:

Falls T sogar linear ist, fallen einige der obigen Forderungen weg. In diesem Fall ist T an jeder Stelle $\psi \in \mathcal{D}(T)$ Fréchet-differenzierbar mit $T'[\psi] = T$. Offenbar bleiben die geforderten Eigenschaften (1) bis (4) davon unberührt, Eigenschaft (5) ist dagegen mit $C = 0$ und $R > 0$

beliebig stets erfüllt.

In Eigenschaft (6) ist $T' [f^\dagger]^* = T^*$, und ebenso wird in Eigenschaft (7) dann unter anderem

$$\|T\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \|\omega\|_Y < \frac{1}{4}$$

gefordert. Hinreichend wie notwendig zur Anwendung von Satz 2.7 ist allerdings schon

$$\|T\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y} \cdot \|\omega\|_Y < \frac{1}{2},$$

wie der Beweis von Lemma 4.23 zeigt.

4.33 Bemerkung (Quellbedingung):

Sei T linear. Ist etwa $\varphi^\dagger > 0$ fast überall, so ist $|\varphi^\dagger| = \varphi^\dagger$ und Division der Gleichung durch $2\varphi^\dagger$ liefert

$$T^*\omega = \frac{1}{2}$$

fast überall. Also muss in diesem Fall die konstante Funktion $\frac{1}{2} \in \mathcal{R}(T^*) \subset \mathbf{L}^1(\Omega)$ liegen - das ist offenbar nur dann möglich, wenn Ω beschränkt ist! Allerdings haben wir die Beschränktheit von Ω sowieso angenommen, um die Gut-Gestellttheit des Problems (4.2) zu zeigen.

Außerdem liefert Satz 2.7 für lineares T und $\varphi^\dagger > 0$ fast überall (was z.B. für $a > 0, b = \infty$ in (4) der Fall sein muss) falls (6) und (7) erfüllt sind offenbar Raten wie in Satz 1.74, womit das Problem $\tilde{T}(\varphi) = g$ und damit auch $T(f) = g$ gut gestellt ist!

Allerdings ist die \mathbf{L}^1 -Regularisierung vor allem für solche Probleme geeignet, bei denen φ^\dagger sehr „spärlich“ ist, d.h. bei denen φ^\dagger auf großen Gebieten 0 ist. Daher muss man die Bedingungen (6) und (7) in gewissem Sinne als gekoppelte Bedingungen für die „sparsity“⁶ von φ^\dagger betrachten:

Sei $U \subset \Omega$ eine meßbare Menge derart, dass φ^\dagger auf $\Omega \setminus U$ fast überall 0 ist. Für lineares T können die Bedingungen (6) und (7) dann ersetzt werden durch

$$\text{Es gibt ein } \omega \in Y \text{ s.d. } T^*\omega = \frac{1}{2} \text{ fast überall auf } U \text{ und } \|\omega\|_Y < \frac{1}{2\|T\|_{\mathbf{L}^1(\Omega) \rightarrow Y}}. \quad (4.11)$$

Je kleiner U gewählt werden kann, desto ungenauer ist ω bestimmt, was Möglichkeiten zur Verkleinerung der Y -Norm von ω offen lässt.

Wir werden in Abschnitt 5 allerdings zeigen, dass diese Bedingung für symmetrische und gleichzeitig periodische Faltungsprobleme leider nicht erfüllbar ist.

4.5.2 Ausblicke für $p = 1$

Es bleibt zu hoffen, dass das Ergebnis von Satz 4.20 noch verbessert werden und die Bedingung (4.11) möglicherweise noch deutlich abgeschwächt werden kann. Eine Möglichkeit besteht darin, nicht einfach Satz 2.7 anzuwenden, sondern die Konvergenzanalyse eigenständig zu untersuchen. So liegen nur theoretisch Norm-Konvergenzraten für die \mathbf{L}^1 -Regularisierung vor, wo bisher nur Konvergenzraten in Form von Bregman-Distanzen bekannt waren (siehe etwa [Res05] oder [BO04]).

4.5.3 Ausblicke für $p > 1$

Hier liegt noch keine vergleichbare Konvergenzanalyse vor, da der Operator \tilde{T} im Allgemeinen keiner Lipschitz-Bedingung mehr genügt. Es bleibt zu untersuchen, ob unter ähnlichen oder gar gleichen Voraussetzungen an T (wie in Abschnitt 4.4.1, Lemma 4.16 und Korollar 4.19

⁶ Vermutlich existiert keine adäquate Übersetzung für diesen Begriff, aber „Spärlichkeit“ kommt ihm wohl am nächsten.

angenommen) Konvergenzraten in der L^p -Norm gezeigt werden können. Der Beweis von Satz 2.7 scheint unter der geltenden Hölder-Bedingung jedenfalls nicht derart modifiziert werden zu können, dass sich Konvergenzraten irgendeiner Art zeigen ließen, nicht mal Konvergenz im Bildbereich.

Wie oben gesehen können allerdings aus den Konvergenzraten in Form von Bregman-Distanzen auch Konvergenzraten in der L^2 -Norm gewonnen werden.

4.6 Regularisierung mit l^p -Strafterm

4.6.1 Die Räume $l^p(S)$

Zunächst benötigen wir die Räume $l^p(S)$ für eine beliebige Indexmenge S und $p \in [1, \infty]$, die wie folgt definiert werden können:

4.34 Definition:

Sei S eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(S)$ die Potenzmenge von S . Wir definieren durch

$$\mu_z(R) := \begin{cases} \infty & \text{falls } R \text{ unendlich ist,} \\ |R| & \text{falls } R \text{ endlich ist,} \end{cases} \quad R \in \mathcal{P}(S)$$

das **Zählmaß** auf $\mathcal{P}(S)$. Dabei bezeichnet $|R|$ für eine endliche Menge R die Anzahl der Elemente dieser Menge.

4.35 Bemerkung:

Das Maß μ_z auf $(S, \mathcal{P}(S))$ ist genau dann endlich, wenn S endlich ist und genau dann σ -endlich, wenn S abzählbar ist.

4.36 Definition:

Wir bezeichnen für eine beliebige Menge S

$$l^p(S) := \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu_z)$$

für $p \in [1, \infty]$ und den Maßraum $(S, \mathcal{P}(S), \mu_z)$.

4.37 Bemerkung:

Wir können $l^p(S)$ als Folgenraum auffassen, denn offenbar gilt

$$l^p(S) = \left\{ f : S \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(s) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } s \in S \text{ und } \sum_{s \in S} |f(s)|^p < \infty \right\}.$$

Die Summe $\sum_{s \in S} |f(s)|^p$ kann dabei kanonisch über eine Abzählung der Menge $\{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ definiert werden.

4.38 Bemerkung:

Da die Räume $l^p(S)$ wie hier vorgestellt Spezialfälle von $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu)$ sind, handelt es sich offenbar um Banachräume bzw. für $p = 2$ sogar um einen Hilbertraum.

4.6.2 l^p -Regularisierung

In neueren Veröffentlichungen werden oftmals auch andere Varianten der Tikhonov-Regularisierung betrachtet, nämlich solche, die (gewichtete) l^p -Normen als Strafterm verwenden:

Sei $A : X \longrightarrow Y$ ein gegebener linearer und beschränkter Operator zwischen reellen, separablen Hilberträumen X und Y , und seien Meßdaten g^δ derart gegeben, dass ein $g^+ \in Y$ mit $g^+ = Af^+$ für $\|g^+ - g^\delta\|_Y \leq \delta$ existiert. Ziel ist auch hier die Rekonstruktion von f^+ . Nun wählt man eine Orthonormalbasis $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von X und nimmt an, dass es eine spärliche Repräsentation von f^+

in dieser Orthonormalbasis gibt. Entsprechend ist die regularisierte Lösung dann gegeben als minimierendes Element des Funktionals

$$f \mapsto \left\| Af - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k |\langle f, \psi_k \rangle_X|^p$$

für ein $1 \leq p \leq 2$ und eine Gewichtsfolge $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die von 0 weg beschränkt ist: $\omega_k \geq \omega_0 > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. α bezeichnet dabei wieder den Regularisierungsparameter.

Da X ein separabler Hilbertraum ist, ist es möglich, sich auf den Fall $X = \ell^2(\mathbb{N}) =: \ell^2$ zurückzuziehen: Wir definieren $B : \ell^2 \longrightarrow X$ durch

$$Bu := \sum_{k=1}^{\infty} u_k \psi_k \text{ für } u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

setzen $K := AB$ und schreiben das Tikhonov-Funktional als

$$\Psi(u) := \left\| Ku - g^\delta \right\|_Y^2 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k |u_k|^p, \quad u \in \ell^2. \quad (4.12)$$

Die minimierenden Elemente dieses Funktionals bezeichnen wir mit $u^{\alpha, \delta}$, die exakte Lösung mit $u^+ = K^{-1}f^+$.⁷

Die Gut-Gestelltheit des Minimierungsproblems

$$\Psi(u) = \mathbf{min!} \text{ über } u \in \ell^2$$

wurde in [DDD04, Theorem 4.1] ausführlich untersucht: Dort wird gezeigt, dass die Injektivität von K oder die Annahme $p > 1$ zusammen mit einer Parameterauswahlregel α mit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0$$

bereits hinreichend für ℓ^2 -Normkonvergenz der minimierenden Elemente von (4.12) gegen u^+ ist. In [GHS08] wird die Wohlgestelltheit des Problems auch im nicht-linearen Fall gezeigt.

In [Lor08] wird gezeigt, dass für $1 < p \leq 2$ die Quellbedingung

$$\exists \theta \in Y \text{ s.d. } \omega \operatorname{sign}(u^+) |u^+|^{p-1} = K^* \theta \quad (4.13)$$

(alle Operationen punktweise anwenden!) zusammen mit der Parameterwahl $\alpha = c \cdot \delta$, $c > 0$, hinreichend für die Konvergenzraten

$$\begin{aligned} \left\| Ku^{\alpha, \delta} - g^\delta \right\|_Y &= \mathcal{O}(\delta), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left| u_k^{\alpha, \delta} - u_k^+ \right|^2 &= \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

für $\delta \longrightarrow 0$ ist. Dieser Fall wurde auch in [GHS08] für möglicherweise nicht-lineare Probleme untersucht.

Der Fall $p = 1$ gestaltet sich als etwas schwieriger. Zunächst wird in [Lor08] folgende Eigenschaft definiert:

4.39 Definition:

Ein Operator $K : \ell^2 \longrightarrow Y$ für einen Hilbertraum Y besitzt die **endliche Basis Injektivität**

⁷Beachte, dass K^{-1} nicht stetig existiert. Allerdings haben wir oben angenommen, dass zumindest eine Lösung f^+ von $Af = g^+$ existiert, was diese Notation rechtfertigt.

(EBI), falls für alle endlichen Teilmengen $I \subset \mathbb{N}$ der Operator $K|_I$ injektiv ist, d.h. wenn für alle $u, v \in \ell^2$ mit $Ku = Kv$ und $u_k = v_k$ für alle $k \notin I$ folgt, dass $u = v$.

Danach wird gezeigt, dass die Quellbedingung

$$\exists \theta \in Y \text{ s.d. } \omega \operatorname{sign}(u^+) = K^* \theta \quad (4.14)$$

zusammen mit der EBI-Eigenschaft von K , der Annahme, dass u^+ in ℓ^2 eine endliche Repräsentation besitzt und der Parameterwahl $\alpha = \delta$ hinreichend für die Konvergenzraten

$$\left\| u^{\alpha, \delta} - u^+ \right\|_{\ell^2}^2 = \mathcal{O}(\delta)$$

für $\delta \rightarrow 0$ sind.

Die Quellbedingungen (4.13) und (4.14) entsprechen den von uns in Korollar 4.19 berechneten Quellbedingungen. Allerdings bleibt die Erfüllbarkeit dieser Quellbedingungen in praktischen Beispielen weiter im Dunklen.

4.6.3 Berechnung der minimierenden Elemente

In [Lor08] wird erwähnt, dass die Berechnung der minimierenden Elemente zu (4.12) ein bei weitem nicht-triviales Problem ist. In [DDD04] wird ein expliziter (iterativer) Algorithmus zu Berechnung dieser Elemente vorgestellt. Wir wollen hier nun insbesondere erwähnen, dass diese Elemente mittels Transformation in einen gewichteten ℓ^2 leichter berechnet werden können. Da die ℓ^p -Norm in (4.12) gewichtet ist, wollen wir nun auch hier die Räume $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ entsprechend gewichten. Dazu definieren wir:

4.40 Definition:

Sei S eine beliebige Menge und $\omega = (\omega_s)_{s \in S}$ eine positive Gewichtung. Dann ist

$$\ell_\omega^p(S) := \left\{ f : S \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(s) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } s \in S \right. \\ \left. \text{und } \sum_{s \in S} \omega_s |f(s)|^p < \infty \right\}.$$

Die Summe $\sum_{s \in S}$ ist dabei wieder kanonisch über eine Abzählung der Menge $\{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ definiert und wir betrachten die Elemente $f \in \ell_\omega^p(S)$ wie oben als Folgen: $f = (f(s))_{s \in S}$.

Außerdem definieren wir auf ℓ_ω^p die Norm

$$\|x\|_{\ell_\omega^p(S)} := \left(\sum_{s \in S} \omega_s |x_s|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_s)_{s \in S} \in \ell_\omega^p(S).$$

Offenbar gilt $\ell_\omega^p(S) = \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(\mu_\omega)$ für das Maß μ_ω auf S , welches gegeben ist durch

$$\mu_\omega(\{s\}) = \omega_s, \quad s \in S.$$

Daher besitzen die Räume $\ell_\omega^p(S)$ die selben Eigenschaften wie die Räume $\ell^p(S)$ ohne Gewichtung. Wir bezeichnen wie oben $\ell_\omega^p := \ell_\omega^p(\mathbb{N})$. Nun können wir auch hier Transformationen zwischen ℓ_ω^p und ℓ_ω^q für $p \in [1, 2]$ definieren:

4.41 Definition:

Sei $\omega = (\omega_s)_{s \in S}$ eine positive Gewichtung und $p \in [1, 2]$. Wir definieren die Transformation

$\mathfrak{g}_p^\omega : \mathfrak{l}_\omega^2 \longrightarrow \mathfrak{l}_\omega^p$ durch

$$\mathfrak{g}_p^\omega((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \left(x_n \cdot |x_n|^{\frac{2}{p}-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{l}_\omega^2.$$

Die Umkehrung $\mathfrak{h}_p^\omega : \mathfrak{l}_\omega^p \longrightarrow \mathfrak{l}_\omega^2$ dieser Transformation ist mit der Konvention $\frac{0}{0^s} = 0$ für $0 < s < 1$ gegeben als

$$\mathfrak{h}_p^\omega((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \left(y_n \cdot |y_n|^{\frac{p}{2}-1} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{l}_\omega^p.$$

Dabei handelt es sich um die Transformationen \mathfrak{G}_p und \mathfrak{H}_p aus Abschnitt 3 für den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_\omega)$. Daher gilt für $x \in \mathfrak{l}_\omega^2$ und $y \in \mathfrak{l}_\omega^p$ wie bereits gezeigt

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{g}_p^\omega(x)\|_{\mathfrak{l}_\omega^p}^p &= \|x\|_{\mathfrak{l}_\omega^2}^2, \\ \|\mathfrak{h}_p^\omega(y)\|_{\mathfrak{l}_\omega^2}^2 &= \|y\|_{\mathfrak{l}_\omega^p}^p. \end{aligned}$$

Insbesondere kann das Problem $\Psi(u) = \mathbf{min!}$ über $u \in \mathfrak{l}^2$ dann formuliert werden als

$$\|Ku - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|u\|_{\mathfrak{l}_\omega^p}^p = \mathbf{min!} \text{ über } u \in \mathfrak{l}^2. \quad (4.15)$$

Offenbar müssen die Lösungen des Minimierungsproblems (4.15) aus \mathfrak{l}_ω^p sein, da der hintere Term sonst ∞ ist. Daher braucht nur über alle $u \in \mathfrak{l}_\omega^p \cap \mathfrak{l}^2$ minimiert werden. Wir schränken also K auf $\mathcal{D}(K) := \mathfrak{l}^2 \cap \mathfrak{l}_\omega^p$ als eine Teilmenge von \mathfrak{l}_ω^p ein und können

$$\tilde{K} := K|_{\mathcal{D}(K)} \circ \mathfrak{g}_p^\omega : \mathcal{D}(\tilde{K}) \subseteq \mathfrak{l}_\omega^2 \longrightarrow Y$$

definieren (natürlich mit entsprechendem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\tilde{K}) := \mathfrak{h}_p^\omega(\mathcal{D}(K))$). Dieser Operator ist im Allgemeinen nicht-linear, aber dafür kann das Problem (4.15) mittels $v := \mathfrak{h}_p^\omega(u)$ äquivalent umgeschrieben werden zu

$$\|\tilde{K}(v) - g^\delta\|_Y^2 + \alpha \|v\|_{\mathfrak{l}_\omega^p}^2 = \mathbf{min!} \text{ über } v \in \mathcal{D}(\tilde{K}). \quad (4.16)$$

Da der Operator \tilde{K} Fréchet-differenzierbar mit

$$\tilde{K}'[v] = K \circ \mathfrak{g}_p^{\omega'}[v] = K \circ \mathcal{M}_{2|v|} \quad (4.17)$$

ist, kann dieses Problem numerisch durch einem dem Algorithmus aus Abschnitt 4.3 ähnlichen Algorithmus gelöst werden.

Für $p = 1$ können wir sogar ein Analogon zu Satz 4.20 präsentieren:

Bezeichnen wir die Minimizer des Funktionals (4.16) mit v_α^δ , ist v^+ eine exakte Lösung zu dem Problem $\tilde{K}(v) = g$ und setzt man

$$u^+ := \mathfrak{g}_1^\omega(v^+), \quad u_\alpha^\delta := \mathfrak{g}_1^\omega(v_\alpha^\delta),$$

so ist u^+ eine exakte Lösung zu $K(u) = g$ und die Elemente u_α^δ lösen (4.15).

4.42 Satz:

Sei $g^\delta \in Y$ mit $\|g - g^\delta\|_Y \leq \delta$ und K injektiv. Mögen darüber hinaus die folgenden Bedingungen gelten:

(1) Es gebe ein $\theta \in Y$ mit

$$v^+ = 2|v^+| \cdot K^*\theta$$

und

(2) es gelte

$$2 \|K\|_{\mathfrak{L} \rightarrow Y} \cdot \|\theta\|_Y < 1.$$

Dann erhalten wir für die Parameterauswahl $\alpha = c \cdot \delta$ mit einem $c > 0$ die Konvergenzraten

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta - u^+\|_{\mathfrak{L}} &= \mathcal{O}(\sqrt{\delta}), \\ \|K(u_\alpha^\delta) - g\|_Y &= \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$.

Beweis:

Natürlich handelt es sich um eine Anwendung von Satz 2.7. Die schwache Abgeschlossenheit wird auch hier nicht benötigt, die Existenz von u_α^δ ist gesichert, falls wir die Injektivität von K fordern (wie in [DDD04, Theorem 4.1] gezeigt).

Wir berechnen zunächst $\mathcal{D}(\tilde{K})$: Die Bijektivität von \mathfrak{h}_1^ω impliziert

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{K}) &= \mathfrak{h}_1^\omega(\mathfrak{l}^2 \cap \mathfrak{l}_\omega^1) \\ &= \mathfrak{h}_1^\omega(\mathfrak{l}^2) \cap \underbrace{\mathfrak{h}_1^\omega(\mathfrak{l}_\omega^1)}_{=\mathfrak{l}_\omega^2}, \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{h}_1^\omega(x)\|_{\mathfrak{l}^4}^4 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| x_n |x_n|^{-\frac{1}{2}} \right|^4 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \\ &= \|x\|_{\mathfrak{l}^2}^2 \end{aligned}$$

für $x \in \mathfrak{l}^2$ ist $\mathfrak{h}_1^\omega(\mathfrak{l}^2) = \mathfrak{l}^4$, wobei wir wieder die Bijektivität von \mathfrak{h}_1^ω benutzt haben. Es ist also

$$\mathcal{D}(\tilde{K}) = \mathfrak{l}^4 \cap \mathfrak{l}_\omega^2,$$

und diese Menge ist als Schnitt zweier Vektorräume wieder ein Vektorraum und somit konvex. Wegen (4.17) und Lemma 1.23 ist zusätzlich

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}'[v] - \tilde{K}'[v^+]\|_{\mathfrak{L} \rightarrow Y} &\leq \|K\|_{\mathfrak{L} \rightarrow Y} \cdot \|\mathcal{M}_{2|v|} - \mathcal{M}_{2|v^+}|\|_{\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}} \\ &= \|K\|_{\mathfrak{L} \rightarrow Y} \cdot \|\mathcal{M}_{2(|v|-|v^+|)}\|_{\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}} \\ &\leq 2 \|K\|_{\mathfrak{L} \rightarrow Y} \cdot \|v - v^+\|_{\mathfrak{L}}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{K}'[v])^* &= (K \circ \mathcal{M}_{2|v|})^* \\ &= \mathcal{M}_{2|v|}^* \circ K^* \\ &= \mathcal{M}_{2|v|} \circ K^*, \end{aligned}$$

wobei wir die Berechnung von $\mathcal{M}_{2|\varphi^+|}^*$ aus dem Beweis von Lemma 4.18 verwendet haben, die sich hier analog anwenden lässt.

Somit sind die hier gegebenen Voraussetzungen also hinreichend für die Anwendbarkeit von Satz 2.7 und wir erhalten so zunächst für die Parameterwahl $\alpha = c \cdot \delta$ mit einem $c > 0$ die Konvergenzraten

$$\begin{aligned} \|v_\alpha^\delta - v^+\|_{\mathfrak{L}_\omega^2} &= \mathcal{O}(\sqrt{\delta}), \\ \|\tilde{K}(v_\alpha^\delta) - g\|_Y &= \mathcal{O}(\delta) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$. D.h. es gilt $\|v_\alpha^\delta - v^+\|_{\mathfrak{L}_\omega^2} \leq C\sqrt{\delta}$ mit einem $C \geq 0$ für hinreichend kleines $\delta > 0$. Damit folgt unter Verwendung von (3.3), dass

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^\delta - u^+\|_{\mathfrak{L}_\omega^1} &= \|\mathfrak{g}_1^\omega(v_\alpha^\delta) - \mathfrak{g}_1^\omega(v^+)\|_{\mathfrak{L}_\omega^1} \\ &\leq 2C\sqrt{\delta} \left(\|v_\alpha^\delta\|_{\mathfrak{L}_\omega^2} + \|v^+\|_{\mathfrak{L}_\omega^2} \right) \\ &\leq 2C\sqrt{\delta} \left(2\|v^+\|_{\mathfrak{L}_\omega^2} + C\sqrt{\delta} \right) \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$. Genauso ist nach Definition von \tilde{K}

$$\|K(u_\alpha^\delta) - g\|_Y = \|\tilde{K}(v_\alpha^\delta) - g\|_Y = \mathcal{O}(\delta)$$

für $\delta \rightarrow 0$. □

4.43 Bemerkung (Quellbedingung und Vergleich der Ergebnisse):

Auch hier kann die Quellbedingung natürlich wieder als Bedingung an die „sparsity“ von u^+ betrachtet werden. Offenbar ist

$$v^+ = 2|v^+| \cdot K^*\theta \tag{4.18a}$$

gleichbedeutend mit $2K^*\theta = \text{sign}(v^+)$, was beinahe der Quellbedingung (4.14) entspricht (Beachte, dass $\text{sign}(u^+) = \text{sign}(v^+)$!).⁸ Wir fordern dazu zusätzlich

$$2\|K\|_{\mathfrak{L}_\omega^1 \rightarrow Y} \cdot \|\theta\|_Y < 1, \tag{4.18b}$$

was einer Bedingung an die Norm des Elements $\theta \in Y$ entspricht. Die Frage ist also, ob es ein $\theta \in Y$ mit $2K^*\theta = \text{sign}(v^+)$ und hinreichend kleiner Norm gibt.

Die Erfüllbarkeit der Bedingung (4.18) bleibt offen, es sind aber leider ähnliche Probleme zu erwarten wie die, die in Abschnitt 5 auftreten.

Die weiter oben vorgestellte Konvergenzanalyse stellt dagegen keine Forderung an die Norm von $\theta \in Y$, sondern benötigt explizit die „sparsity“ von u^+ und zusätzlich die EBI-Eigenschaft des Operators K .

Allerdings sind auch die vorgestellten Konvergenzraten grundsätzlich verschieden. Wir zeigen die Rate $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ in der \mathfrak{L}_ω^1 -Norm, während die Analysis weiter oben die Rate $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ in der \mathfrak{L}_ω^2 - bzw. \mathfrak{L}^2 -Norm zeigt. Unsere Konvergenzraten sind insofern besser, dass sie in der richtigen Norm mit gleicher Quantität vorliegen. Natürlich implizieren unsere Konvergenzraten dort wegen der Forderung $\omega_n \geq \omega_0 > 0$ auch die gleichen Konvergenzraten in der \mathfrak{L}^1 -Norm.

⁸Da $\text{sign}(v^+)$ wieder eine Folge ist, muss die Bedingung $2K^*\theta = \text{sign}(v^+)$ so gelesen werden, dass $(2K^*\theta)_n = \text{sign}(v_n^+)$ falls $v_n^+ \neq 0$ gefordert wird, und $(2K^*\theta)_n$ sonst beliebig sein darf.

5 Entfaltungsprobleme

5.1 Problemstellung

Sei $Q := (0, l_x] \times (0, l_y]$. Wir betrachten das kontinuierliche Problem, eine multiperiodische, nicht-negative Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ zu rekonstruieren, welche genau Q als Periodenzelle hat. Dabei ist nur die Faltung

$$(h \star f)(x) := \int_Q h(x-y) f(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (5.1)$$

von f mit h bekannt, wobei h eine nicht-negative, Q -multiperiodische Funktion mit

$$\int_Q h(x) \, dx = 1$$

ist. Gelegentlich schreiben wir auch $h \star_Q f$ für die Faltung aus (5.1), um die Abhängigkeit von Q zu verdeutlichen.

Im Allgemeinen ist auch nicht die Funktion $h \star f$ bekannt, sondern nur Poisson-verteilte Messdaten g^{obs} mit Mittelwert $g := h \star f$. Das kann etwa durch folgendes Modell beschrieben werden: Sei δ_{x_k} der δ -Peak an der Stelle x_k . Dann ist

$$g^{\text{obs}} = \sum_{k=1}^K \delta_{x_k}$$

mit zufälligen $x_k \in Q$ und $K \in \mathbb{N}_0$, und es gilt für jede Borelmenge $B \subset Q$, dass

$$\int_B g^{\text{obs}}(x) \, dx \sim \text{Poi} \left(\int_B g(x) \, dx \right).$$

Dabei bedeutet die Notation $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, dass die Zufallsvariable X Poisson-verteilt mit Mittelwert (oder Parameter) λ ist.

Üblicherweise können auch nur lokal gemittelte Werte von g^{obs} gemessen werden. Darauf wird bei der Diskretisierung weiter eingegangen.

Wir können nun die Faltung $h \star f$ als Operator auf geeigneten Räumen betrachten. In Abhängigkeit von den gewünschten Eigenschaften der Rekonstruktion von f sollte der Definitionsraum dieses Operators als ein $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^p(Q)$ mit geeignetem p gewählt werden. Wir betrachten hier die Variante $p = 1$, womit bekanntlich eine gewisse „sparsity“ der Rekonstruktion erreicht werden kann. Als Wertebereich des Faltungsoperators wählen wir $\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$ und schreiben

$$T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q), \quad T(f) := f \star h \text{ für } f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q).$$

Natürlich ist dieser (lineare) Operator so nicht für jedes h wohldefiniert, wir nehmen daher an, dass $h \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$. Sinnvoll ist außerdem die Annahme, dass auch h multiperiodisch mit Periodenzelle Q ist. Jetzt wollen wir zunächst die Operatornorm von $T : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q) \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$ berechnen.

5.1 Lemma:

Es gilt

$$\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)} = \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}.$$

Beweis:

Man berechnet für $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q)$, dass

$$\begin{aligned}
\|h \star_Q f\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 &= \int_Q \left| \int_Q h(x-y) f(y) \, dy \right|^2 dx \\
&\leq \int_Q \left(\int_Q |h(x-y)| \sqrt{|f(y)|^2} \, dy \right)^2 dx \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \int_Q \int_Q |h(x-y)|^2 |f(y)| \, dy \int_Q |f(y)| \, dy dx \\
&\stackrel{(**)}{=} \int_Q \int_Q |h(x-y)|^2 \, dx |f(y)| \, dy \int_Q |f(y)| \, dy \\
&= \|f\|_{\mathbf{L}^1(Q)}^2 \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Dabei folgt (*) aus der Hölderschen Integralungleichung (1.1) mit $p = q = 2$ und (**) aus dem bekannten Satz von Fubini. Somit folgt

$$\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)} \leq \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}.$$

Nun verwenden wir eine Folge $\eta_{\frac{1}{k}}$ von periodisierten Mollifiern (ähnlich zu den für Satz 4.10 eingeführten) um zu zeigen, dass sogar Gleichheit gilt:

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)} &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| h \star_Q \eta_{\frac{1}{k}} \right\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\int_Q |h \star_Q \eta_{\frac{1}{k}}|^2 \, dx} \\
&= \sqrt{\int_Q \left| \lim_{k \rightarrow \infty} h \star_Q \eta_{\frac{1}{k}} \right|^2 \, dx} \\
&= \sqrt{\int_Q |h|^2 \, dx} \\
&= \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\int_Q \eta_{\frac{1}{k}} \, dx = 1$ und die gleichmäßige Konvergenz $h \star_Q \eta_{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h$ auf Kompakta benutzt. Es folgt die Behauptung. \square

Falls h sogar hinreichend oft stetig differenzierbar ist, so gilt $T(f) \in W^{k,2}(Q)$ für entsprechend großes $k \in \mathbb{N}$, und T ist sogar als Operator

$$T : \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q) \longrightarrow W^{k,2}(Q)$$

stetig, da gemäß Lemma 5.1

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow W^{k,2}(Q)} &= \sup_{f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q), \|f\|_{\mathbf{L}^1(Q)} \leq 1} \|h \star f\|_{W^{k,p}(Q)}^2 \\
&= \sup_{f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q), \|f\|_{\mathbf{L}^1(Q)} \leq 1} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha (h \star f)\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q), \|f\|_{\mathbf{L}^1(Q)} \leq 1} \|(D^\alpha h) \star f\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 \\
&= \|h\|_{W^{k,2}(Q)}^2 \tag{5.2}
\end{aligned}$$

gilt. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz bzw. dem Rellich-Kondrachov-Theorem (siehe [Ada75, Theorem 6.2]) ist die Einbettung $W^{k,2}(Q) \hookrightarrow \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(Q)$ für hinreichend großes k und somit auch $T : \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q) \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}(Q)$ kompakt. Das Problem

$$\text{Finde } f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(Q) \text{ mit } T(f) = g \tag{5.3}$$

ist also schlecht gestellt, falls h hinreichend oft differenzierbar ist.

Wir wollen hier noch kurz darauf verweisen, dass Entfaltungsprobleme der Form

$$\text{Finde } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty) \text{ mit } g = h \star_{\mathbb{R}^2} f$$

im \mathbb{R}^2 mit einem geeigneten normierten Faltungskern $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ typischerweise als nicht-periodisch gegeben sind. Falls allerdings der Träger von f in einem Rechteck $[-a, a] \times [-b, b]$ und der Träger von h in einem Rechteck $[-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$ liegt, so sieht man leicht ein, dass das Entfaltungsproblem im \mathbb{R}^2 äquivalent zu einem periodischen Entfaltungsproblem mit Periodenzelle

$$Q := [-a - \alpha, a + \alpha] \times [-b - \beta, b + \beta]$$

ist, denn für die Q -periodischen Fortsetzungen f^Q, h^Q von f und h gilt

$$(h^Q \star_Q f^Q)|_Q = (h \star_{\mathbb{R}^2} f)|_Q.$$

5.2 Diskretisierung des Problems

Zur Diskretisierung des Problems (5.3) ersetzen wir die kontinuierlichen Funktionen f, g, g^{obs} und h durch Werte an (äquidistant verteilten) Stützstellen, also hier Matrizen. Seien $(N_x, N_y) \in \mathbb{N}^2$ die Dimensionen von f, g, g^{obs} und h , d.h. seien

$$f, g, g^{\text{obs}}, h \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}.$$

Wir interpretieren diese Matrizen natürlich als multiperiodisch, d.h.

$$f_{j_x, j_y} = f_{j_x + p_x N_x, j_y + p_y N_y} \quad \text{für alle } p_x, p_y \in \mathbb{Z} \text{ und } (j_x, j_y) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}.$$

Entsprechend können die Indizes $j_x, j_y \in \mathbb{Z}$ betrachtet werden, obwohl es sich natürlich um endliche Matrizen handelt.

Die Normierung des Faltungskerns h nehmen wir ebenfalls diskret vor, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{j_x=1}^{N_x} \sum_{j_y=1}^{N_y} h_{j_x, j_y} = 1$$

und $h_{j_x, j_y} \geq 0$ für alle $(j_x, j_y) \in \mathbb{Z}^2$.

Die Diskretisierung des Operators T wird ebenfalls als periodische Faltung berechnet, wobei die diskrete Faltung als

$$(h \star f)_{k_x, k_y} := \sum_{j_x=1}^{N_x} \sum_{j_y=1}^{N_y} h_{k_x-j_x, k_y-j_y} f_{j_x, j_y}, \quad k_x, k_y \in \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Diese kann bekanntlich mittels FFT effizient berechnet werden. Auch hier bezeichnet $g := h \star f$ als Matrix. Jeder Eintrag $g_{j_x, j_y}^{\text{obs}}$ der Meßdaten ist dann die Realisation einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert (oder Parameter) g_{j_x, j_y} . Wie oben schon beschrieben ist es im Allgemeinen nur möglich, lokal gemittelte Werte von g^{obs} zu messen. Dies kann in unserem Modell durch

$$g_{j_x, j_y}^{\text{obs}} = \int_{(j_x-1)\Delta_x}^{j_x\Delta_x} \int_{(j_y-1)\Delta_y}^{j_y\Delta_y} g^{\text{obs}}(x, y) \, dx \, dy$$

für $\Delta_x := \frac{l_x}{N_x}$ und $\Delta_y := \frac{l_y}{N_y}$ dargestellt werden.

5.3 Numerische Ergebnisse

Zur Rekonstruktion von f aus g^{obs} wollen wir nun den Algorithmus aus Abschnitt 4.3 anwenden. Die folgenden numerischen Experimente wurden alle mit einer synthetischen Standardproblemstellung für Mikroskopie-Entfaltungsprobleme durchgeführt. Dabei wird ein zufälliges 160×160 -Pixel Bild mit 30 Punkten der folgenden Form als exakte Daten verwendet:

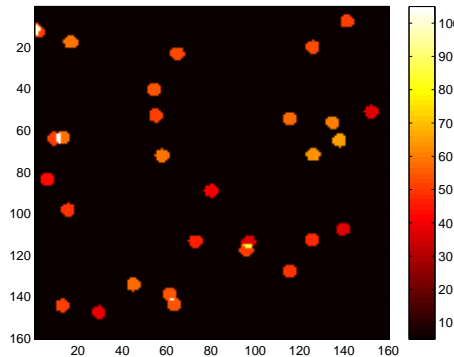


Abbildung 5.4 – Beispiel eines Testobjekts für die L^1 -Regularisierung: Es wird stets ein überwiegend schwarzes Bild mit 30 zufällig verteilten und zufällig intensiven Punkten erzeugt und als exakte Daten verwendet.

Dieses Bild wurde dann (diskret) mit dem einem normierten, symmetrischen Gauß-Kern gefaltet. Nach der Anpassung durch entsprechende Count-Raten wird das so genannte Hintergrundrauschen addiert. Zuletzt werden die Meßdaten g^{obs} als Realisation einer Poisson-Zufallsvariable mit den exakten Daten als Mittelwert (oder Parameter) festgesetzt. Neben der direkten Verwendung der übergebenen Poisson-Daten g^{obs} bietet sich noch die Möglichkeit, die exakten Daten g durch Bilden lokaler Mittelwerte von g^{obs} näherungsweise zurückzugewinnen. Dann wird der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 in unveränderter Form mit den Mittelwerten als Daten angewandt. Wir werden im Vergleich sehen, dass dies zu akzeptablen numerischen Ergebnissen führt.

Als Hintergrundrauschen verwenden wir hier stets den festen Wert 5.

Die Wahl des Regularisierungsparameters wurde jeweils nach einer Formel durchgeführt, die

visuell optimiert wurde. Insbesondere hängt sie vom maximalen Wert der übergebenen Daten ab:

$$\alpha = 10^{-3} \cdot \frac{9000}{(\max g^\delta)^2}. \quad (5.4)$$

Dabei bezeichnet $\max g^\delta$ den maximalen Eintrag der Matrix g^δ .

Die Wahl des Regularisierungsparameters α ist ein offenes Problem, welches hier nicht diskutiert werden soll. Die Formel (5.4) ist sicherlich alles andere als optimal, aber sie arbeitet für die folgenden Beispiele hinreichend gut.

Folgendes Bild zeigt zunächst, dass eine direkte Anwendung des Algorithmus aus Abschnitt 4.3 bei Poisson-Daten kein akzeptables Ergebnis liefert:

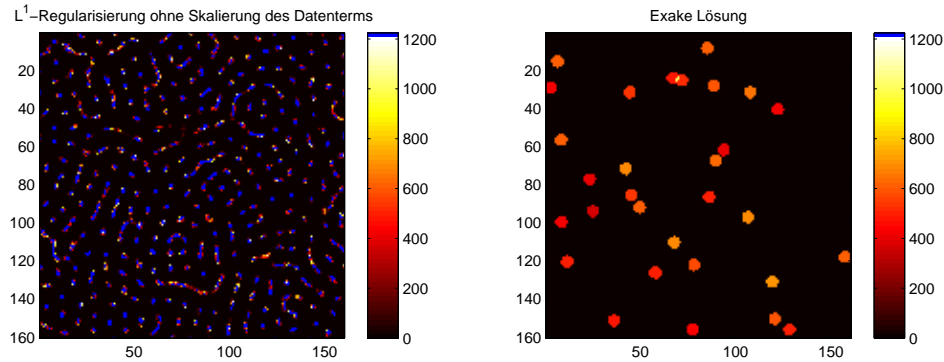


Abbildung 5.5 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 ohne Skalierung des Datenterms, angewandt auf Poisson-Daten mit einer Count-Rate von 1000

Da Erwartungswert und Varianz bei Poisson-verteilten Zufallsvariablen übereinstimmen, erhält man bei Gaußscher Approximation der Poisson-Verteilung über das Maximum-Likelihood-Funktional den Datenfehlerterm

$$\left\| \frac{T(f) - g^\delta}{g} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2.$$

Wir würden also gerne den Term

$$\left\| T'[x] h - T(x) - g^\delta \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad (5.5)$$

aus dem Algorithmus mit den Daten g skalieren, um somit an Punkten mit großer Count-Rate und entsprechend großer Varianz eine weniger genaue Datenanpassung zu erzwingen, aber die exakten Daten g sind unbekannt! Außerdem wäre dazu $g \neq 0$ fast überall notwendig. Daher wählen wir $c > 0$ so, dass $g^\delta + c > 0$ fast überall gilt und ersetzen (5.5) durch

$$\left\| \frac{T'[x] h - T(x) - g^\delta}{g^\delta + c} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \quad (5.6)$$

Da das Minimierungsproblem (4.2) äquivalent zu

$$\left\| \frac{T(f) - g^\delta}{\alpha} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p$$

ist, entspricht dieses Vorgehen im Falle konstanter Daten genau der Regularisierung (4.2) mit anderem α . Im Falle nicht-konstanter Daten g^{obs} erhalten wir so den Vorteil, dass α in gewissem Sinne lokal gewählt wird, nämlich in Abhängigkeit davon, ob die Daten g^{obs} in der Region

betragsmäßig groß oder klein sind.

Nun betrachten wir einen Vergleich des neuen Algorithmus mit der gewöhnlichen \mathbf{L}^2 -Tikhonov-Regularisierung mit Positivitäts-Annahmen, welche wir als *Constrained-Tikhonov* bezeichnen. In diesem Algorithmus wird das Tikhonov-Funktional mit ℓ^2 -Strafterm und Nicht-Negativitätsnebenbedingung mit einem Semismooth Newton-Verfahren gelöst. Die Wahl des Regularisierungsparameters α für diesen Algorithmus wurde ebenfalls nach einer Formel durchgeführt, nämlich

$$\alpha = 10^{-4} \cdot \frac{9000}{(\max g^\delta)^2}. \quad (5.7)$$

Die Abbildungen 5.10 bis 5.13 zeigen, dass diese Parameterwahl hinreichend gut ist.

Erste Ergebnisse stellen sich wie folgt dar:

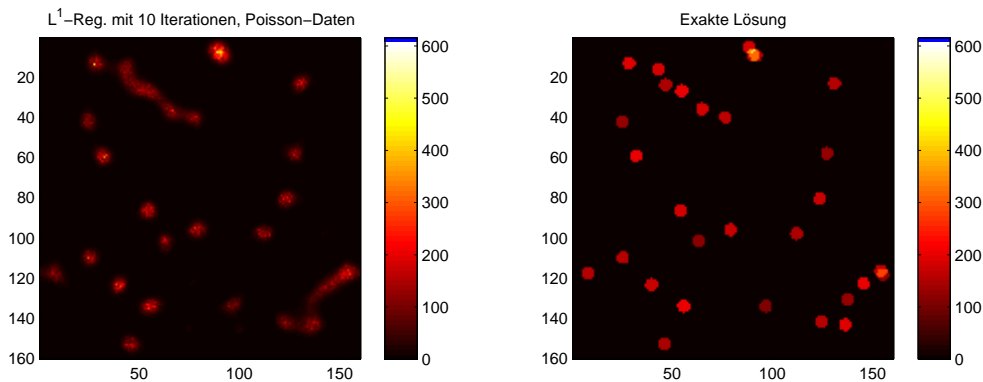


Abbildung 5.6 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf Poisson-Daten mit einer Count-Rate von 500. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der \mathbf{L}^1 -Norm beträgt 5.4054.

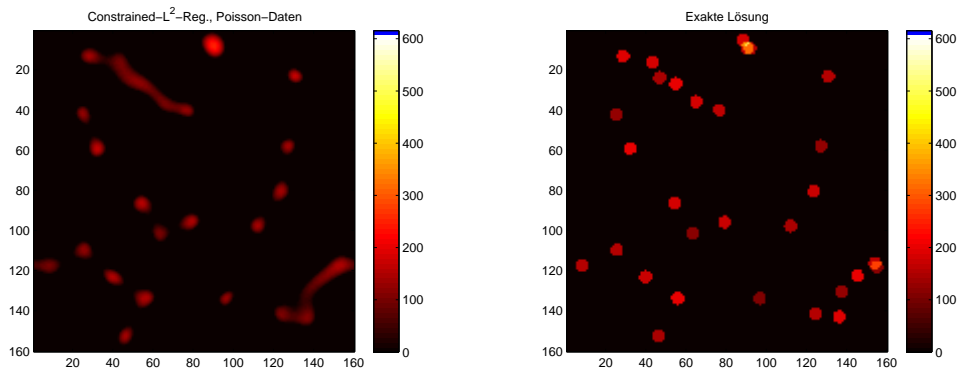


Abbildung 5.7 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten mit einer Count-Rate von 500. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der \mathbf{L}^1 -Norm beträgt 10.9496.

Wie zu erwarten verbessert eine Erhöhung der Count-Raten die Ergebnisse:

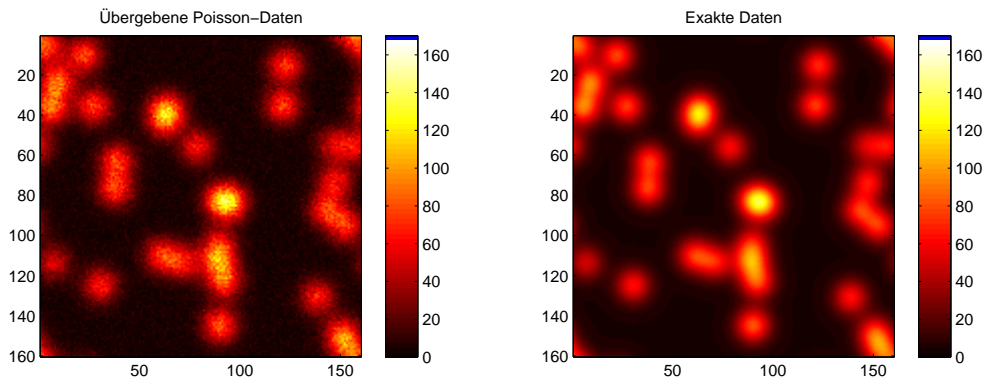


Abbildung 5.8 – Übergebene Daten für die Abbildungen 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 und 5.13.

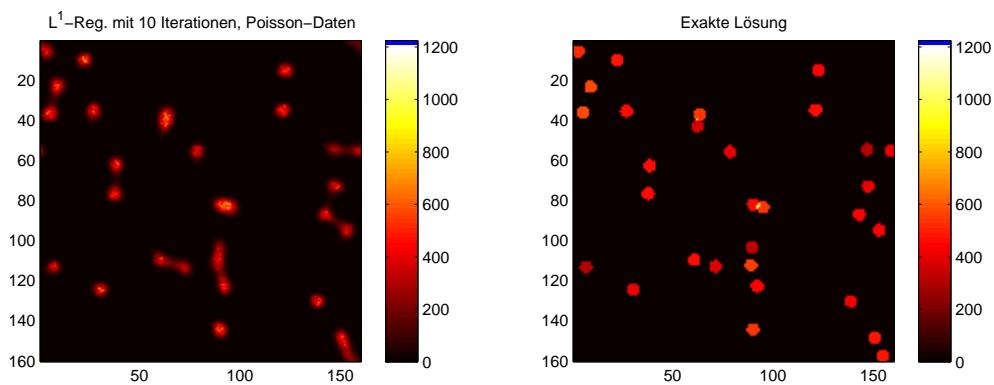


Abbildung 5.9 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.8) mit einer Count-Rate von 1000. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 12.7647.

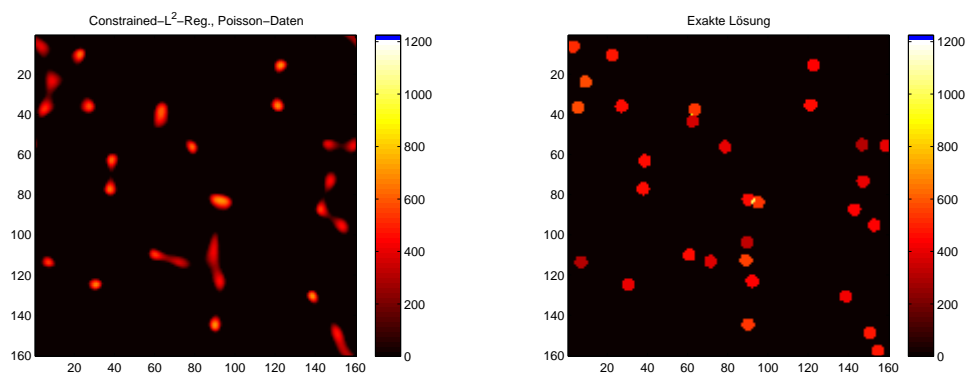


Abbildung 5.10 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.8) mit einer Count-Rate von 1000. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 31.6273.

Zum direkten Vergleich geben wir hier drei Beispiele der Constrained-Tikhonov-Regularisierung für verschiedene α . Für Abbildung 5.10 wurde gemäß der Formel (5.7) $\alpha = 0.00003651$ gewählt.

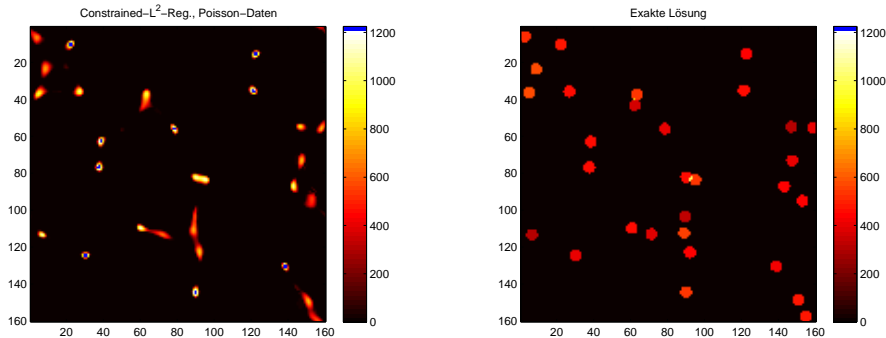


Abbildung 5.11 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.8) mit einer Count-Rate von 1000 und $\alpha = 0.000001$. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 31.7238. Im Vergleich mit Abbildung 5.10 sind hier die einzelnen Punkte zwar schärfer, dafür werden sie bereits singular, wie an der blauen Färbung zu erkennen ist.

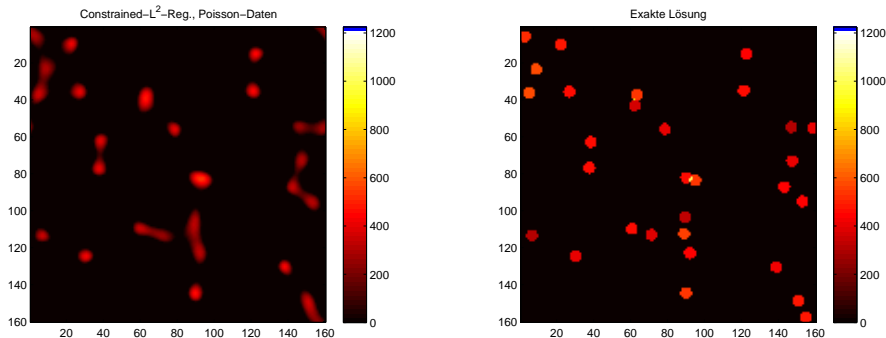


Abbildung 5.12 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.8) mit einer Count-Rate von 1000 und $\alpha = 0.00001$. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 31.5404. Hier ist kaum ein Unterschied zu Abbildung 5.11 festzustellen.

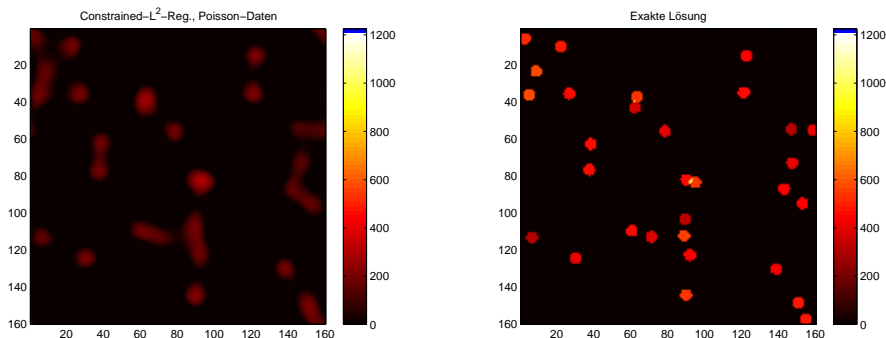


Abbildung 5.13 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.8) mit einer Count-Rate von 1000 und $\alpha = 0.0003$. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 30.9454. Dieses α ist offenbar zu groß, die Rekonstruktion wird zu glatt. Trotzdem ist der berechnete Fehler etwa gleich dem Fehler bei den Abbildungen 5.10 bis 5.12.

Eine weitere Erhöhung der Count-Raten verbessert die Ergebnisse weiter:

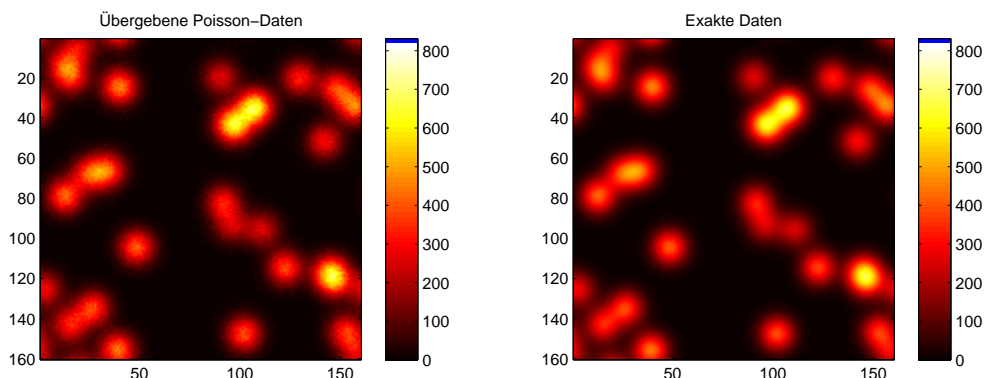


Abbildung 5.14 – Übergebene Daten für die Abbildungen 5.15 und 5.16.

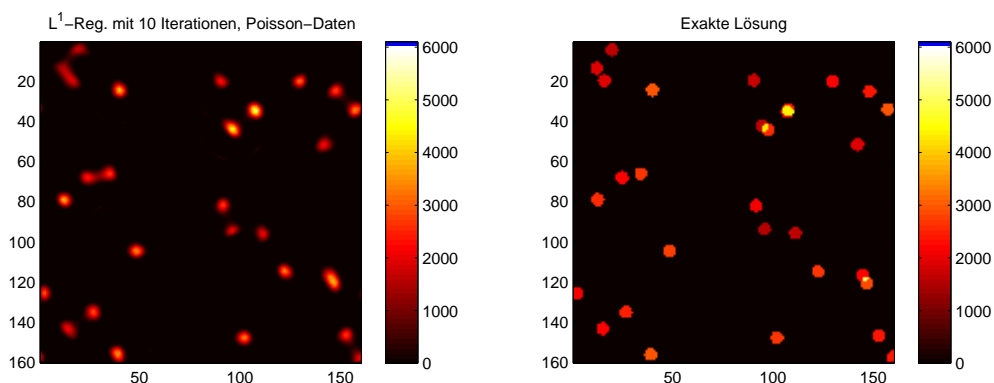


Abbildung 5.15 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.14) mit einer Count-Rate von 5000. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der \mathbf{L}^1 -Norm beträgt 50.1965.

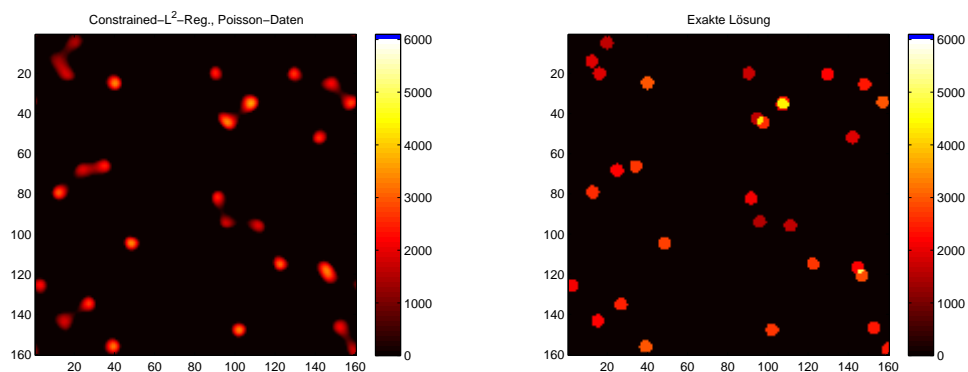


Abbildung 5.16 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf Poisson-Daten (Abbildung 5.14) mit einer Count-Rate von 5000. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der \mathbf{L}^1 -Norm beträgt 162.0353.

Ein direkter Vergleich der beiden Punkte unten rechts im Vergleich mit Abbildung 5.6 zeigt, dass der neue Algorithmus diese Punkte besser trennt.

Nun zeigen wir wie versprochen zwei Vergleiche zwischen der direkten Verwendung von Poisson-Daten und der Verwendung lokaler Mittelwerte:

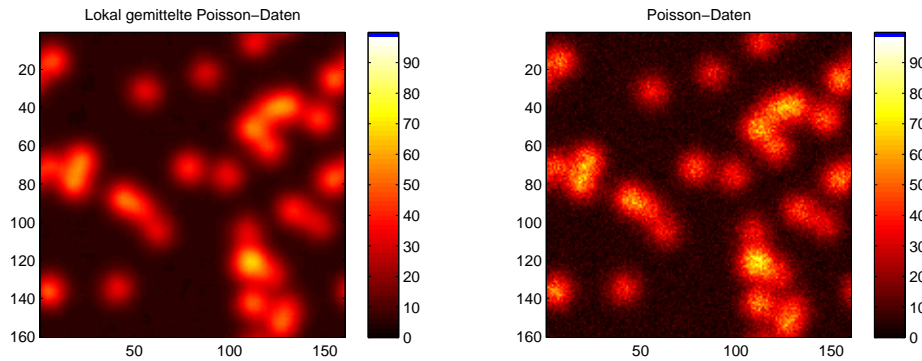


Abbildung 5.17 – Übergebene Daten für die Abbildungen 5.18 und 5.19.

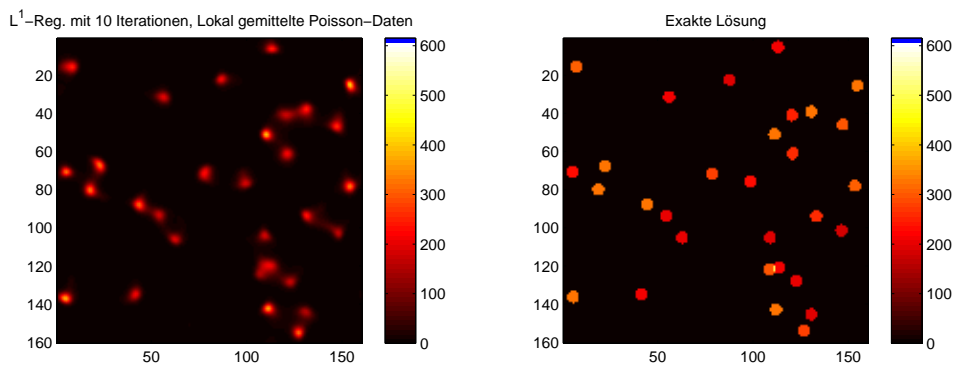


Abbildung 5.18 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf lokale Mittelwerte der Poisson-Daten aus Abbildung 5.17 mit einer Count-Rate von 500.

Offenbar ist das rekonstruierte Bild glatter als bei der direkten Variante, dafür werden hier auch naheliegende Punkte gut getrennt.

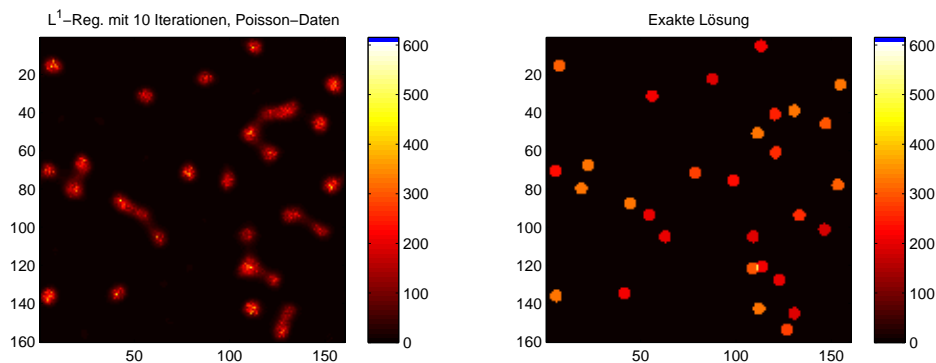


Abbildung 5.19 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf die Poisson-Daten aus Abbildung 5.17 mit einer Count-Rate von 500.

Im direkten Vergleich wird klar, dass hier naheliegende Punkte nicht ganz so gut getrennt werden wie in Abbildung 5.18.

Auch bei einer geringeren Count-Rate ist das so erzielte Ergebnis schon sehr gut:

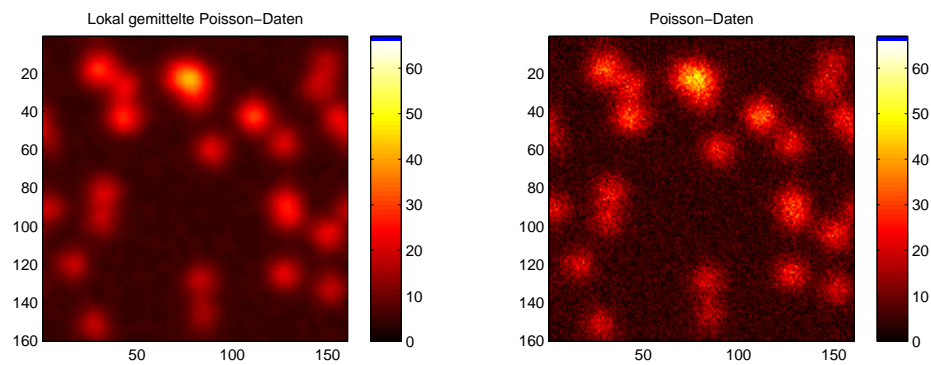


Abbildung 5.20 – Übergebene Daten für die Abbildungen 5.21 und 5.22.

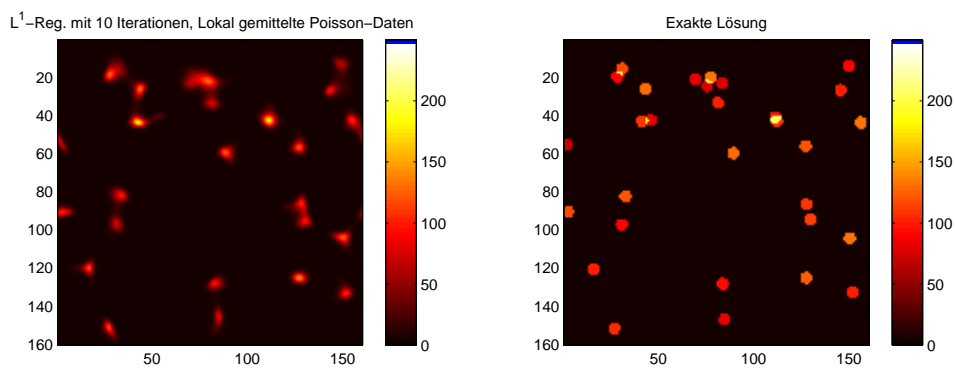


Abbildung 5.21 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt auf lokale Mittelwerte der Poisson-Daten aus Abbildung 5.20 mit einer Count-Rate von 200.

Hier werden ebenfalls naheliegende Punkte schon recht gut getrennt.

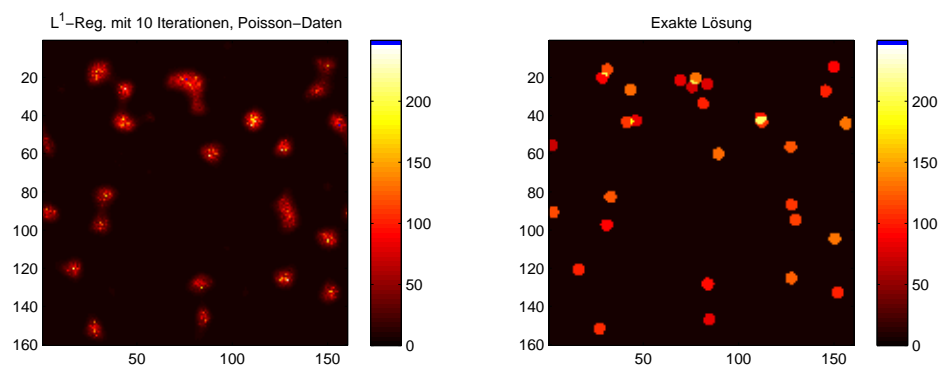


Abbildung 5.22 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ und Skalierung des Datenterms, angewandt die Poisson-Daten aus Abbildung 5.20 mit einer Count-Rate von 200.

Es erscheint also sinnvoll, bei Poisson-Daten mit den lokalen Mittelwerten zu rechnen.

Zuletzt wollen wir noch einen Vergleich mit exakten Daten präsentieren:

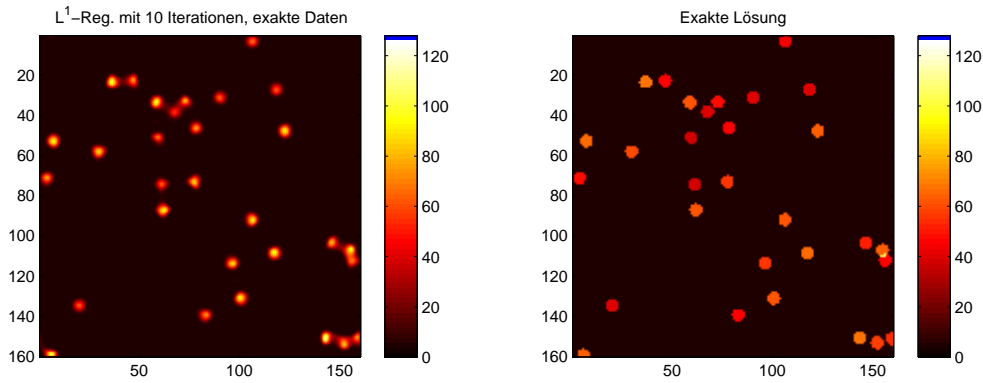


Abbildung 5.23 – Der Algorithmus aus Abschnitt 4.3 mit $p = 1$ ohne Skalierung des Datenterms, angewandt auf exakte Daten. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 0.8756.

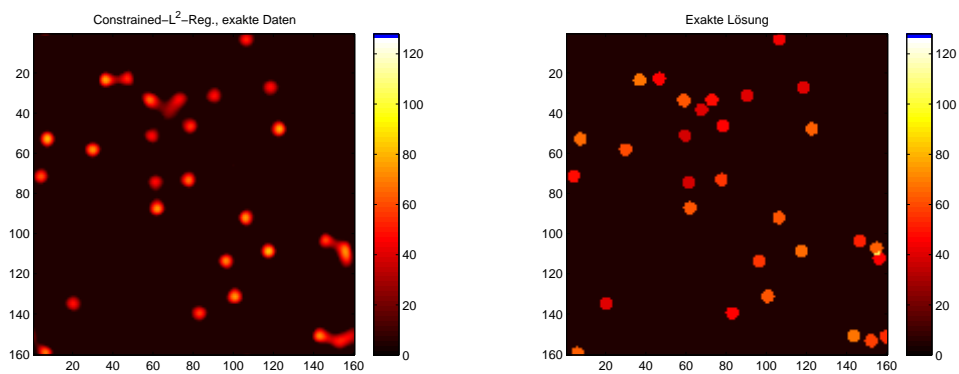


Abbildung 5.24 – Die Constrained-Tikhonov-Regularisierung angewandt auf exakte Daten. Der berechnete Rekonstruktionsfehler in der L^1 -Norm beträgt 3.4845.

5.4 Konvergenzanalyse

Wir werden nun zeigen, dass Satz 4.20 nicht anwendbar ist. Es sei zunächst erwähnt, dass Q zwar nicht als offen gewählt wurde, wir aber ohne Weiteres für die Konvergenzanalyse die offene Menge $Q \setminus \partial Q$ betrachten können. Der Rand spielt numerisch eine Rolle, um die Periodizität besser implementieren zu können.

Wie oben schon erwähnt nehmen wir $f \geq 0$ an. Daher macht es Sinn, als Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ von T die Menge

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q) \mid f \geq 0 \text{ fast überall}\}$$

zu betrachten. Wie in Lemma 4.13 schon gezeigt, ist diese Menge bezüglich der Sobolev-Topologie $\tau_{\mathfrak{s}}$ aus Definition 4.7 abgeschlossen.

Folgendes Lemma zeigt, dass die Stetigkeit von

$$T : (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q), \tau_{\mathfrak{s}}) \longrightarrow (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q), \tau_{\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(Q)}})$$

einer Glattheitsbedingung an h entspricht:

5.2 Lemma:

Ist h hinreichend oft stetig differenzierbar, so ist

$$T : (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q), \tau_{\mathfrak{s}}) \longrightarrow (\mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q), \tau_{\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(Q)}})$$

stetig.

Beweis:

Wir können T ebenso als

$$T : \mathcal{D}(T) \subset (W^{k,p}(Q))' \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$$

mit $\mathcal{D}(T) = \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q)$ und k, p der Topologie $\tau_{\mathfrak{s}}$ entsprechend betrachten. In dieser Form ist T wegen seiner Linearität genau dann stetig, wenn der adjungierte Operator

$$T^* : \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q) \longrightarrow W^{k,p}(Q)$$

stetig ist. Da T ein Faltungsoperator ist, ist dies der Fall, wenn h mindestens k -fach stetig differenzierbar ist, wie wir in der Rechnung (5.2) gesehen haben. \square

Wie in Bemerkung 4.33 schon festgestellt, degeneriert unsere Quellbedingung wegen der Linearität von T zu (4.11), d.h. ist $U = \{x \in Q \mid \varphi^\dagger(x) \neq 0\}$ bis auf Nullmengen, so lautet die Bedingung

$$\text{Es gibt ein } \omega \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q) \text{ s.d. } T^*\omega = \frac{1}{2} \text{ fast überall auf } U \text{ und } \|\omega\|_{\mathbf{L}^2(Q)} < \frac{1}{2\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)}}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass h symmetrisch ist, so gilt $T^*\varphi = T\varphi$ für alle $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^1(Q) \cap \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$ und wir stellen fest, dass diese Bedingung für $\varphi^\dagger \neq 0$ nicht erfüllbar: Ist $x \in U$ und $\omega \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}^2(Q)$ so, dass

$$\frac{1}{2} = (T^*\omega)(x) = (h \star \omega)(x) = \int_Q h(x-y)\omega(y) dy,$$

so folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\frac{1}{2} = \int_Q h(x-y) \omega(y) \, dy \leq \left(\int_Q |h(x-y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_Q |\omega(y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \cdot \|\omega\|_{\mathbf{L}^2(Q)}.$$

Da aber $\|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)} = \|h\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$ steht dies im Widerspruch zu

$$\|\omega\|_{\mathbf{L}^2(Q)} < \frac{1}{2 \|T\|_{\mathbf{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{L}^2(Q)}}.$$

Satz 4.20 ist also nicht anwendbar.

A Elementare Topologie

Dieser Anhang soll nicht nur elementare Grundbegriffe aus der Topologie einführen, die für die Lemmata aus Abschnitt 2.3 notwendig sind, sondern auch die Vielfalt der dortigen Lemmata rechtfertigen.

A.1 Grundlagen

Wir beginnen mit dem Begriff der Topologie und elementaren Eigenschaften topologischer Räume.

A.1 Definition:

Sei X eine beliebige Menge. Mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir die **Potenzmenge** von X oder anders gesagt die Menge aller Teilmengen von X :

$$\mathcal{P}(X) := \{Y \text{ Menge} \mid Y \subset X\}.$$

A.2 Definition:

Sei X eine Menge. Eine **Topologie** auf X ist ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ derart, dass

- (1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$,
- (2) $U, V \in \tau$, so auch $U \cap V \in \tau$ und
- (3) ist I eine beliebige Indexmenge und $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$ so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$

Das Paar (X, τ) nennen wir dann auch einen **topologischen Raum**.

Die Mengen $U \in \tau$ nennen wir **offen**, ihre Komplemente $X \setminus U$ **abgeschlossen**.

Sei (X, τ) stets ein topologischer Raum.

A.3 Definition:

Für $x \in X$ bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{U}_x := \{U \in \tau \mid x \in U\}$$

die **Menge aller offenen Umgebungen** von x .

Neben den topologischen Räumen selbst interessiert man sich vor allem für Abbildungen zwischen denselben:

A.4 Definition:

Seien (X, τ) und (Y, ν) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig** an $x \in X$, falls für alle $U \in \mathfrak{U}_{f(x)}$ gilt, dass $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}_x$. f heißt **stetig in X** , falls f an allen $x \in X$ stetig ist.

A.5 Bemerkung:

Äquivalent dazu ist die Forderung, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

A.6 Definition:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Wir sagen, diese Folge **konvergiert** gegen $x \in X$ und schreiben

$$x_n \xrightarrow[\tau]{n \rightarrow \infty} x,$$

falls für alle $U \in \mathfrak{U}_x$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Ist $U \subset X$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ eine Folge aus U , so nennen wir die Folge **konvergent in U** , falls es ein $x \in U$ gibt, s.d.

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

A.7 Definition:

Seien (X, τ) und (Y, ν) topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **folgenstetig** an $x \in X$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \xrightarrow[\tau]{n \rightarrow \infty} x$ gilt, dass

$$f(x_n) \xrightarrow[\nu]{n \rightarrow \infty} f(x).$$

f heißt folgenstetig in X , falls f an allen $x \in X$ folgenstetig ist.

A.8 Bemerkung:

Jede stetige Funktion ist folgenstetig.

Einer der wohl bedeutendsten topologischen Begriffe ist die Kompaktheit:

A.9 Definition:

Sei $M \subset X$ eine Teilmenge. Eine **offene Überdeckung** von M ist ein System $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ offener Mengen mit einer beliebigen Indexmenge I , s.d.

$$M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

gilt. Eine **Teilüberdeckung** ist entsprechend $\{U_i\}_{i \in J}$ für $J \subset I$ mit

$$M \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

A.10 Definition:

Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

A.11 Bemerkung:

Es ist bekannt, dass für eine stetige Funktion $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume X und Y das Bild $f(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset X$ unter f in Y wieder kompakt ist.

Man interessiert sich nun vor allem für Eigenschaften kompakter Mengen.

A.12 Definition:

Wir nennen (X, τ) einen **Hausdorffraum**, falls es für alle Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Mengen $U \in \mathfrak{A}_x$ und $V \in \mathfrak{A}_y$ gibt, s.d.

$$U \cap V = \emptyset$$

gilt.

A.13 Definition:

Wir sagen, der Raum (X, τ) erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls es für jeden Punkt $x \in X$ ein abzählbares System

$$\{U_1^x, U_2^x, \dots\}$$

von offenen Mengen gibt, s.d.

$$\text{für alle } U \in \mathfrak{A}_x \text{ gibt es ein } i \in \mathbb{N} \text{ mit } U_i^x \subseteq U. \quad (\text{A.1})$$

Ein System $\{U_i\}_{i \in I}$ von Mengen mit der Eigenschaft (A.1) wird auch **Umgebungsbasis** für x genannt. Das erste Abzählbarkeitsaxiom bedeutet also, dass jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. In diesem Fall sprechen wir auch von einem **A1-Raum**.

A.14 Beispiel:

Die triviale Topologie $\tau = \{\emptyset, X\}$ macht aus jeder Menge X einen A1-Raum.

Jeder metrische Raum (X, d) ist mit der von der Metrik d erzeugten Topologie ein A1-Raum: Als Umgebungsbasis zu $x \in X$ wähle einfach $U_n = \{y \in X \mid d(x, y) < \frac{1}{n}\}$.

A.15 Bemerkung:

Sind X und Y A1-Räume, so ist jede folgenstetige Funktion $f : X \longrightarrow Y$ auch stetig.

A.16 Definition:

Sei $M \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von M , falls für alle $U \in \mathfrak{U}_x$ gilt, dass

$$U \cap M \neq \emptyset$$

ist.

A.17 Bemerkung:

Eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen, falls alle Berührungspunkte von A in A enthalten sind.

Den **Abschluss** \overline{M} einer beliebigen Menge $M \subset X$ kann man definieren als M vereinigt mit allen Berührungspunkten von M .

Außerdem unterscheiden wir die folgenden anderen Formen von Kompaktheit:

A.18 Definition:

Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **relativ kompakt**, falls \overline{K} kompakt ist.

A.19 Definition:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** dieser Folge, falls für alle $U \in \mathfrak{U}_x$

$$|\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}| = \infty$$

ist. Dabei bezeichnet $|M|$ für eine Menge M die Anzahl der Elemente dieser Menge.

A.20 Definition:

Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

A.21 Definition:

Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **relativ folgenkompakt**, falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ aus K eine im Abschluss von K konvergente Teilfolge besitzt.

A.22 Definition:

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und ν eine weitere Topologie auf X . Wir nennen ν **größer** als τ (und entsprechend τ **feiner** als ν), falls $\nu \subseteq \tau$ gilt.

Die folgende Ergebnisse sind Standard:

A.23 Satz:

Sei (X, τ) ein Hausdorffraum und $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

A.24 Satz:

Sei (X, τ) ein A1-Raum. Sei außerdem x ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k} \xrightarrow[\tau]{k \rightarrow \infty} x.$$

A.25 Satz:

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine Folge, so hat diese Folge einen Häufungspunkt in K .

A.26 Bemerkung:

In einem A1-Raum gilt also, dass Kompaktheit Folgenkompaktheit impliziert. Ist X kein A1-Raum, so ist dies i.A. falsch, wie wir in Beispiel A.30 sehen werden. Dies rechtfertigt die Unterscheidung zwischen Lemma 2.14 und Lemma 2.17. Da eine Normtopologie stets das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, bleibt zu zeigen, dass sich das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht auf gröbere (oder feinere) Topologien überträgt:

A.27 Beispiel:

Sei X eine Menge. Definiere die so genannte **koendliche** Topologie τ_{ke} auf X durch

$$\tau_{ke} := \{U \subset X \mid U = \emptyset \text{ oder } X \setminus U \text{ ist endlich}\}.$$

Ist X endlich, so ist τ_{ke} offenbar die diskrete Topologie.

A.28 Lemma:

Sei X eine überabzählbare Menge. Dann erfüllt (X, τ_{ke}) das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Der Beweis dafür ist [SS95, Example 18, P. 49] entnommen.

Beweis:

Angenommen es gibt einen Punkt $x \in X$ mit abzählbarer Umgebungsbasis $\{B_1, B_2, \dots\}$. Offenbar ist dann

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\},$$

denn jede Menge $X \setminus \{y\}$ für $y \neq x$ ist offen in (X, τ_{ke}) , und es muss entsprechend ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \notin B_n$ geben.

Somit folgt

$$X \setminus \{x\} = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus B_n).$$

Jede der Mengen $X \setminus B_n$ ist endlich, da $B_n \in \tau_{ke}$, außerdem ist die abzählbare Vereinigung endlich vieler Mengen abzählbar. Dies ist ein Widerspruch zur Überabzählbarkeit von X . \square

A.29 Satz:

Sei (X, τ) ein A1-Raum und sei ν eine gröbere Topologie und λ eine feinere Topologie auf X . Dann ist weder (X, ν) noch (X, λ) zwingend ein A1-Raum.

Beweis:

Wir geben zwei Gegenbeispiele.

- (1) Sei $X = \mathbb{R}$ und τ die gewöhnliche Topologie auf \mathbb{R} , d.h. die durch die Metrik $d(x, y) = |x - y|$ erzeugte. Sei außerdem $\nu = \tau_{ke}$. Da \mathbb{R} überabzählbar ist folgt nach obigem Lemma, dass ν das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt. Offenbar ist $\nu \subset \tau$, da \mathbb{R} ohne endlich

viele Punkte stets offen in \mathbb{R} mit der kanonischen Topologie ist.

Dies zeigt, dass (X, ν) nicht zwingend ein A1-Raum sein muss.

- (2) Sei wieder $X = \mathbb{R}$ und diesmal $\lambda = \tau_{ke}$ die koendliche Topologie aus dem ersten Gegenbeispiel. Sei außerdem $\tau = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie.

Dies zeigt, dass (X, λ) nicht zwingend ein A1-Raum sein muss.

Das zeigt die Behauptung. □

Um die verschiedenen Lemmata aus Abschnitt 2.3 zu rechtfertigen, wollen wir nun zeigen, dass die Voraussetzung des ersten Abzählbarkeitsaxioms nicht weggelassen werden kann, damit Kompaktheit auch Folgenkompaktheit impliziert:

A.30 Beispiel:

Folgendes Beispiel findet sich in [Wer05, Seite 410]: Betrachte

$$X = \ell^\infty = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$$

mit der Norm $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

Definiere auf $(\ell^\infty)'$ die schwach-* -Topologie $\tau = \tau_*$ (d.h. die Topologie der punktweisen Konvergenz). Diese ist natürlich gröber als die Normtopologie, denn bezeichnet

$$\|\lambda\|_{(\ell^\infty)'} := \sup_{x \in \ell^\infty, \|x\|_{\ell^\infty} \leq 1} |\lambda(x)|, \quad \lambda \in (\ell^\infty)'$$

die Operatornorm, so sieht man dies aus

$$\begin{aligned} & (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\ell^\infty)', \lambda \in (\ell^\infty)', \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \\ \Leftrightarrow & \|\lambda_n - \lambda\|_{(\ell^\infty)'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Leftrightarrow & \sup_{x \in \ell^\infty, \|x\|_{\ell^\infty} \leq 1} |\lambda_n(x) - \lambda(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow & \lambda_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(x) \text{ für alle } x \in \ell^\infty \\ \Leftrightarrow & \lambda_n \xrightarrow[\tau_*]{n \rightarrow \infty} \lambda. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu (etwa [Wer05, Korollar VIII.3.12]) ist die Einheitskugel

$$B := \left\{ \lambda \in (\ell^\infty)' \mid \|\lambda\|_{(\ell^\infty)'} \leq 1 \right\}$$

τ_* -kompakt. Wir wollen nun zeigen, dass sie nicht folgenkompakt ist.

Definiere die Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionalen auf ℓ^∞ durch

$$\lambda_n((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) := a_n.$$

Dann ist $\lambda_n \in (\ell^\infty)'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\|\lambda_n\|_{(\ell^\infty)'} \leq 1,$$

also sogar $\lambda_n \in B$ für $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen es gibt eine τ_* -konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Dann gibt es ein $\lambda \in (\mathcal{I}^\infty)'$ mit

$$\lambda_{n_k}(x) \xrightarrow[\tau_{\mathbb{R}}]{k \rightarrow \infty} \lambda(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{I}^\infty.$$

Wähle

$$x := (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = n_k \text{ mit } k \text{ gerade,} \\ -1 & \text{falls } n = n_k \text{ mit } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\lambda_{n_k}(x) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$ - und diese Folge konvergiert nicht in \mathbb{R} . Widerspruch!

Um diesen Unterschied zwischen Kompaktheit und Folgenkompaktheit zu umgehen, müssen wir unseren Begriff einer Folge erweitern.

A.2 Netze

Wir führen dazu den Begriff des Netzes ein, welcher es ermöglicht, Topologien vollständig zu beschreiben.

A.31 Definition:

Wir nennen eine Menge I mit einer Relation \leq , welche

- reflexiv ist und
- transitiv ist und
- die Bedingung

$$\forall i_1, i_2 \in I \exists i_3 \in I \text{ s.d. } i_1 \leq i_3 \text{ und } i_2 \leq i_3$$

erfüllt,

eine **gerichtete Menge**.

A.32 Definition:

Sei (I, \leq) eine gerichtete Menge und $I \neq \emptyset$. Eine Abbildung $x : I \longrightarrow X$ heißt **Netz** in X . Wir schreiben kurz

$$x = (x_i)_{i \in I}.$$

A.33 Definition:

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir sagen, ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X **konvergiert** gegen $x \in X$, falls

$$\forall U \in \mathfrak{U}_x \exists i_U \in I \text{ s.d. } x_i \in U \text{ für alle } i \geq i_U$$

und schreiben in diesem Fall

$$x_i \xrightarrow[\tau]{} x \text{ oder } x = \lim_{i \in I} x_i.$$

A.34 Definition:

Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in \mathbb{R} . Dann definieren wir:

$$\liminf_{i \in I} x_i := \liminf_{j \in I, i \geq j} x_j$$

$$\limsup_{i \in I} x_i := \limsup_{j \in I, i \geq j} x_j.$$

A.35 Bemerkung:

Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in \mathbb{R} konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $j \in I$ derart existiert, dass für alle $i \geq j$ die Relation $|x_i - x| < \varepsilon$ gilt.

Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in \mathbb{R} konvergiert genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn

$$x = \liminf_{i \in I} x_i = \limsup_{i \in I} x_i$$

gilt.

A.36 Satz:

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Für $x \in X$ sind äquivalent:

(1) f ist stetig an x .

(2) Für jedes gegen x konvergente Netz $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert das Netz $(f(x_i))_{i \in I}$ gegen $f(x)$.

Für den Beweis verweisen wir etwa auf [Que73, Satz 5.10 (b)].

A.37 Definition:

Seien (I, \leq) und (J, \leq) gerichtete Mengen, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz und $\eta : J \longrightarrow I$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $i_0 \in I$ ein $j_0 \in J$ existiert, s.d. für alle $j \geq j_0$ auch $\eta(j) \geq i_0$ gilt. Dann heißt $(x_{\eta(j)})_{j \in J}$ **Teilnetz** des Netzes $(x_i)_{i \in I}$.

A.38 Bemerkung:

Konvergiert ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ gegen $x \in X$, so offenbar auch jedes Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$.

Für ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ charakterisiert $\limsup_{i \in I} x_i = x$ den „größten“ Grenzwert eines Teilnetzes von $(x_i)_{i \in I}$. Analog für \liminf .

A.39 Satz:

Eine Menge $Y \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jedes konvergente Netz $(x_i)_{i \in I} \subset Y$ mit Grenzwert $x \in X$ auch $x \in Y$ gilt.

Für den Beweis verweisen wir auf [Kel55, Chapter 2, Theorem 2].

A.40 Satz:

Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz ein in X konvergentes Teilnetz besitzt.

Für den Beweis verweisen wir auf [Kel55, Chapter 5, Theorem 2].

Insbesondere muss also nicht zwischen Kompaktheit und „Netzkompaktheit“ unterschieden werden, im Gegensatz zu den entsprechenden Begriffen bei Folgen.

A.41 Satz:

Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn jedes Netz höchstens einen Grenzwert besitzt.

Für den Beweis verweisen wir auf [Kel55, Chapter 2, Theorem 3].

A.3 Unterhalbstetige Funktionen

Zuletzt wollen wir noch den Begriff der Unterhalbstetigkeit von Funktionen einführen. Außerdem halten wir einige Eigenschaften fest, die für den Beweis der Lemmata aus Abschnitt 2.3 benötigt werden.

A.42 Definition:

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **unterhalbstetig**, falls für alle konvergenten Netze $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \xrightarrow{\tau} x \in X$ gilt, dass

$$\liminf_{i \in I} f(x_i) \geq f(x).$$

A.43 Bemerkung:

Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion auf dem topologischen Raum (X, τ) , so gilt natürlich für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow[\tau]{n \rightarrow \infty} x$, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Das folgt einfach daraus, dass (\mathbb{N}, \leq) eine gerichtete Menge ist und Folgen somit spezielle Netze sind.

Das folgende Ergebnis ist klassisch:

A.44 Lemma:

Für eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(1) f ist unterhalbstetig.

(2) Die Mengen $\{x \in X \mid f(x) \leq M\}$ mit $M \in \mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

Dieses Resultat wird etwa bei [Phe93, Definition 3.1ff] oder bei [AE84, Seite 11, Proposition 3] ohne Beweis erwähnt.

A.45 Lemma:

Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion und $K \subset X$ kompakt. Dann gibt es ein $x_0 \in K$ s.d.

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x) > -\infty.$$

Beweis:

Definiere durch

$$\tau_{<} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

eine Topologie auf \mathbb{R} . Nach Lemma A.44 sind die Mengen

$$\{x \in X \mid f(x) \leq M\} = f^{-1}((-\infty, M])$$

für alle $M \in \mathbb{R}$ abgeschlossen in X , d.h.

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{<})$$

ist stetig. Entsprechend ist $f(K)$ kompakt in $(\mathbb{R}, \tau_{<})$. Sei nun $I := \inf_{x \in K} f(x)$.

Wäre $I = -\infty$, so konstruiere durch

$$U_n := (-n, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

eine in $(\mathbb{R}, \tau_{<})$ offene Überdeckung von $f(K)$, die offenbar keine endliche Teilüberdeckung besitzen kann - Widerspruch!

Also ist $I > -\infty$. Nehmen wir nun an, es gibt kein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = I$, so sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus K mit $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ in \mathbb{R} . Dann ist

$$U_n := (f(x_n), \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

eine in $(\mathbb{R}, \tau_{<})$ offene Überdeckung von $f(K)$, die offenbar keine endliche Teilüberdeckung besitzen kann - Widerspruch! □

Literatur

- [Ada75] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975
- [AE84] AUBIN, J.-P. ; EKELAND, I.: *Applied Nonlinear Analysis*. John Wiley & Sons Inc, 1984
- [Alt99] ALT, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1999
- [AV94] ACAR, R. ; VOGEL, C. R.: Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. In: *Inverse Problems* 10 (1994), S. 1217–1229
- [BO04] BURGER, M. ; OSHER, S.: Convergence Rates of convex variational regularization. In: *Inverse Problems* 20 (2004), S. 1411–1421
- [CH62] COURANT, R. ; HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics II*. Wiley-Interscience, 1962
- [DDD04] DAUBECHIES, I. ; DEFRISE, M. ; DEMOL, C.: An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. In: *Commun. Pure Appl. Math.* 57 (2004), Nr. 11, S. 1413–1457
- [EHN96] ENGL, H. ; HANKE, M. ; NEUBAUER, A.: *Regularization of Inverse Problems*. Springer, 1996
- [Eva98] EVANS, L. C.: *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998
- [GHS08] GRASMAIR, M. ; HALTMEIER, M. ; SCHERZER, O.: Sparse Regularization with l^q Penalty Term. In: *Photoacoustic Imaging in Medicine and Biology* (2008)
- [Had52] HADAMARD, J. S.: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover, 1952
- [Hoh02] HOHAGE, T.: *Lecture notes on Inverse Problems*. 2002. – University of Göttingen
- [Kel55] KELLEY, J. L.: *General Topology*. Van Nost. Reinhold, 1955
- [Lor08] LORENZ, D. A.: *Convergence rates and source conditions for Tikhonov regularization with sparsity constraints*. 2008. – Submitted for publication
- [LPR07] LU, S. ; PEREVERZEV, S. V. ; RAMLAU, R.: An analysis of Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption. In: *Inverse Problems* 23 (2007), S. 217–230
- [Phe93] PHELPS, R. R.: *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. Springer, 1993
- [Que73] QUERENBURG, B. von: *Mengentheoretische Topologie*. Springer, 1973
- [Res05] RESMERITA, E.: Regularization of ill-posed problems in Banach spaces: convergence rates. In: *Inverse Problems* 21 (2005), S. 1303–1314
- [Rie03] RIEDER, A.: *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Vieweg, 2003
- [Rud99] RUDIN, W.: *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg, 1999
- [SS95] STEEN, L. A. ; SEEBACH, J. A.: *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, 1995
- [SV89] SEIDMAN, T. I. ; VOGEL, C. R.: Well posedness and convergence of some regularisation methods for non-linear ill posed problems. In: *Inverse Problems* 5 (1989), S. 227–238

-
- [TA79] TIKHONOV, A. N. ; ARSENIN, V. Y.: *Solutions of Ill-Posed Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979
- [Tik63] TIKHONOV, A. N.: On the solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. In: *Soviet Math. Doklady* 4 (1963), S. 1035–1038. – English translation
- [Wer05] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 2005