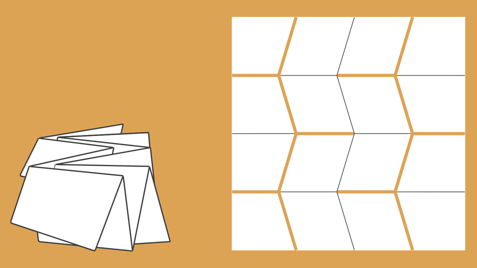
Mathematisches Papierfalten: Flachfaltbarkeit im Unterricht

Wir schlagen eine dreistündige Beschäftigung mit der Flachfaltbarkeit, einem Teilgebiet des mathematischen Papierfaltens, als eine wunderbare Hands-on-Aktivität für die gymnasiale Oberstufe u. Ä. vor, mit der auf eine natürliche und unterhaltsame Art Schülerinnen und Schüler über selbst erarbeitete Modelle und Vermutungen zu mathematischen Entdeckungen gelangen, die sie formalisieren und begründen.

Motivieren

Nur selten kommen Lernende in den Genuss, eine mathematische Theorie selbstständig zu entdecken und zu entwickeln.

Nehmen Sie eine beliebige Faltung aus Papier zur Hand, zum Beispiel einen Kranich oder einen Stadtplan von Würzburg (siehe rechts). Vielleicht ist dieses Objekt ein flaches und kann in ein Buch gelegt werden, ohne dass neue Falze oder Knicke entstehen. Wenn Sie es nun entfalten und betrachten, kommen Sie vielleicht auf eine sehr natürliche Fragestellung: Wie sehen eigentlich Faltmuster von flachen Objekten aus? Und wie unterscheiden sie sich von solchen, die nicht flach sind?



Die sog. Miura-Faltung

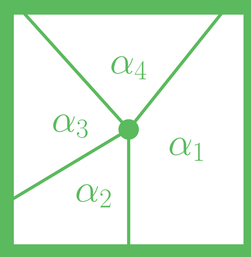
Diese Fragestellung ist interessanter und schwerer als es zuerst erscheint. Können Sie eine Aussage über diese »Flachfaltbarkeit« eines beliebigen von Ihnen gezeichneten Faltmusters machen? Wie lassen sich diese Fragen im Unterricht gewinnbringend thematisieren?

Und wann wird das jetzt flach?

Im Folgenden zeigen wir exemplarisch auf, wie Schülerinnen und Schüler solche Fragen angehen können. Unser Ziel ist, sinnvolle Aussagen über die Faltbarkeitseigenschaften eines Faltmusters zu machen. Statt Resultate lediglich anzugeben, bitten wir Sie und die Klasse mehrere Beispiele zu falten und dadurch ein Gefühl dafür zu entwickeln, was sich flachfalten lässt und was nicht. Nehmen Sie dazu ein Stück Papier und zeichnen Sie ein Faltmuster darauf; versuchen Sie das Papier nur an diesen Strecken zu falten. Was beobachten Sie? Nach einigem Ausprobieren merken Sie, dass die Frage vielleicht noch zu schwer ist. Dann stellen wir Ihnen leichtere Fragen.

Entdecken

Markieren Sie einen Punkt auf einem Zettel und ziehen Sie von ihm Strecken zum Rand. Können Sie irgendwelche Aussagen über das Faltungsverhalten Ihrer Faltmuster machen? Nach einigem Ausprobieren werden Sie ähnlich wie unsere Schülerinnen und Schüler folgende Beobachtungen machen:



Chris Wenn ich drei Falze habe, dann wirds nicht flach.
Simon Bei acht Falzen habe ich 3 Berge und 5 Täler.
Ilias Die gegenüberliegenden Winkel müssen 180 Grad sein.

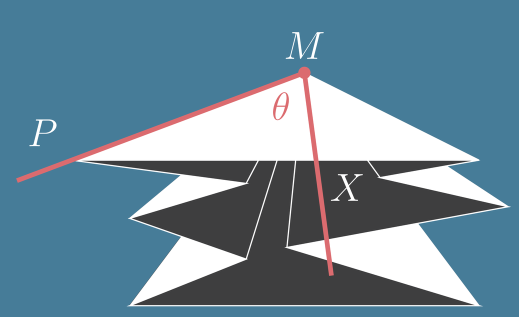
Die Winkel müssen sich abwechseln, in der Summe Null sein.

Dabei stört es uns ausdrücklich nicht, dass diese Aussagen noch nicht sehr präzise sind – der Bedarf nach einer präziseren Formulierung muss erst entstehen, präzisere Formulierungen werden durch weitere Beispiele und Gegenbeispiele gefunden. Betrachten Sie nun die gesammelten Entdeckungen. Interessanterweise scheinen sie wenig miteinander zu tun zu haben: Das ist vielleicht ein Indiz darauf, dass die Flachfaltbarkeit von mehreren Parametern abhängt. Wir ermutigen Sie und die Klasse, die gemachten Aussagen zu überprüfen, vielleicht so weit zu systematisieren, dass Vermutungen entstehen, die man nun mathematisch angehen und sogar beweisen kann. Durch die Diskussion mehrerer Beispiele reduzieren sich die Beobachtungen auf folgende Vermutungen:

Ali Es ist flachfaltbar ⇔ Die Anzahl der Falze ist gerade.
Johanna Die Differenz der Berge und Täler muss genau zwei sein.
Leon Die Winkel müssen sich abwechseln, in der Summe Null sein.

Begründen

Es fällt schnell auf, dass die Rückrichtung der Behauptung von Ali durch ein beinahe zufällig gefundenes Beispiel mit vier Falzen widerlegt werden kann. Dagegen finden wir für Johannas Aussage weiterhin kein Gegenbeispiel. Ali fällt auf, dass wenn Johannas Aussage zutrifft, auch die Anzahl der Falze gerade ist (sehen Sie warum?). Nach einigen Diskussionen finden Schülerinnen und Schüler ein Argument für die Behauptung von Leon (die Aussage von Johanna folgt analog): Sie läuft häufig so ab (siehe Bild oben):



Läuft X auf dem Rand des Querschnitts, so beschreibt $\theta = \measuredangle PMX$ die Auslenkung des Punktes X von P bezüglich M im Bogenmaß.

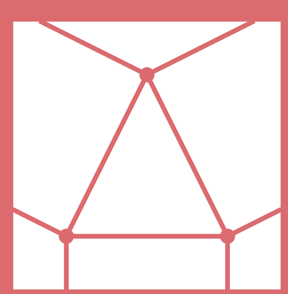
Leon Wenn ich das Papier flachfalte, die Spitze abschneide und den Querschnitt der Spitze anschaue, dann, äh, wie sage ich das?
Chris Wo sind denn diese α-Winkel?
Johanna Ist das nicht so, dass je größer die Winkel zwischen den Faltlinien sind, desto größer ist die Strecke des Querschnitts?
Leon Wenn ich einmal auf dem Querschnitt herumlaufe, bin ich wieder am Anfang!

Querschnitt der Spitze anschauen!

Und tatsächlich! Die Winkel α_1 bis α_{2n} zwischen den Faltlinien ergeben beim Ablaufen des Querschnitts die alternierende Summe $\alpha_1 - \alpha_2 + \ldots - \alpha_{2n}$ und da die Auslenkung θ am Ende gleich Null ist, ist auch diese alternierende Summe Null. Damit haben wir die Flachfaltbarkeit bzgl. **eines** Punktes charakterisiert! Jetzt wollen wir unser Wissen anwenden und den allgemeinen Fall studieren.

Anwenden

Schülerinnen und Schüler vermuten schnell, dass für die Flachfaltbarkeit eines allgemeinen Faltmusters die Gültigkeit der entdeckten Gleichung $\alpha_1 - \alpha_2 + \ldots - \alpha_{2n} = 0$ um jeden Punkt herum nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist. Doch das Bild rechts zeigt bereits, dass das nicht stimmt! In der Tat ist die Situation viel dramatischer: Die Entscheidung der Flachfaltbarkeit eines allgemeinen Faltmusters ist NP-vollständig, das heißt wir können kein leicht zu überprüfendes Kriterium erwarten. An dieser Stelle erfahren Schülerinnen und Schüler, dass die Erforschung der Flachfaltbarkeit sehr aktuell und noch nicht abgeschlossen ist. Trotzdem gibt es einige nützliche Anwendungen und Verbindungen zu anderen Themengebieten der Mathematik, die für einen Abschluss unserer Sequenz geeignet sind, unter anderem:



Was hat Flachfaltbarkeit mit dem 4-Farben-Satz zu tun?
Welchen Nutzen hat die Miura-Faltung für die Raumfahrt?
Auf wie viele Weisen lassen sich flachfaltbare Faltmuster falten?

Die hier vorgeschlagene Aktivität führen wir im Rahmen eines Seminars mit Lehramtsstudierenden sowie im Mathematik-Labor an der Universität Würzburg durch. Ferner haben wir diese Aktivität mehrmals in Schulen ausprobiert, verfeinert und in einem Artikel übersichtlich dargestellt.

§ Dmitri Nedrenco & Johannes Beck, Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen, 2016.
§ Thomas Hull, Project Origami, CRC Press, 2013

D. Nedrenco, J. Beck
Universität Würzburg